

I часть. (1,5 часа)

1. Дано уравнение: $u_t - e^u u_x = 0$.

а) (2б) Дать определение обобщённого энтропийного решения этого уравнения.

б) (3б) Является ли функция $u(t, x) = \begin{cases} \ln 2 & \text{при } x < -\frac{t}{\ln 2} \\ 0 & \text{при } x > -\frac{t}{\ln 2} \end{cases}$ обобщенным энтропийным решением этого уравнения?

Ответ. НЕТ

в) (10б) Решить задачи о распаде разрыва с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad u|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ -1 & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

Ответ. $u(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < (e^{-1} - 1)t \\ 0 & \text{при } x > (e^{-1} - 1)t \end{cases}$ и

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -t \\ \ln\left(-\frac{x}{t}\right) & \text{при } -t < x < -\frac{t}{e} \\ -1 & \text{при } x > -\frac{t}{e} \end{cases}.$$

2. а) (1б) Дать определение вектора, имеющего характеристическое направление, для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

б) (2б) Определить тип уравнения

$$u_{xx} + 4xu_{xy} + 4x^2u_{yy} - \frac{u_x}{x} = 0.$$

Ответ. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ

в) (4б) Привести уравнение к каноническому виду.

Ответ. При замене $\begin{cases} \xi = y - x^2, \\ \eta = y \end{cases}$, уравнение $u_{\eta\eta} = 0$.

г) (3б) Найти его общее решение.

д) (3б) Найти решение задачи Коши с начальными условиями

$$u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0.$$

Ответ. $u = x^2$.

3. (46) Пусть $u(x, y)$ — такая гармоническая в $\mathbb{R}^2$ функция, что

$$u(x, y) < u_y(x, y) \quad \text{для любой точки } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Найдите вид такой функции.

Ответ. $u = C + (A \sin x + B \cos x)e^y$.

Критерий оценок:

9–22 — “удовлетворительно”,

23–32 — “допуск” ко второй части экзамена.

II часть. (1,5 часа)

Вариант Ц.

4. Пусть $u(t, x, y)$ — решение в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \\ u|_{t=0} = \frac{(2|x|-3)^{2000}(3|x|+2)^8}{(2|x|+1)^{2008}}. \end{cases}$$

а) (2б) Верно ли, что существует равномерный по (x, y) предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x, y)$? Ответ обосновать.

б) (3б) Найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x, y)$.

5. а) (1б) Написать неравенство Фридрихса

б) (7б) Имеет ли место неравенство Фридрихса для функций $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\Omega} u \, dx = 0?$$

Ответ обосновать.

6. (8б) Найти решение $u(t, x_1, x_2, x_3)$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_x u, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = |x|^5. \end{cases}$$

Ответ. $u = \frac{(|x| + t)^7 + ||x| - t|^7}{14|x|}.$

7. а) (1б) Дать определение потенциала простого слоя.

б) (2б) Сформулировать теорему о скачке для потенциала простого слоя.

Критерий оценок:

0–6 — “удовлетворительно”,

7–11 — “хорошо”,

12–26 — “отлично”