В. А. Кондратьев*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ**

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - f(u, x_n) = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, Ω — ограниченная липшицева область, $-\infty < x_n < +\infty$, $f(u, x_n)$ — непрерывная функция при $|u| \leqslant M = \mathrm{const}$, $0 < x_n < \infty$, $f(0, x_n) \equiv 0$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ непрерывна при $|u| < M$, $0 < x_n < \infty$, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\partial f}{\partial u} = 0$ равномерно в $\bar{\Omega} \times [\tau, \infty)$.

Предполагается, что

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant m \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2,$$

где $m = \mathrm{const} > 0$, $x \in \Omega \times \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Функции $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$ ограниченные и измеримые.

Рассматривается решение уравнения (1) в $\Omega \times \mathbb{R}^1_+$, такое, что

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\vec{n}, x_j) = 0, \quad x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^1_+, \tag{2}$$

где $\vec{n}$ — направление внешней нормали к $\partial\Omega$, или

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^1_+. \tag{3}$$

**Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 04-01-00344 и INTAS 03515007.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) или (3), определяется как обобщенное решение в стандартном понимании.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Ранее доказано [1], что если $a_{ij}(x) \equiv \delta_{ij}$, $a_i(x) \equiv 0$, то всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) и имеющее нулевой предел при $x_n \to +\infty$ равномерно в $\bar{\Omega}$, таково, что

$$u(x) = T(x_n) + O(e^{-\alpha x_n}), \quad x_n \to +\infty, \tag{4}$$

где $T(x_n)$ — некоторое (зависящее от u) решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{T} - f(T, t) = 0. \tag{5}$$

Заметим, что $T(x_n) \equiv 0$ в формуле (4) тогда и только тогда, когда $u(x)$ меняет знак в каждой области $x_n > N$, $\hat{x} \in \Omega$, $N = 1, 2, \ldots$

В [2] такой же результат установлен в случае, когда коэффициенты уравнения (1) зависят только от $\hat{x}$ или все $a_i(x)$ равны 0, но a_{ij} зависят от x.

§ 2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Формула (4) оказывается справедливой и в случае, когда все коэффициенты уравнения (1) a_{ij}, a_i зависят от $x = (x_1, \ldots, x_n)$, что и является основным результатом настоящей работы.

Доказывается также, что если $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3), $\lim\limits_{x_n \to +\infty} u(x) = 0$ равномерно в $\bar{\Omega}$, то

$$u = O(e^{-\alpha x_n}), \quad x_n \to +\infty, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{6}$$

Будем обозначать

$$\Pi_{a,b} = \{x\colon \hat{x} \in \Omega,\ a < x_n < b\}, \qquad \Pi_a = \Pi_{a,\infty},$$
$$\Gamma_{a,b} = \{x\colon \hat{x} \in \partial\Omega,\ a < x_n < b\}, \quad \Gamma_a = \Gamma_{a,\infty}.$$

Напомним определение обобщенного решения уравнения (1) в Π_0, удовлетворяющего условию (2) на Γ_0. Такое решение есть функция

$u(x)$, такая, что $u(x) \in W_2^1(\Pi_{0,a}) \cap L_\infty(\Pi_{0,a})$ при любом $a > 0$, и каковы бы ни были a_1, a_2, $0 < a_1 < a_2$, и $\psi(x) \in W_2^1(\Pi_{a_1,a_2})$, $\psi|_{x_n=a_1} = \psi|_{x_n=a_2} = 0$, справедливо равенство

$$-\int\limits_{\Pi_{a_1,a_2}} \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx - \int\limits_{\Pi_{a_1,a_2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx + \\ + \int\limits_{\Pi_{a_1,a_2}} \sum_{i=1}^{n-1} a_i\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\Pi_{a_1,a_2}} \psi f(u,x_n)\,dx,$$

$dx = dx_1 \dots dx_n$.

Заметим, что всякое обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), (3), непрерывно в каждой области $\bar{\Pi}_{a,b}$. Это утверждение следует из теории регулярности слабых решений линейных эллиптических уравнений [3].

Будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $u(x)$ — *решение уравнения* (1) *в* Π_0, $\lim\limits_{x_n\to+\infty} u(x)=0$ *равномерно в* $\bar{\Omega}$, *то найдется такое решение уравнения* (5), *что имеет место формула* (4).

Теорема 2. *Если* $u(x)$ — *решение уравнения* (1) *в* Π_0, *удовлетворяющее* (3) *и имеющее нулевой предел при* $t \to +\infty$ *равномерно в* $\bar{\Omega}$, *то найдется такая константа* $\alpha > 0$, *что* $u(x) = O(e^{-\alpha x_n})$ *равномерно в* $(\bar{\Omega})$.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ji}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u) = 0. \tag{7}$$

Теорема 3. *Существует решение* $k(x)$ *уравнения* (7) *в* $\Pi_{-\infty,+\infty}$, *такое, что*

$$\frac{\partial k}{\partial \nu^*} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i k\cos(\vec{n}, x_i) = 0, \quad x \in \Gamma_{-\infty,+\infty}, \tag{8}$$

где

$$\frac{\partial k}{\partial \nu^*} \equiv \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ji}\frac{\partial k}{\partial x_j}\cos(\vec{n}, x_i),$$

$\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$,

$$0 < m_1 \leqslant k(x) \leqslant m_2, \qquad \int\limits_{\Pi_{-\infty,+\infty}} |\nabla k(x)|^2\, dx < \infty, \qquad \int\limits_{\Omega} k(x)\, d\hat{x} \equiv 1. \quad (9)$$

Доказательство. Решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (8), определяется как функция, такая, что $u(x) \in W_2^1(\Pi_{-a,a})$ при любом $a > 0$ и

$$-\int\limits_{\Pi_{-a,a}} \Big[\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big]dx + \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{-a,a}} a_i u \psi_{x_i}\, dx = 0,$$

какова бы ни была функция $\psi(x) \in W_2^1(\Pi_{-a,a})$, равная нулю при $x_n = \pm a$.

Пусть $u_N(x)$ — решение уравнения (7) в $\Pi_{-N,N}$, удовлетворяющее условию (8) на $\Gamma_{-N,N}$, $N > 0$, и такое, что

$$\frac{\partial u_N}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=\pm N} = 0. \quad (10)$$

Такое решение $u_N(x) \not\equiv 0$ существует, ибо задача (7), (8), (10) является сопряженной к задаче Неймана для уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \Pi_{-N,N}.$$

Это уравнение имеет решение $u(x) \equiv 1$, удовлетворяющее однородному краевому условию Неймана на $\partial\Pi_{-N,N}$, следовательно, по теореме Фредгольма задача (7), (8), (10) имеет нетривиальное решение $u_N(x)$, которое непрерывно в $\bar{\Pi}_{-N,N}$ и положительно [4].

Будем считать, что

$$(\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\int\limits_{\Omega} u_N(\hat{x}, 0)\, d\hat{x} = 1. \quad (11)$$

Из неравенства Харнака вытекает, что последовательность $u_N(x)$ равномерно ограничена в каждой области $\bar{\Pi}_{-a,a}$, $N > 2a$. Применяя метод диагонализации, можно найти подпоследовательность последовательности $u_N(x)$, равномерно сходящуюся в каждой области $\bar{\Pi}_{-a,a}$ к некоторой функции $u(x)$, которая является решением уравнения (7) в $\Pi_{-\infty,+\infty}$, удовлетворяет условию (8) и положительна в $\bar{\Pi}_{-\infty,+\infty}$.

Покажем, что

$$(\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\int\limits_{\Omega} u(x)\,d\hat{x} = 1, \quad -\infty < x_n < +\infty. \tag{12}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$(\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\int\limits_{\Omega} u_N(x)\,d\hat{x} = 1$$

при любом $N \geqslant 1$ и $|x_n| < N$.

Зафиксируем t, $|t| < N$, и положим $\psi(x) = 1$, $-N < x_n < t$, $\psi(x) \equiv 0$ при $x_n > t+\varepsilon$, $\psi(x) = \frac{x_n - 1 - \varepsilon}{\varepsilon}$ при $t < x_n < t+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Согласно определению решения уравнения (7) в $\Pi_{-N,N}$, удовлетворяющему условию (5) на $\Gamma_{-N,N}$ и условию (10), имеем

$$-\int\limits_{\Pi_{-N,N}} \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{\partial u_N}{\partial x_n}\,dx - \sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{-N,N}} a_{ji}\frac{\partial u_N}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx + {}$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{-N,N}} u_N\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx = 0$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_{t,t+\varepsilon}} \frac{\partial u_N}{\partial x_n}\,dx = 0.$$

Это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\int\limits_{\Omega} u_N(x)\,d\hat{x} = 0$$

при почти всех x_n, т. е.

$$\int\limits_{\Omega} u_N(x)\,d\hat{x} = \mathrm{const},$$

и в силу (10) имеет место неравенство (11).

Из (10) и из неравенства Харнака следует, что

$$m_1 \leqslant u(x) \leqslant m_2,$$

$m_1, m_2 = \mathrm{const} > 0$. Из ограниченности $u(x)$ и из неравенства Caccioppoli (см. [5]) получаем, что

$$\int\limits_{\Pi_{-\infty,+\infty}} |\operatorname{grad} u(x)|^2 \, dx \leqslant C.$$

Итак, построено решение, удовлетворяющее всем требованиям теоремы 3. Всюду в дальнейшем будем обозначать его $k(x)$. Обозначим также

$$\bar{u}(x_n) = \int\limits_{\Omega} u(x)k(x) \, d\hat{x}.$$

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Заметим, что из определения обобщенного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), следует, что если $\psi(x) \in W_2^1(\Pi_0)$, то при почти всех t_1, t_2, $0 < t_1 < t_2$,

$$\begin{gathered}\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} \psi \frac{\partial u}{\partial x_n} \, d\hat{x} - \int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} \psi \frac{\partial u}{\partial x_n} \, d\hat{x} - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, dx - \\ - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx + \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \\ = \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \psi f(u, x_n) \, dx. \qquad (13)\end{gathered}$$

Аналогично, так как $k(x)$ — обобщенное решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (8),

$$\begin{gathered}\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} \psi \frac{\partial k}{\partial x_n} \, d\hat{x} - \int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} \psi \frac{\partial k}{\partial x_n} \, d\hat{x} - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{\partial k}{\partial x_n} \, dx - \\ - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_i k \psi_{x_i} \, dx = 0 \qquad (14)\end{gathered}$$

при любой $\psi(x) \in W_{2,\mathrm{loc}}^1(\Pi_0)$ и при почти всех t_1, t_2, $0 < t_1 < t_2$.

Положив в (13) $\psi = k(u-\bar u)$, получим

$$\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat x\in\Omega}} k(u-\bar u)\frac{\partial(u-\bar u)}{\partial x_n}\,d\hat x - \int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat x\in\Omega}} k(u-\bar u)\frac{\partial(u-\bar u)}{\partial x_n}\,d\hat x -$$

$$-\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \frac{\partial k(u-\bar u)}{\partial x_n}\frac{\partial(u-\bar u)}{\partial x_n}\,dx - \sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}k(u-\bar u)\frac{\partial}{\partial x_j}(u-\bar u)\,dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_i k(u-\bar u)(u-\bar u)_{x_i}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} k(u-\bar u)(f(u,x_n)-f(\bar u,x_n))\,dx = 0. \tag{15}$$

Здесь использовалось то, что

$$\int\limits_{\Omega} k(u-\bar u)\frac{d\bar u}{dx_n}\,d\hat x = \frac{d\bar u}{dx_n}\left[\int\limits_{\Omega} ku\,dx - \bar u\right] = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial k(u-\bar u)}{\partial x_n}\,\frac{d\bar u}{dx_n}\,d\hat x = \frac{d\bar u}{dx_n}\,\frac{\partial}{\partial x_n}\int\limits_{\Omega} k(u-\bar u)\,d\hat x = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega} k(u-\bar u)f(\bar u,x_n)d\hat x = f(\bar u,x_n)\int\limits_{\Omega} k(u-\bar u)\,d\hat x = 0.$$

Из (15) следует

$$\frac12\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat x\in\Omega}} k(x)\frac{\partial(u-\bar u)^2}{\partial x_n}\,d\hat x - \frac12\int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat x\in\Omega}} k\frac{\partial(u-\bar u)^2}{\partial x_n}\,d\hat x -$$

$$-\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} k\left|\frac{\partial(u-\bar u)}{\partial x_n}\right|^2 dx - \frac12\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}}\frac{\partial k}{\partial x_n}\frac{\partial(u-\bar u)^2}{\partial x_n}\,dx -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_{ij}k\frac{\partial(u-\bar u)}{\partial x_i}\frac{\partial(u-\bar u)}{\partial x_j}\,dx -$$

$$-\frac12\sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_{ij}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial(u-\bar u)^2}{\partial x_j}\,dx + \frac12\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}}\sum_{i=1}^{n-1}a_i k\frac{\partial(u-\bar u)^2}{\partial x_n}\,dx -$$

$$-\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} [k(u-\bar{u})f(u,x_n) - f(\bar{u},x_n)]\,dx = 0. \tag{16}$$

Положим в (14) $\psi = \frac{1}{2}k(u-\bar{u})^2$. В результате получим

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \frac{\partial k}{\partial x_n}\frac{\partial(u-\bar{u})^2}{\partial x_n}\,dx - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_{ij}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial(u-\bar{u})^2}{\partial x_j}\,dx + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_i k\frac{\partial(u-\bar{u})^2}{\partial x_i}\,dx = \\ = -\frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} \frac{\partial k}{\partial x_n}(u-\bar{u})^2\,d\hat{x} + \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} \frac{\partial k}{\partial x_n}(u-\bar{u})^2\,d\hat{x}. \tag{17}$$

Из (16), (17) следует

$$\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} k\Big|\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_n}\Big|^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_{ij}\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_j}\,dx + \\ + \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} k(u-\bar{u})(f(u,x_n) - f(\bar{u},x_n))\,dx = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} k\frac{\partial(u-\bar{u})^2}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} k\frac{\partial(u-\bar{u})^2}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} \frac{\partial k}{\partial x_n}(u-\bar{u})^2\,d\hat{x} + \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} \frac{\partial k}{\partial x_n}(u-\bar{u})^2\,d\hat{x}. \tag{18}$$

Так как $\lim\limits_{x_n\to+\infty} u = 0$, то $\int\limits_{\Pi_{t,t+1}} |\nabla u|^2\,dx \to 0$ при $t \to +\infty$ в силу неравенства Cacciopoli. Отсюда и из (18), устремив t_2 к ∞, получим

$$\int\limits_{\Pi_t} k\Big|\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_n}\Big|^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_t} ka_{ij}\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_j}\,dx + \\ + \int\limits_{\Pi_t} k(u-\bar{u})(f(u,x_n) - f(\bar{u},x_n))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{x_n=t} \frac{\partial k}{\partial x_n}(u-\bar{u})^2\,d\hat{x} - \int\limits_{x_n=t} k(u-\bar{u})\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_n}\,d\hat{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{x_n=t} \frac{\partial}{\partial x_n}[k(u-\bar{u})^2]\,d\hat{x} - \int\limits_{x_n=t} k\frac{\partial}{\partial x_n}(u-\bar{u})^2\,d\hat{x}. \qquad (19)$$

Пусть

$$J(t) = \int\limits_{\Pi_t} k\Big|\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_n}\Big|^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_t} ka_{ij}\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_i}\,\frac{\partial(u-\bar{u})}{\partial x_j}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_t} k(u-\bar{u})(f(u,x_n)-f(\bar{u},x_n))\,dx.$$

Из (19) получим (после интегрирования функции $J(t)$)

$$F(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty} J(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_\tau} \frac{\partial}{\partial x_n}k(u-\bar{u})^2\,dx - \int\limits_{\Pi_\tau} k\frac{\partial}{\partial x_n}(u-\bar{u})^2\,dx \leqslant J(\tau).$$

Таким образом,

$$F(\tau) + F'(\tau) \leqslant 0$$

и

$$F(t) \leqslant Ce^{-t}, \quad C > 0.$$

Заметим, что

$$F(t) \geqslant \int\limits_{t}^{2t} J(t)\,dt \geqslant tJ(2t),$$

значит,

$$J(t) \leqslant Ce^{-\delta t}.$$

Функция $\bar{u}(x_n)$ является решением некоторого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

В самом деле,

$$\frac{d\bar{u}}{dx_n} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial x_n}u\,d\hat{x} + \int\limits_{\Omega} k\frac{\partial u}{\partial x_n}\,d\hat{x}.$$

Пусть $\psi(x_n) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^1_+)$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{dx_n}\,\frac{d\bar{u}}{dx_n}\,dx_n =$$

$$= \int\limits_{\Pi_0} \frac{\partial k}{\partial x_n}\,\frac{\partial \psi u}{\partial x_n}\,dx - 2\int\limits_{\Pi_0} \psi\frac{\partial k}{\partial x_n}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\,dx + \int\limits_{\Pi_0} \frac{\partial u}{\partial x_n}\,\frac{\partial k\psi}{\partial x_n}\,dx =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_0} a_{ji}\frac{\partial k}{\partial x_i}\,\frac{\partial u\psi}{\partial x_j}\,dx + \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_0} a_i k\frac{\partial \psi u}{\partial x_i}\,dx - 2\int\limits_{\Pi_0} \psi\frac{\partial k}{\partial x_n}\,\frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_0} a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx - \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_0} a_i k\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_{\Pi_0} k\psi|u|^{\sigma-1}u\,dx =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_0} (a_{ij}+a_{ji})\psi(x_n)\frac{\partial k}{\partial x_i}\,\frac{\partial (u-\bar{u})}{\partial x_j}\,dx -$$

$$- 2\int\limits_{\Pi_0} \psi\frac{\partial k}{\partial x_n}\,\frac{\partial (u-\bar{u})}{\partial x_n}\,dx + 2\int\limits_{\Pi_0} \psi\frac{\partial k}{\partial x_n}\,\frac{d\bar{u}}{dx_n}\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Pi_0} k + f(u,x_n)dx + \int\limits_{\Pi_0} \psi f(\bar{u},x_n)\,dx - \int\limits_{\Pi_0} \psi f(\bar{u},x_n)\,dx.$$

Обозначим

$$\Phi(x_n) = -\sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Omega} (a_{ij}+a_{ji})\frac{\partial k}{\partial x_i}\,\frac{\partial (u-\bar{u})}{\partial x_j}\,d\hat{x} -$$

$$- 2\int\limits_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial x_n}\,\frac{\partial (u-\bar{u})}{\partial x_n}\,d\hat{x} + \int\limits_{\Omega} [kf(u,x_n) - f(\bar{u},x_n)]\,d\hat{x}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial k}{\partial x_n}\,\frac{d\bar{u}}{dx_n}\,d\hat{x} = 0.$$

Значит,

$$\int\limits_{\Pi_0} \psi(x_n)\frac{\partial k}{\partial x_{x_n}}\,\frac{d\bar{u}}{dx_n}\,d\hat{x} = 0.$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^\infty e^{\gamma x_n}\Phi^2(x_n)\,dx_n<\infty$$

при некотором $\gamma>0$, т. е. $\bar u(x_n)$ является обобщенным решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\bar u}{dx_n^2}=\Phi(x_n)+f(\bar u,x_n), \tag{20}$$

где $\int\limits_0^\infty \Phi^2(x_n)e^{\delta x_n}\,dx_n<\infty$ при некотором $\delta>0$.

В [1] доказано, что всякое решение дифференциального уравнения (20), имеющее нулевой предел при $x_n\to+\infty$, таково, что

$$u=u_0(x_n)+O(e^{-\alpha x_n}),$$

где u_0 — некоторое решение уравнения

$$\frac{d^2u_0}{dx_n^2}=f(u_0,x_n).$$

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Заметим, что из определения обобщенного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (3), следует, что если $\psi(x)\in W_2^1(\Pi_0)$, $\psi(x)=0$ на Γ_0, то

$$\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat x\in\Omega}}\psi\frac{\partial u}{\partial x_n}\,d\hat x-\int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat x\in\Omega}}\psi\frac{\partial u}{\partial x_n}\,d\hat x-\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\,\frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx-$$
$$-\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}}\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx+\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}}\sum_{i=1}^{n-1}a_i(x)\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx=\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}}\psi f(u,x_n)\,dx \tag{21}$$

при почти всех t_1, t_2, $0<t_1<t_2<\infty$.

Положим в (21) $\psi = k(x)u$, где $k(x)$ — обобщенное решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (8). Получим

$$\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} ku\frac{\partial u}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} ku\frac{\partial u}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \frac{\partial ku}{\partial x_n}\,\frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial ku}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_i ku\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} kuf(u,x_n)\,dx$$

или

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} k\frac{\partial u^2}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} k\frac{\partial u^2}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} k\Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \frac{\partial}{\partial x_n}k\frac{\partial u^2}{\partial x_n}\,dx - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}k\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\partial u^2}{\partial x_j}\,\frac{\partial k}{\partial x_i}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} a_i k\frac{\partial u^2}{\partial x_i} - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} kuf(u,x_n)\,dx = 0.$$

Отсюда и из (13) с $\psi = u^2$ получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} k\frac{\partial u^2}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} k\frac{\partial u^2}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} k\Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^2\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}k\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} kuf(u,x_n)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\substack{x_n=t_2\\ \hat{x}\in\Omega}} u^2\frac{\partial k}{\partial x_n}\,d\hat{x} - \int\limits_{\substack{x_n=t_1\\ \hat{x}\in\Omega}} u^2\frac{\partial k}{\partial x_n}\,d\hat{x} = 0.$$

Устремив t_2 к $+\infty$ по некоторой подпоследовательности, получим

$$\int\limits_{\Pi_{t,\infty}} k\Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{n-1}\int\limits_{\Pi_{t,\infty}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}k\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_{t,\infty}} kuf(u,x_n)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_n=t\\ x_n\in\Omega}} \frac{\partial ku^2}{\partial x_n}\,dx.$$

Отсюда и из неравенства Фридрихса следует

$$J(t)=\int\limits_{\Pi_t}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^2+u^2\Big]\,dx\leqslant C\int\limits_{\substack{x_n=t\\ \hat{x}\in\Omega}}\Big[u^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^2\Big]\,d\hat{x},$$

т. е.

$$J(t)\leqslant -CJ'(t).$$

Следовательно, $J(t)\leqslant C_1e^{-c_2t}$, $c_2>0$, $t>0$.

Из неравенства Мозера [3] заключаем, что

$$|u|\leqslant Ce^{-\delta t},\quad \delta>0,$$

что и требовалось доказать.

Условие стремления решения при $x_n\to+\infty$ к нулю является существенным как в теореме 1, так и в теореме 2. Нетрудно привести примеры, когда решение не имеет нулевого предела на бесконечности и при выполнении нулевых условий Дирихле или Неймана на некомпактной части границы. Приведем достаточные условия для того, чтобы любое решение уравнения (1), удовлетворяющее (2), имело нулевой предел равномерно в $\bar{\Omega}$ при $x_n\to+\infty$.

Пусть $f(u,x_n)\equiv f(u)$ такова, что $f(u)$ монотонно возрастает (не убывает по u)

$$\int^{\infty}\Big[\int\limits_0^y f(y)dy\Big]^{-1/2}dy<\infty. \tag{22}$$

При выполнении этих условий каждое решение уравнения (1), удовлетворяющее (3), также стремится к нулю при $x_n\to+\infty$ равномерно в Ω. Условие (22) является необходимым для стремления к нулю всех решений уравнения (1), удовлетворяющих (3), при монотонно возрастающей $f(u)$.

Заметим в заключение, что как утверждения теорем 1, 2, так и доказательства остаются верными, если требование существования у решения нулевого предела на бесконечности заменить на требование достаточной малости его в полуцилиндре Π_t при некотором t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 3. С. 45—68.
2. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* Boundary value problems for nonlinear elliptic equations in cylindrical domains // J. Part. Different. Equations. 1993. V. 6, N 1. P. 10—16.
3. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. N. Y.: Springer, 1977.
4. *Oleinik O. A.* Some Asymptotic Problems of the Theory of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 1996. Lezioni Lincei. Acad. Naz. Lincei.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.