

КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПАКТНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ

1. Используемые понятия и определения

Объектом исследования является динамическая система (X, π) , где X – метрическое пространство, $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ – фазовое отображение, удовлетворяющее трем аксиомам:

$$(I) \pi(x, 0) = x \quad \forall x \in X;$$

$$(II) \pi(\pi(x, t), \tau) = \pi(x, t + \tau) \quad \forall x \in X \text{ и } \forall (t, \tau) \in \mathbb{R};$$

(III) π – непрерывно.

Предметом изучения проблемы является компактное инвариантное множество M из X .
множество всех α - (ω -) предельных точек для M .

Определение 1. Пусть X локально компактно и M – компактное подмножество X . Тогда M называется:

устойчивым, если всякая окрестность M содержит ее положительно инвариантную окрестность;

слабо притягивающим, если множество $L^+(M) = \{x \in X: L^+(x) \cap M \neq \emptyset\}$ является окрестностью M ;

притягивающим, если множество $A(M) = \{x \in X: L^+(x) \neq \emptyset \text{ и } L^+(x) \subset M\}$ является окрестностью M ;

асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее.

область слабого притяжения M ,

$A(M)$ – *областью притяжения M .*

Определение 2. Множество M из X называется *псевдоустойчивым*, если

$$(\forall x \notin M)(\forall t \in \mathbb{R})(\exists \delta = \delta(x, t) > 0): x \notin B(t, \delta).$$

Определение 3. Компактное инвариантное множество M называется *слабо эллиптическим*, если существует окрестность U для M такая, что:

$$L^+(x) \neq \emptyset \text{ и } L^-(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in U.$$

Положим для M :

множество эллиптических точек;

множество слабо эллиптических точек.

2. Сводка некоторых результатов по качественной теории устойчивости движения динамических систем

- [1957/1960] – *Р.Э. Виноград, Н.А. Antosiewicz, В.Р. Mendelson*:
– примеры неустойчивых аттракторов.
- [1953/1959] – *Т. Ура*: – теория пролонгаций + критерий устойчивости.
- [1957] – *В.И. Зубов*: – критерий асимптотической устойчивости
+ критерий устойчивости.
- [1964] *Ж. Аусландер, Н. Бхатия, П. Сейберт*: – структура окрестности
притягивающих множеств.
- [1968] *Н.Н. Ладис*: решение задачи В.В. Немыцкого.
- [1968] *М.С. Изман*: критерий асимптотической устойчивости.
- [1970] *Н. Бхатия*: структура окрестности слабо притягивающих множеств,
типы траекторий в окрестности инвариантных множеств
(попытка классификации).
- [1983] – *Б.С. Калитин*: псевдоустойчивость и классификация
замкнутых инвариантных множеств.
- [1984] – *Б.С. Калитин*: *В*-устойчивость.
- [1987] – *Б.С. Калитин*: классификация компактных инвариантных множеств.
- [1988] – *Б.С. Калитин*: структура окрестности компактных
слабо притягивающих множеств.
- [1993] – *А.Ф. Филиппов*: классификация компактных инвариантных множеств.
- [1996] – *Б.С. Калитин*: псевдопродолонгация,
критерий псевдоустойчивости.
- [1998] – *Б.С. Калитин*: структура окрестности компактных
притягивающих множеств.
- [2002] – *Б.С. Калитин*: критерии асимптотической устойчивости,
решение обобщенной задачи В.В. Немыцкого.
- [2005] – *Б.С. Калитин*: структура окрестности
устойчивых компактных инвариантных множеств,
классификация.

3. Задача В.В. Немыцкого:

при каких условиях в динамической системе (X, π) , существуют эллиптические точки ?

Обобщенная задача В.В. Немыцкого:

при каких условиях в динамической системе (X, π) , существуют компактные инвариантные множества слабо эллиптического типа?

Теорема 1. В связном локально компактном, но некомпактном метрическом пространстве X не существует компактных инвариантных множеств слабо эллиптического типа.

4. Классификация

Предлагается классификация компактных связных инвариантных множеств с точки зрения их устойчивоподобных свойств. Классы множеств *устойчивых, притягивающих и псевдоустойчивых* назовем основными. Согласно исследованиям эти классы попарно не идентичны.

$\mathbf{K}$ множество всех связных компактных инвариантных подмножеств X .

Всякий представитель из $\mathbf{K}$ может одновременно принадлежать нескольким основным классам. Интерес представляет разбиение множества $\mathbf{K}$ на подмножества (составляющие классы), которые удовлетворяют следующим условиям:

- а) каждый из составляющих классов не пуст;
- б) составляющие классы попарно не пересекаются;
- в) объединение всего множества составляющих классов дает $\mathbf{K}$.

Сокращения ($t \rightarrow \pm\infty$): $Y^\pm$ – устойчивость, $PU^\pm$ – псевдоустойчивость, $PR^\pm$ – притяжение.

Теорема 2 [1987]. *Множества*

$$\begin{aligned}
 &= PR^\pm \cap PU^\pm, \\
 &= Y^\pm \cap (\mathbf{K} \setminus PR^\pm) \cap (\mathbf{K} \setminus PU), \\
 &= Y^\pm \cap PU \cap (\mathbf{K} \setminus Y), \\
 &= Y^+ \cap Y^-, \\
 &= (PR^\pm \setminus PU^\pm) \cap (\mathbf{K} \setminus PR), \\
 &= PR^+ \cap PR^-, \\
 &= (\mathbf{K} \setminus Y^+) \cap (\mathbf{K} \setminus Y^-) \cap (PU^+ \cap PU^-), \\
 &= (\mathbf{K} \setminus Y^\pm) \cap (\mathbf{K} \setminus PU) \cap PU^\pm, \\
 &= (\mathbf{K} \setminus PU^+) \cap (\mathbf{K} \setminus PU^-)
 \end{aligned}$$

являются составляющими классами множества $\mathbf{K}$.

Основные классы можно представить следующим образом:

$$Y^\pm = \cup \cup \cup, \quad PR^\pm = \cup \cup, \quad PU^\pm = \mathbf{K} \setminus (\cup \cup).$$

В статье

Филиппов А.Ф. Классификация компактных инвариантных множеств динамических систем // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т. 57. № 6. С. 130–140.

дается детализация задачи о классификации компактных инвариантных множеств в теореме 2, где приведено 14 классов, с помощью учета свойств слабого притяжения и изолированности.

Филиппов А.Ф. использует понятие изолированности в следующем смысле.

Определение 4. Замкнутое инвариантное множество M называется *изолированным* (соответственно *изолированным от траекторий*), если у него существует такая окрестность V , что в $V \setminus M$ нет замкнутых инвариантных множеств (соответственно целых траекторий).

Показано, что, вообще говоря, справедливо соотношение только в одну сторону:

изолированность от траекторий $\Rightarrow$ изолированность.

Классификация А.Ф. Филиппова:

с использованием свойства (изолированность) 20 классов,

с учетом свойства (изолированность от траекторий) – 29 классов.

В работе обосновывается не пустота каждого из классов, проведены глубокие исследования проблемы взаимодействия различных устойчиво подобных свойств компактных инвариантных множеств.

Наряду с оригинальными результатами относительно устойчиво подобных свойств приведена изящная теорема качественной теории динамических систем.

Теорема 3. Если компактное инвариантное множество M слабо притягивающее, то:

- а) множество компактно;
- б) существует компактная положительно инвариантная окрестность множества M .

Показано на примере, что при одновременной замене свойства *слабо притягивающее* на *притягивающее* и множества на теорема 3 неверна.

Статья А.Ф. Филиппова наполнена многообразием содержательных результатов, и одновременно с этим подчеркивает важность и актуальность задач качественной теории устойчивости движения динамических систем.

Классификация устойчивых компактных инвариантных множеств

Теорема 3. Пусть M – неасимптотически устойчивое связное компактное инвариантное подмножество X . Тогда существует замкнутое связное инвариантное подмножество $D(M)$ из X , содержащее M в качестве своего собственного подмножества, относительно которого M является двусторонне устойчивым множеством.

() класс всех неасимптотически устойчивых компактных инвариантных множеств динамических систем, обладающих неубывающим сектором притяжения (соответственно убывающим сектором притяжения).

Обозначим символом множество всех асимптотически устойчивых связных компактных инвариантных подмножеств динамических систем.

Определим следующие классы устойчивых компактных инвариантных множеств.

Определение 3.13. Пусть M связно, неасимптотически устойчиво и $D(M)$ означает замкнутое инвариантное подмножество X , содержащее M в качестве своего собственного подмножества, относительно которого M двусторонне устойчиво. Будем говорить, что M является:

D -устойчивым, если $D(M)$ определяет окрестность M ;

DS -устойчивым, если M обладает непустым сектором притяжения S^+ и объединение определяет окрестность M ;

DU -устойчивым, если M не имеет сектора притяжения и $D(M)$ не определяет окрестность M ;

DUS -устойчивым, если M имеет непустой сектор притяжения, но множество не определяет окрестность M .

Согласно этому определению введем в рассмотрение классы , , , всех компактных связных инвариантных множеств динамических систем, обладающих соответствующими свойствами устойчивости.

Классификацией первого уровня назовем разбиение множества всех устойчивых связных компактных инвариантных подмножеств системы (X, π) на пять следующих классов

(i) ,

(ii) ,

(iii) ,

(iv) ,

(v) .

По построению эти классы не пересекаются, а их объединение дает все множество . Таким образом, предлагаемое разделение на классы определяет классификацию

множества всех устойчивых компактных инвариантных подмножеств динамических систем.

Классификацией второго уровня назовем разбиение классов (I)–(V) на составляющие их подклассы. В соответствии с только что изложенным это можно сделать следующим образом.

Составляющими подклассами назовем следующие множества

$$= \setminus, =, = \setminus(), = \setminus.$$

Кроме того, обозначим символами

$$=, =, =$$

составляющие классы множества всех компактных инвариантных подмножеств, обладающих различными типами секторов притяжения (см. п. 3).

Разобьем классы первого уровня (II), (III), (IV), (V) на составляющие подклассы в зависимости от того, каким из типов α , β и γ , является присущее им свойство двусторонней устойчивости.

Разобьем также классы α и β на подклассы α_1 , α_2 и β_1 , β_2 в зависимости от типов секторов притяжения.

В результате такого разбиения классов первого уровня на подклассы мы получим, как нетрудно сосчитать, всего $1 + (2 \times 3 + 2) \times 15 = 121$ класс различных типов устойчивых компактных связных инвариантных подмножеств локально компактных динамических систем.

Имеющаяся практика построения примеров динамических систем с устойчивым компактным инвариантным множеством того или иного типа позволяет быть уверенным в том, что представленные классы не являются пустыми. Здесь мы покажем только то, что каждый из классов первого уровня не пуст и укажем примеры некоторых подклассов второго уровня. С этой целью обратимся к одному из простых иллюстрирующих примеров.

Пусть вещественные части всех корней характеристического уравнения линейной конечномерной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, неположительны и, кроме того, кратным числам с нулевой вещественной частью соответствуют простые элементарные делители. Тогда точка покоя $x = 0$, как компактное инвариантное множество этой системы, принадлежит классу α , если вещественные части всех ее характеристических чисел равны нулю, и она принадлежит классу β , если хотя бы один из корней имеет отрицательную вещественную часть и хотя бы один из корней имеет нулевую вещественную часть.

Таким образом, для конечномерных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами начало координат может принадлежать только одному из следующих трех типов первого уровня: α , β , γ . При этом, учитывая свойства решений линейных систем, свойство двусторонней устойчивости точки покоя $x = 0$ может быть лишь подкласса α . Сектор притяжения (если он существует) может быть только подкласса β .

В примере 3.12 (случаи А) и В)) множество M принадлежит классу , причем двусторонняя устойчивость имеет подкласс , а сектор притяжения может быть одним из трех подклассов , или .

Наконец, легко видеть, что для динамической системы, заданной дифференциальными уравнениями на плоскости точка покоя $M = \{(0, 0)\}$ неасимптотически устойчива, не имеет сектора притяжения и принадлежит классу . Двусторонняя же устойчивость имеет подкласс .

Таким образом, классы множеств , , , , не пусты, а значит, они действительно осуществляют классификацию интересующего нас множества .

Схема устойчивоподобных свойств инвариантных множеств на логической оси

Точки горизонтальной оси — представители классов компактных инвариантных множеств с определенными свойствами.

По вертикали отмечены устойчивоподобные свойства.