

Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точек негладкости гамильтониана.

М.И. Зеликин, Л.В. Локуциевский, R. Hildebrand

Мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия
Laboratory of Jean Kuzmann, France

12 февраля, 2013

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивойсть

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \min,$$

$$\ddot{x} = u, u \in U.$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$$

здесь $x \in \mathbb{R}^2$, и $U \subset \mathbb{R}^2$ – правильный треугольник с центром в 0.

Будем использовать барицентрические координаты:

$$x = (x^1, x^2, x^3), \quad y = (y^1, y^2, y^3), \quad u = (u^1, u^2, u^3), \quad \text{где } y = \dot{x}$$

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0, \quad y^1 + y^2 + y^3 = 0; \quad u^1 + u^2 + u^3 = 0.$$

Вершинами треугольника U являются точки $a_1 = (-2, 1, 1)$, $a_2 = (1, -2, 1)$ и $a_3 = (1, 1, -2)$.

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - **Симметрии задачи**
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивость

Согласно принципу максимума Понтрягина определены сопряженные переменные ϕ и ψ такие, что оптимальная траектория поднимается до траектории гамильтоновой системы:

$$\dot{x} = H_\phi, \quad \dot{y} = H_\psi, \quad \dot{\phi} = -H_x, \quad \dot{\psi} = -H_y,$$
$$u \in \underset{u}{\operatorname{Argmax}} H,$$

где

$$H = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{2} x_i^2 + \phi_i y_i + \psi_i u_i \right).$$

Таким образом, выполнена система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\phi; \\ \dot{\phi} = x; \\ \dot{x} = y; \\ \dot{y} = u; \end{cases}$$

и принцип максимума

$$\langle \psi, u \rangle \rightarrow \max_{u \in U}$$

Задача обладает двумя группами симметрий:

- (i) Масштабная группа $G = \mathbb{R}_+$ действует растяжением с разными степенями:

$$g_\lambda(x, y, \phi, \psi) = (\lambda^2 x, \lambda y, \lambda^3 \phi, \lambda^4 \psi), \text{ где } \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Оптимальные траектории переходят в оптимальные, однако скорость движения по ним изменяется в λ раз.

- (ii) Дискретная группа S_3 действует одновременной перестановкой индексов:

$$x_i \mapsto x_{\sigma(i)}; y_i \mapsto y_{\sigma(i)}; \phi_i \mapsto \phi_{\sigma(i)}; \psi_i \mapsto \psi_{\sigma(i)}$$

для $\sigma \in S_3$.

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - **Лагранжева поверхность оптимальных траекторий**
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивойсть

Теорема (А)

Для любых начальной точки $q_0 = (x_0, y_0)$ существует и единственная оптимальная траектория $\hat{x}(t, q_0), \hat{y}(t, q_0)$ исходной задачи. Сопряженные функции $\hat{\phi}(t, q_0)$ и $\hat{\psi}(t, q_0)$ также единственны. Причем найдется такой момент времени $T(q_0) \geq 0$, что

$$\hat{x}(t, q_0) = \hat{y}(t, q_0) = \hat{\phi}(t, q_0) = \hat{\psi}(t, q_0) = 0, \text{ при } t \geq T(q_0)$$

Отображение $(x_0, y_0) \mapsto (\hat{\phi}(0, q_0), \hat{\psi}(0, q_0))$ является локально липшицевым и биективным.

Таким образом, в пространстве (x, y, ϕ, ψ) определено четырехмерное липшицево многообразие M_+ , сотканное из оптимальных траекторий – траекторий гамильтоновой системы, приходящих в начало координат за конечное время:

$$M_+ = \{(x_0, y_0, \phi_0, \psi_0), x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2\}$$

Здесь через ϕ_0 и ψ_0 обозначены значения сопряженных переменных на оптимальной траектории в начальный момент времени:

$$\phi_0 = \hat{\phi}(0, x_0, y_0), \quad \psi_0 = \hat{\psi}(0, x_0, y_0)$$

После факторизации по действию масштабной группы \mathbb{R}_+ получаем трехмерную сферу

$$M_+/\mathbb{R}_+ \simeq S^3$$

После факторизации сферы S^3 по действию группы S_3 получаем пространство типа линзового.

Отметим, что гамильтоново векторное поле переносится на фактор-пространство S^3 с потерей длин векторов. Поэтому на S^3 определено поле направлений, а его интегральные кривые – это образы оптимальных траекторий исходной задачи.

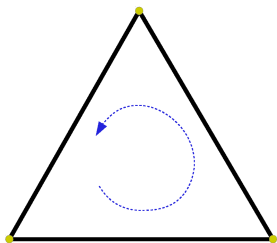
Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - **Структура оптимального синтеза**
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивойсть

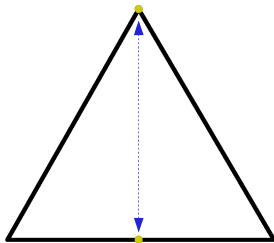
Выделим два важных типа оптимальных траекторий.

- (I) Существует 2 однопараметрических семейства траекторий Z_{\pm}^{ijk} . На любой траектории этого семейства управление совершает счетное число переключений, чередующих вершины симплекса в заданном порядке $i \rightarrow j \rightarrow k$. Знак плюс или минус соответствует четности перестановки (i, j, k) . Образы Z_{\pm}^{ijk} на фактор пространстве S^3 – это два зацепленных цикла с индексом зацепления 1.

- (II) Существует 3 однопараметрических семейства траекторий Z^{ij} . На любой траектории этого семейства управление совершает счетное число переключений, чередующих вершину симплекса $k \neq i, j$ и середину противоположного ребра. Образы Z^{ij} на фактор пространстве S^3 – это три зацепленных цикла. Индекс зацепления любых двух равен 1.



(a) Очередность
управления на
циклах Z_{\pm}^{ijk} .



(b) Очередность
управления на
циклах Z^{ij} .

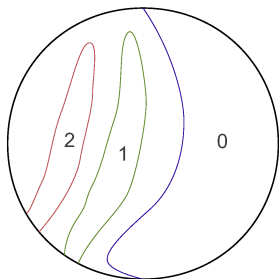
- (i) На фактор пространстве S^3 циклы Z^{ij} являются аттракторами. Объединение их областей притяжения – это все пространство S^3 без некоторого множества меры 0.
- (ii) На фактор пространстве S^3 циклы Z_{\pm}^{ijk} являются репеллерами. Объединение их областей притяжения в обратном времени – это все пространство S^3 без некоторого множества меры 0.

Оглавление

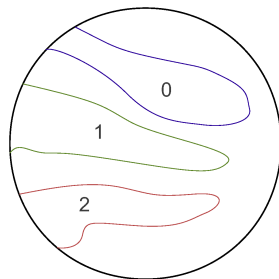
- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - **Хаотическая динамика**
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивойсть

Исследуем динамику траекторий, не лежащих в областях притяжения Z^{ij} и областях отталкивания Z_{\pm}^{ijk} . Поверхность переключения управления после факторизации по масштабной группе \mathbb{R}_+ и группе S_3 представляет собой двумерный диск с некоторыми специальными отождествлениями границы.

Обозначим через F – отображение Пуанкаре поверхности переключения Q на себя вдоль оптимальных траекторий.



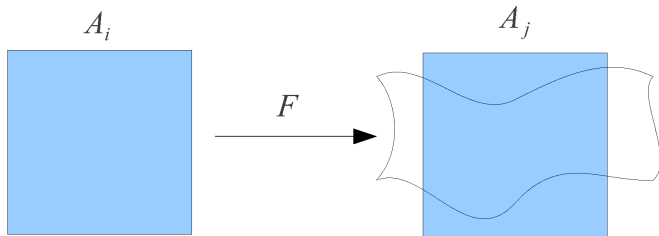
(a) Схематичное изображение итераций областей притяжения циклов Z^{ij} в обратном времени в Q .



(b) Схематичное изображение итераций областей отталкивания циклов Z_{\pm}^{ijk} в прямом времени в Q .

В результате нескольких итераций остается непокрытыми 4 “прямоугольных” области A_1, A_2, A_3 и A_4 . Любая точка вне объединения $\cup A_i$ стремится в прямом времени в Z^{ij} , или к Z_{\pm}^{ijk} в обратном. Некоторые точки из $\cup A_i$ не стремятся ни к Z^{ij} в прямом времени, ни к Z_{\pm}^{ijk} в обратном. Обозначим множество всех таких точек через NW (non-wandering).

Отображение F является гиперболическим (в липшицевом смысле) в ограничении на области A_i . Области A_i образуют марковское разбиение для отображения Пуанкаре F . То есть, грубо говоря, для любых i и j пересечение образа $F(A_i)$ с областью A_j либо пусто, либо устроено, как показано на рисунке.



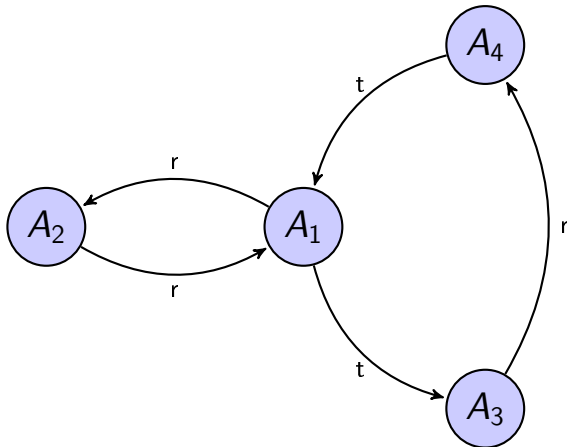


Рис.: Граф Γ , изображающий пересечение областей A_i при итерации отображения F .

Таким образом каждой точке $x \in NW$ ставится в соответствие бесконечная в обе стороны последовательность $s = \Phi_\Gamma(x)$ символов $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Символ на k -ом месте ставится в зависимости от того, в какой области находится точка $F^k(x)$.

Теорема (B)

Описанное соответствие Φ_Γ является гомеоморфизмом между множеством NW и топологической марковской цепью Σ_Γ .

Более того, Φ_Γ коммутирует с бернуллиевским сдвигом I

$$\begin{array}{ccc}
 NW & \xrightarrow{F} & NW \\
 \downarrow \Phi_\Gamma & & \downarrow \Phi_\Gamma \\
 \Sigma_\Gamma & \xrightarrow{I} & \Sigma_\Gamma
 \end{array}$$

Вычислена топологическая энтропия F :

$$h_{\text{top}}(F) = h_{\text{top}}(I) = \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \right) \approx 0.4057$$

Вернемся к исходному фазовому пространству. Размерность множества \mathcal{X} всех точек фазового пространства, оптимальные траектории из которых не стремятся к аттрактору Z^j , удовлетворяет неравенствам

$$3,204762 \leq \dim_H \mathcal{X} \leq \overline{\dim}_K \mathcal{X} \leq 3,407495$$

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - **Дополнение – нецелые размерности**
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивойсть

Размерность по Хаусдорфу

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество, и оно покрыто шарами U_i радиусов $r_i < \varepsilon$. Обозначим через $H^d(X)$ – d -мерный объем по Хаусдорфу ($d \in \mathbb{R}_+$):

$$H^d(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{U_i: r_i < \varepsilon} \sum r_i^d.$$

Нетрудно доказать, что существует такое $d_0 \geq 0$, что $H^d(X) = 0$ при $d > d_0$ и $H^d(X) = +\infty$ при $d < d_0$. Число d_0 называется размерностью X по Хаусдорфу:

$$\dim_H X = d_0.$$

Размерность по Колмогорову

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество, и N_ε – минимальное число элементов в покрытии X шарами радиусов $r_i < \varepsilon$.

Скорость, с какой растет N_ε при уменьшении ε , называется (верхней/нижней) размерностью по Колмогорову множества X :

$$\overline{\dim}_K X = \limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\log N_\varepsilon}{-\log \varepsilon}$$

$$\underline{\dim}_K X = \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\log N_\varepsilon}{-\log \varepsilon}$$

Другое название – box-dimension. Хорошо известно, что

$$\dim_H X \leq \underline{\dim}_K X \leq \overline{\dim}_K X$$

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - **Описание системы**
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивойсть

Рассмотрим гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие M^{2n} . Пусть $(2n - 1)$ -мерное стратифицированное подмногообразие $S \subset M$ разделяет M на конечное число открытых областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$: $(M = \overline{\bigcup \Omega_i})$. Рассмотрим непрерывный гамильтониан $H(q, p) : M \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которого $H_i = H|_{\Omega_i}$ на любое множество Ω_i определяет гладкую функцию, C^∞ продолжимую на окрестность множества $\overline{\Omega_i}$. Рассмотрим открытую окрестность $U \subset M$. Пусть в множестве U содержатся части лишь от трех $2n - 1$ -мерных стратов $S_{ij} \subset S$, $(i, j = 1, 2, 3)$, которые разделяют области Ω_i и Ω_j . Пусть S_{ij} примыкают друг к другу по страту $S_{123} = \overline{S_{12}} \cap \overline{S_{23}} \cap \overline{S_{31}}$.

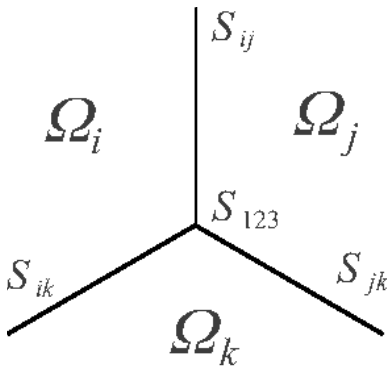


Рис.: Схематическое изображение структуры окрестности \mathcal{U} .
Здесь $H = \max\{H_1, H_2, H_3\}$ и $\Omega_i = \{x : H_i(x) > \max\{H_j(x), H_k(x)\}\}$.

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - **Странные точки**
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивойсть

Точку $x_0 \in S_{123}$, $H_1(x_0) = H_2(x_0) = H_3(x_0)$, будем называть *странный*, если в x_0 выполнен следующий набор условий:

- (i) Коммутаторы функций H_i до четвертого порядка включительно обращаются в ноль в точке x_0 . Набор их градиентов и градиентов функций H_i в точке x_0 имеет максимальный ранг (насколько это допускается условиями антикоммутативности и тождествами Якоби), иными словами, эти градиенты находятся в общем положении.

- (ii) Положим $F_0 = H_1 + H_2 + H_3$, $F_1 = H_2 - H_3$,
 $F_2 = H_3 - H_1$, $F_3 = H_1 - H_2$. Тогда симметрическая
билинейная форма ранга 2

$$B_{ij} = (\text{ad}F_i)(\text{ad}F_0)^3 F_j|_{x_0}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

пропорциональна билинейной форме с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

с положительным коэффициентом. Остальные
(независимые от перечисленных) коммутаторы пятого
порядка от функций F_i обращаются в ноль в точке x_0 .

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - Структурная устойчивость

Множество траекторий, входящих в точку x_0 описывается следующей теоремой

Теорема (С)

Пусть точка x_0 гамильтоновой системы с кусочно гладким гамильтонианом H является странной. Тогда в окрестности точки x_0 существует множество точек \mathcal{X} , такое что

I. Любая траектория $X(t, y)$, начинающаяся в точке $y \in \mathcal{X}$, за конечное время $T(y)$ приходит в точку x_0 ,

$$X(T(y), y) = x_0.$$

Более того $X(t, y) \in \mathcal{X}$ при $t \in [0, T(y))$, и траектория $X(t, y)$ имеет счетное число последовательных пересечений $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ с S при $0 < t < T(y)$ и все они трансверсальны, причем $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T(y)$.

II. Если обозначить через $f : \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ – отображение, переводящее точку $y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ в точку следующего пересечения траектории $X(t, y)$ с \mathcal{S} , т.е. $f(y) = X(t_1, y)$, то односторонняя топологическая марковская цепь Σ_Γ^+ на графе Γ , не зависящем от x_0 и H , является фактором динамической системы f :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \cap \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \\ \downarrow \Phi_\Gamma & & \downarrow \Phi_\Gamma \\ \Sigma_\Gamma^+ & \xrightarrow{I} & \Sigma_\Gamma^+ \end{array}$$

Φ_Γ – непрерывное сюръективное отображение. Прообраз $\Phi_\Gamma^{-1}(\sigma)$ каждой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ гомеоморфен открытому двумерному диску D^2 , и диаметр $f^k(\Phi_\Gamma^{-1}(\sigma))$ стремится к 0 при $k \rightarrow +\infty$.

III. Хаусдорфова и Колмогоровская размерности \mathcal{X} не зависят от x_0 и H (лишь бы точка x_0 была странной) и выполнены оценки

$$3,204762 \leq \dim_H \mathcal{X} \leq \overline{\dim}_K \mathcal{X} \leq 3,407495$$

IV. Топологическая энтропия бернуллиевского сдвига l есть

$$h_{\text{top}}(l) = \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \right) \approx 0.4057$$

V. Аналогичная картина с обращением течения времени имеет место для траекторий, выходящих из точки x_0 .

Оглавление

- 1 **Задача оптимального управления**
 - Постановка задачи
 - Симметрии задачи
 - Лагранжева поверхность оптимальных траекторий
 - Структура оптимального синтеза
 - Хаотическая динамика
 - Дополнение – нецелые размерности
- 2 **Гамильтоновы системы с негладким гамильтонеаном**
 - Описание системы
 - Странные точки
 - Теорема о стохастической динамике.
 - **Структурная устойчивойсть**

Непосредственно из определения странной точки вытекает

Замечание

Множество $\mathcal{W} \subseteq S_{123}$ всех странных точек в S_{123} образует подмногообразие коразмерности $\text{codim } \mathcal{W} = 77$ в S_{123} .

Замечание

Определение странной точки немедленно влечет структурную устойчивость. А именно, если H и G достаточно близки в окрестности точки x_0 в некотором специальном смысле, и x_0 — странная точка для H , то в окрестности x_0 найдется точка y_0 , являющаяся странной для G .

Литература

Hildebrand R., Lokutsievskiy L.V., Zelikin M.I.

“Generic fractal structure of finite parts of trajectories for piecewise smooth Hamiltonian systems”

Russian Journal of Mathematical Physics, **20:1** (2013), pp. 25-32

Спасибо за внимание.