

Вариант Д (Урчп 06.06.2008. Лектор Чечкин Г.А.)

I часть. (1,5 часа)

1. Дано уравнение: $u_t - \cos u \, u_x = 0$.

а) (2б) Дать определение обобщённого энтропийного решения этого уравнения.

б) (3б) Является ли функция $u(t, x) = \begin{cases} -\pi & \text{при } x < 0 \\ \pi & \text{при } x > 0 \end{cases}$ обобщённым энтропийным решением этого уравнения?

Ответ. НЕТ.

в) (10б) Решить задачу о распаде разрыва с начальным условием

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 4\pi & \text{при } x < 0 \\ \pi & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ. } u(t, x) = \begin{cases} \pi, & x > t, \\ \pi + \arccos \frac{x}{t} = 2\pi - \arccos \left(-\frac{x}{t} \right), & 0 < x < t, \\ 3\pi + \arccos \frac{x}{t} = 4\pi - \arccos \left(-\frac{x}{t} \right), & -t < x < 0, \\ 4\pi, & x < -t. \end{cases}$$

2. а) (1б) Дать определение характеристики для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

б) (2б) Определить тип уравнения

$$y^2 u_{xx} - 2y u_{xy} + u_{yy} - \frac{u_y}{y} = 0.$$

Ответ. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ

в) (4б) Привести уравнение к каноническому виду.

Ответ. При замене $\begin{cases} z = \frac{y^2}{2} + x, \\ w = x \end{cases}$, уравнение $u_{ww} = 0$. При замене

$$\begin{cases} z = \frac{y^2}{2} + x, \\ w = y \end{cases}, \text{ уравнение } w^2 u_{ww} + w u_w = 0.$$

г) (3б) Найти его общее решение.

д) (3б) Найти решение задачи Коши с начальными условиями

$$u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = 0.$$

Ответ. $u = y^2$.

3. (46) Пусть $u(x, y)$ — такая гармоническая в $\mathbb{R}^2$ функция, что

$$u_x(x, y) < u(x, y) \quad \text{для любой точки } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Найдите вид такой функции.

Ответ. $u = C + (A \sin y + B \cos y)e^x$.

Критерий оценок:

9–22 — “удовлетворительно”,

23–32 — “допуск” ко второй части экзамена.

II часть. (1,5 часа)

Вариант П.

4. Пусть $u(t, x, y)$ — решение в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \\ u|_{t=0} = \frac{yx^{2008}-y}{2x^{2008}-x+1} \sin \frac{1}{y}. \end{cases}$$

а) (2б) Верно ли, что существует равномерный по (x, y) предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x, y)$? Ответ обосновать.

б) (3б) Найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x, y)$.

5. а) (1б) Написать неравенство Фридрихса

б) (7б) Имеет ли место неравенство Фридрихса для функций $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\Omega} u \, dx = 0?$$

Ответ обосновать.

6. (8б) Найти решение $u(t, x_1, x_2, x_3)$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_x u, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = |x|^3. \end{cases}$$

Ответ. $u = \frac{(|x| + t)^5 - ||x| - t|^5}{10|x|}.$

7. а) (1б) Дать определение потенциала двойного слоя.

б) (2б) Сформулировать теорему о скачке для потенциала двойного слоя.

Критерий оценок:

0–6 — “удовлетворительно”,

7–11 — “хорошо”,

12–26 — “отлично”