

# Дифференциальные включения в теории обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби

Н.Н. Субботина

Институт математики и механики УрО РАН имени Н.Н. Красовского,  
г. Екатеринбург

*Всероссийская научная конференция “А.Ф. Филиппов – человек,  
ученый, педагог”*

*10-11 октября, 2013 г., Москва, МГУ.*

# Задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + H\left(t, x, D_x u(t, x)\right) = 0, \quad (1)$$

$$u(T, x) = \sigma(x), \quad (t, x) \in \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

$$D_x u(t, x) = \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_n} \right)$$

Предполагается, что гамильтониан  $H$  и краевая функция  $\sigma$  дважды непрерывно дифференцируемы.

# Характеристическая система

$$\begin{aligned} d\hat{x}/dt &= D_{\hat{p}}H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ d\hat{p}/dt &= -D_{\hat{x}}H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ d\hat{z}/dt &= \langle \hat{p}, D_{\hat{p}}H(t, \hat{x}, \hat{p}) \rangle - H(t, \hat{x}, \hat{p}), \end{aligned} \tag{3}$$

краевые условия:

$$\hat{x}(T, y) = y, \quad \hat{p}(T, y) = D_y \sigma(y), \quad \hat{z}(T, y) = \sigma(y); \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где

$$D_{\hat{p}}H(t, \hat{x}, \hat{p}) = (\partial H / \partial \hat{p}_1, \dots, \partial H / \partial \hat{p}_n),$$

$$D_{\hat{x}}H(t, \hat{x}, \hat{p}) = (\partial H / \partial \hat{x}_1, \dots, \partial H / \partial \hat{x}_n).$$

# Метод Коши

Дополнительное условие

$$Y(t, x) = \{\forall y \in \mathbb{R}^n : \hat{x}(t, y) = x\} = \{y(t, x)\} \quad (5)$$

одноэлементно. Тогда классическое решение представимо в виде

$$u(t, x) = \hat{z}(t, y(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \quad (6)$$

причем

$$D_x u(t, x) = \hat{p}(t, y(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \Pi_T. \quad (7)$$

# Свойство инвариантности графика классического решения задачи (1), (2)

График классического решения  $u(\cdot, \cdot) \in \mathbb{C}^1(\Pi_T)$   
 уравнения Гамильтона–Якоби (2) инвариантен  
 относительно решений характеристических уравнений (3).  
 Эти решения

$$(\hat{x}(\cdot, y), \hat{p}(\cdot, y), \hat{z}(\cdot, y)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (8)$$

зависящие от параметра  $y \in \mathbb{R}^n$ , называются  
 характеристиками (см. например, Р. Курант, И.Г.  
 Петровский)

# Пример 1

Рассмотрим задачу Коши :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = 0, \quad u(2, x) = \frac{x^2}{2}. \quad (9)$$

$0 \leq t \leq T = 2, x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$ .

Характеристическая система

$$\dot{x} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \dot{p} = 0, \quad \dot{z} = \frac{-1}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

с краевым условием

$$\tilde{x}(2, y) = y, \quad \tilde{p}(2, y) = y, \quad \tilde{z}(2, y) = \frac{y^2}{2},$$

где  $y \in \mathbb{R}$  — параметр.

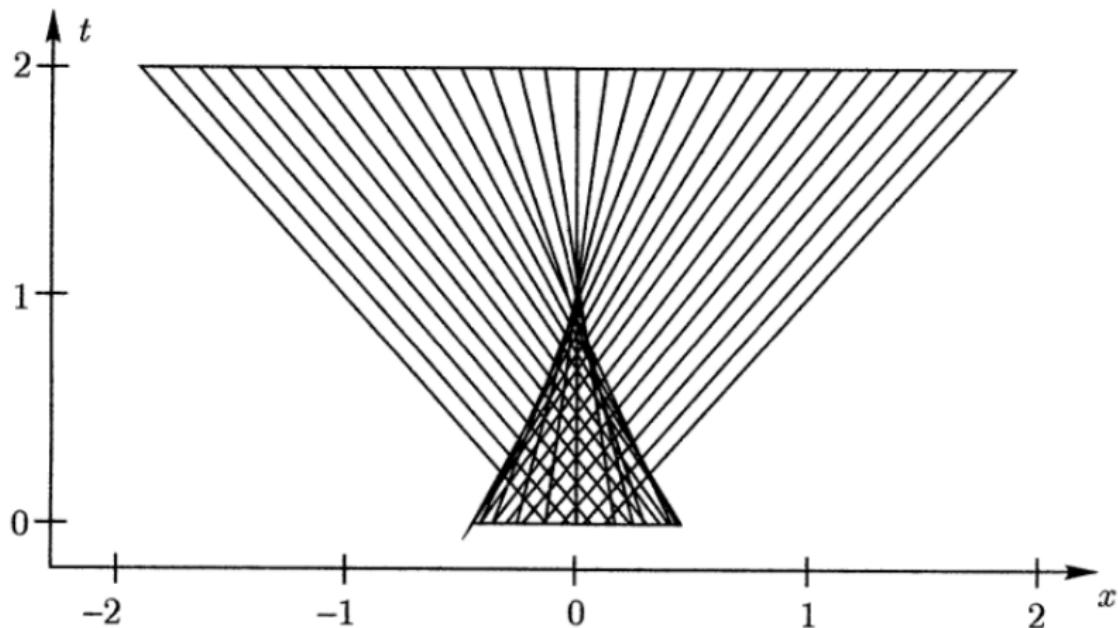


Рис. 1.

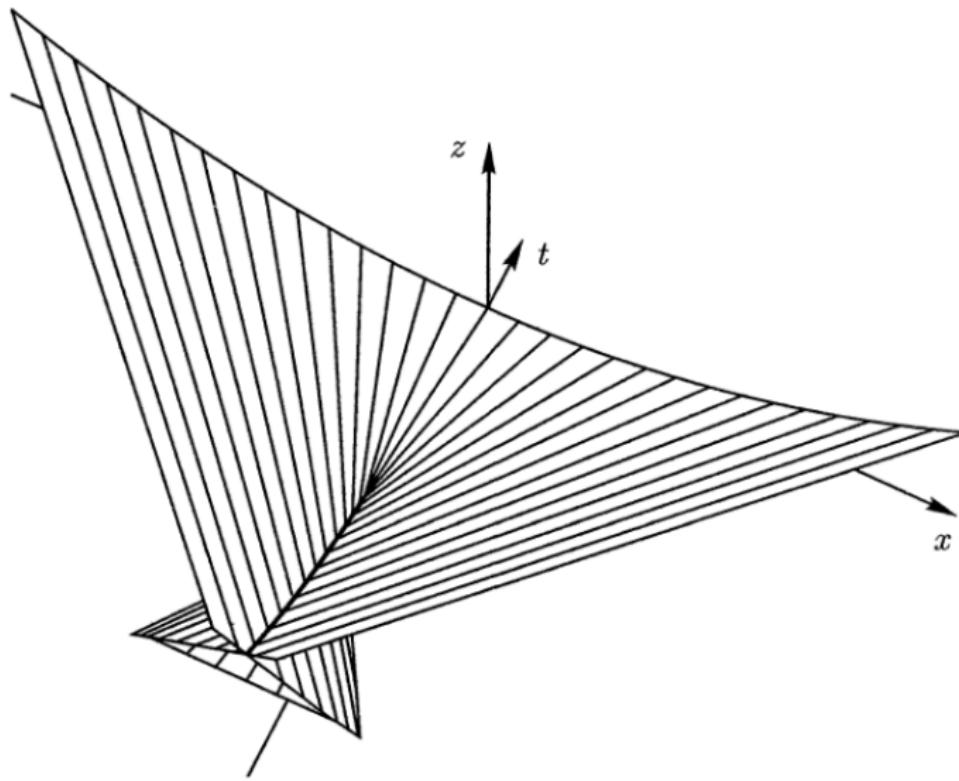
## Классические результаты

Обобщенные решения уравнения Гамильтона—Якоби

Определения минимаксного решения

Обобщение классического метода Коши.

Литература



## Предположения

Н.1 функция  $\sigma(x)$  непрерывна и локально ограничена,

Н.2 гамильтониан  $H(t, x, p)$  непрерывен при  
 $(t, x, p) \in \Pi \times \mathbb{R}^n$  и удовлетворяет оценке

$$\sup_{(t,x) \in \Pi_T} \frac{|H(t, x, 0)|}{(1 + \|x\|)} < \infty, \quad (10)$$

Н.3 гамильтониан  $H(t, x, p)$  удовлетворяет условию

Липшица по переменной  $p$ :

- при любых  $(t, x) \in \Pi_T, p', p'' \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x, p') - H(t, x, p'')| \leq \lambda(x) \|p' - p''\|, \quad (11)$$

где  $\lambda(x) := (1 + \|x\|)\mu, \mu > 0$  — постоянная.

# Предположение

Н.4 гамильтониан  $H(t, x, p)$  удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной  $x$ :

- при  $(t, x', x'', p) \in [0, T] \times B \times B \times \mathbb{R}^n$

$$\sup_{(t,x',x'',p)} \left\{ \frac{|H(t, x', p) - H(t, x'', p)|}{\|x' - x''\|(1 + \|p\|)} \right\} < \infty, \quad (12)$$

где  $B$  — произвольная ограниченная область  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

# Характеристический комплекс

Пусть  $S$  — непустое множество и  $M$  — многозначное отображение  $\Pi_T \times S \ni (t, x, s) \mapsto M(t, x, s) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

## Определение 1

Пару  $(S, M)$  будем называть *характеристическим комплексом*, если выполнены условия

1°. Для любых  $(t, x) \in \Pi_T$  и  $s \in S$  множество  $M(t, x, s) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  непусто, выпукло и компактно. Для любых  $(t, x, s) \in \Pi_T \times S$  и  $(f, g) \in M(t, x, s)$  справедливо

$$\|f\| \leq \lambda(x), \quad |g| \leq m(t, s)(1 + \|x\|).$$

Функция  $t \mapsto m(t, s)$  суммируема на  $[0, T]$ ,  $\forall s \in S$ , отображение  $(t, x) \mapsto M(t, x, s)$  полунепрерывно сверху.

# Характеристический комплекс

## Продолжение определения

2°а. Для любых  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  и  $p \in \mathbb{R}^n$  справедливо равенство

$$\max_{s \in S} \min_{(f,g) \in M(t,x,s)} [\langle f, p \rangle - g] = H(t, x, p).$$

2°б. Для любых  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  и  $p \in \mathbb{R}^n$  справедливо равенство

$$\min_{s \in S} \max_{(f,g) \in M(t,x,s)} [\langle f, p \rangle - g] = H(t, x, p).$$

Совокупность комплексов  $(S, M)$  обозначим символом  $\mathcal{C}(H)$ .

# Примеры характеристических комплексов

Пример 2.

Указанным условиям удовлетворяет пара  $(S, M)$ , где

$$S = \mathbb{R}^n,$$

и при всех  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \in \Pi_T$ :

$$M(t, x, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \lambda(x), g = \langle f, s \rangle - H(t, x, s)\}.$$

Здесь  $\lambda(x) = (1 + \|x\|)\mu$  — константа Липшица из предположения (11).

# Примеры характеристических комплексов

Пример 3. Для линейного уравнения

$$\langle f(t, x), Du(t, x) \rangle - g(t, x) = 0.$$

Функции  $f, g$  локально липшицевые.

Тогда характеристический комплекс имеет вид

$$M(x, s) = \{(f(t, x), g(t, x))\}$$

# Обобщенные характеристики

Выберем произвольно комплекс  $(S, M) \in \mathcal{C}(H)$  и  $s \in S$ .

Символом  $\text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$  обозначим множество  
абсолютно непрерывных функций

$$(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

удовлетворяющих условию  $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$  и  
дифференциальному включению

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in M(t, x(t), s), \quad t \in [t_0, T]. \quad (13)$$

Дифференциальное включение (13) называется  
характеристическим, а его решения называются  
обобщенными характеристиками.

# Минимаксное решение

## Определение 2

*Минимаксным решением* задачи (1),(2) называется непрерывная функция  $u(\cdot, \cdot) : \Pi_T \mapsto \mathbb{R}$ , удовлетворяющая краевому условию Коши (2) и следующим соотношениям:

- для любой начальной точки  $(t_0, x_0, z_0) \in gru$ , любого параметра  $s \in S$  и любого момента времени  $\tau \in [t_0, T]$  найдется траектория

$$(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$$

такая, что  $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in gru$ . Здесь  $gru$  – график функции  $u(\cdot, \cdot)$ .

# Верхние и нижние характеристические комплексы

## Определение 3

Пару  $(S_+, M_+)$  будем называть *верхним характеристическим комплексом*, если выполнены требования 1° и 2°а.

Пару  $(S_-, M_-)$  будем называть *нижним характеристическим комплексом*, если выполнены указанные выше требования 1° и 2°б.

# Обозначения

Символом  $\text{Sol}_+(t_0, x_0, z_0, s_+)$  обозначим множество абсолютно непрерывных функций

$$(x^+(\cdot), z^+(\cdot)) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

удовлетворяющих условию  $(x^+(t_0), z^+(t_0)) = (x_0, z_0)$  и дифференциальному включению

$$(\dot{x}^+(t), \dot{z}^+(t)) \in M_+(t, x(t), s_+), \quad t \in [t_0, T], \quad (14)$$

где  $s_+ \in S_+$ ,  $(S_+, M_+)$  — верхний характеристический комплекс.

Аналогично определим множество  $\text{Sol}_-(t_0, x_0, z_0, s_-)$ .

# Верхнее решение

## Определение 4

*Верхним решением* задачи (1),(2) называется полунепрерывная снизу функция  $\Pi_T \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющая следующим условиям:

(i) для любых  $(t_0, x_0, z_0^+) \in \text{epi } u$ ,  $s_+ \in S_+$  и  $\tau \in [t_0, T]$  существует траектория

$$(x^+(\cdot), z^+(\cdot)) \in \text{Sol}_+(t_0, x_0, z_0^+, s_+)$$

такая, что  $(\tau, x^+(\tau), z^+(\tau)) \in \text{epi } u$ ;

(ii)  $u(T, x) \geq \sigma(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ .

# Нижнее решение

## Определение 5

*Нижним решением* задачи (1),(2) называется полуунепрерывная сверху функция

$[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющая следующим условиям :

(j) для любых  $(t_0, x_0, z_0^-) \in \text{hypo } u$ ,  $s_- \in S_-$  и  $\tau \in (t_0, T)$  существует траектория

$$(x^-(\cdot), z^-(\cdot)) \in \text{Sol}_-(t_0, x_0, z_0^-, s_-)$$

такая, что  $(\tau, x^-(\tau), z^-(\tau)) \in \text{hypo } u$ ;

(jj)  $u(T, x) \leq \sigma(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ .

# Минимаксное решение

## Определение 6

*Минимаксным решением* задачи (1), (2) называется непрерывная функция  $\Pi_T \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ , которая одновременно является верхним и нижним решением задачи (1), (2).

# Эквивалентность определений

## Утверждение 1

Если условия  $H.1-H.4$  выполняются, то определение 2 и определение 6 минимаксного решения задачи Коши (1),(2) эквивалентны.

# Теорема существования и единственности минимаксного решения

## Теорема 1

Если условия  $H.1-H.4$  выполняются, то в задаче Коши (1),(2) существует единственная непрерывная функция  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющая определению 21 минимаксного решения.

## Предположения

*B1* Функция  $H(t, x, s)$  непрерывна по всем переменным в  $\Pi_T \times \mathbb{R}^n$  и вогнута по  $s$ ;

*B2* В области  $\Pi_T \times \mathbb{R}^n$  существуют

$D_x H(t, x, s), D_s H(t, x, s)$ , которые удовлетворяют условию Липшица по  $x, s$  с константой  $L > 0$ :

$$\|D_s H(t, x_1, s_1) - D_s H(t, x_2, s_2)\| \leq L(\|x_1 - x_2\| + \|s_1 - s_2\|),$$

$$\|D_x H(t, x_1, s_1) - D_x H(t, x_2, s_2)\| \leq L(\|x_1 - x_2\| + \|s_1 - s_2\|),$$

и условиям подлинейного роста с константами  $\rho > 0$ ,  $\Lambda(M) > 0$ , где  $M$  — компакт:

$$\|D_s H(t, x, s)\| \leq \rho(1 + \|x\|), \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \in \Pi_T;$$

$$\|D_x H(t, x, s)\| \leq \Lambda(M)(1 + \|s\|), \quad \forall (t, x) \in M \subset \Pi_T;$$

## Предположения

В3 Функция  $\sigma(x)$  непрерывно дифференцируемая в  $\mathbb{R}^n$ , а ее градиент  $\nabla\sigma$  локально липшицева функция:

$$|\nabla\sigma(x_1) - \nabla\sigma(x_2)| \leq L_\sigma(P)\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in P,$$

$P$  ограничено в  $\mathbb{R}^n$ .

# Характеристическая система

$$\dot{\tilde{x}} = D_{\tilde{s}} H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \quad \dot{\tilde{s}} = -D_{\tilde{x}} H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \quad (15)$$

$$\dot{\tilde{z}} = \langle D_{\tilde{s}} H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \tilde{s} \rangle - H(t, \tilde{x}, \tilde{s})$$

с краевым условием

$$\tilde{x}(T, \xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T, \xi) = \nabla \sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T, \xi) = \sigma(\xi). \quad (16)$$

Здесь  $\xi \in \mathbb{R}^n$  — параметр,  $D_{\tilde{s}} H = \left( \frac{\partial H}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial s_n} \right)$ ,  
 $D_{\tilde{x}} H = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$ .

# Репрезентативная формула

## Теорема 2

Если выполнены предположения  $B1-B3$ , то минимаксное решение задачи (1), (2) существует единственно и имеет вид

$$\tilde{u}(t, x) = \min_{\xi \in \mathbb{R}^n} \tilde{z}(t, \xi) : \tilde{x}(t, \xi) = x, \quad (17)$$

где  $\tilde{x}(t, \xi), \tilde{z}(t, \xi)$  — решения характеристической системы (15), (16).

# Супердифференциал функции

## Определение 7

Множество  $\partial^+ u(t, x) \in R^{n+1}$  называется супердифференциалом функции  $u(\cdot, \cdot) : \Pi_T \rightarrow R$  в точке  $(t, x) \in (0, T) \times R^n$  если, для любого  $\varepsilon > 0$  выполнены соотношения

$$\partial^+ u(t, x) = \{(\alpha, p) \in R^{n+1} : \quad \forall |\delta t| + \|\delta x\| \leq \varepsilon,$$

$$u(t + \delta t, x + \delta x) - u(t, x) \leq \alpha \delta t + \langle p, \delta x \rangle + o(|\delta t| + |\delta x|)\},$$

где  $o(|\delta t| + \|\delta x\|)/(|\delta t| + \|\delta x\|) \rightarrow 0$ , при  $|\delta t| + \|\delta x\| \rightarrow 0$ .

# Свойства минимаксного решения

## Теорема 3

Если в задаче (1), (2) выполнены условия  $B1-B3$ , то минимаксное решение является функцией локально липшицевой и супердифференцируемой, т.е.  
 $\partial^+ u(t, x) \neq \emptyset$ , причем

$$\partial^+ u(t, x) = \text{co } \{(-H(t, \tilde{x}(t, \xi), \tilde{s}(t, \xi)), \tilde{s}(t, \xi)) :$$

$$\tilde{x}(t, \xi) = x, \quad \tilde{s}(t, \xi) = u(t, x)\}.$$

# Инвариантность графика минимаксного решения относительно классических характеристик

## Теорема 4

Если в задаче (1), (2) выполнены условия  $B1-B3$ , то локально липшицевая, супердифференцируемая функция  $\varphi : \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}$  совпадает с минимаксным решением этой задачи тогда и только тогда, когда ее график слабо инвариантен относительно характеристик (15), (16), т. е.

$$\forall (t, x) \in \Pi_T, \quad \exists \xi : \tilde{x}(t, \xi) = x,$$

$$\tilde{z}(\tau, \xi) = \varphi(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)), \quad \forall \tau \in [t, T].$$

# Пример 4

Задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} x_2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 = 0, \quad u(T, x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Характеристическая система

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} = \tilde{x}_2, & \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = -\frac{\tilde{p}_2}{2}, \\ \frac{d\tilde{p}_1}{dt} = 0, & \frac{d\tilde{p}_2}{dt} = -\tilde{p}_1, \quad \frac{d\tilde{z}}{dt} = -\frac{\tilde{p}_2^2}{4}. \end{cases}$$

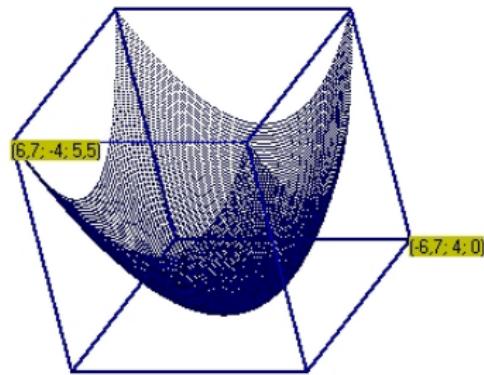
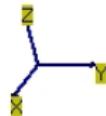
Границные условия

$$\tilde{x}_1(T, y) = y_1, \quad \tilde{x}_2(T, y) = y_2,$$

$$\tilde{p}_1(T, y) = y_1, \quad \tilde{p}_2(T, y) = y_2, \quad \tilde{z}(T, y) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}.$$

# Пример 2

t=2



# ЛИТЕРАТУРА |



Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.



Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Изд. 1-е. Эдиториал УРСС, 2004.



Красовский Н.Н. Теория управления движением. М: Наука, 1968.



Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974.



Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.



Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.



Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.



Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.



Subbotin A.I. Generalized Solutions of the First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspectives. Boston : Birkhauser, 1995.



Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Метод характеристик для уравнения Гамильтон-Якоби-Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.

# ЛИТЕРАТУРА II



Crandall M., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. // Trans. Amer. Math. Soc., 1983. Vol. 277, P. 1–42.



Олейник О.А. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями. Труды Московского математического общества. 1956. Т.5. С.433-454.



Кружков С.Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. Мат. сборник. 1966. Т.70(112), № 3. С. 394-415.



Субботина Н.Н., Колпакова Е.А. О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в терминах классических характеристик.// Труды Института математики и механики УрО РАН, 2009. Т.15. № 3. С.202 - 218.



Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б. Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Труды. Матем. Института им. Стеклова РАН, 2010, Т.271, С.259-277.