Содержание

1 Элементы теории случайных процессов

1.1 Винеровский процесс и его основные свойства

Определение 1.1 ***Случайным процессом*** *называется семейство случайных величин $\xi(t,\omega)$, зависящих от времени. Если рассматривать случайный процесс $\xi(t,\omega)$ для всех t при фиксированном ω,для всех $\omega\epsilon\Omega$ то мы получим множество "траекторий".*

Определение 1.2 *Случайный процесс называется* ***винеровским процессом*** *(математическим броуновским движением), если выполнены следующие условия:*

1. *Приращение $\Delta\xi(t) = \xi(t+\Delta t,\omega) - \xi(t,\omega)$ процесса $\xi(t,\omega)$ распределено с плотностью*

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta t} \cdot \exp(-\frac{x^2}{4\Delta t})}$$

   Заметим, что при этом $E(\Delta\xi) = 0$ и $D(\Delta\xi) = \sqrt{\Delta t}$.

2. *Если $(t_1, t_1 + \Delta t_1) \cap (t_2, t_2 + \delta t_2) = \emptyset$, тогда приращения $\Delta\xi(t_1) = \xi(t_1 + \Delta t_1, \omega) - \xi(t_1,\omega)$ и $\Delta\xi(t_2) = \xi(t_2 + \Delta t_2,\omega) - \xi(t_2,\omega)$ независимы,*

3. *Траектории процесса $\xi(t,\omega)$ непрерывны с вероятностью 1 (т.е почти для всех ω)*

Теорема 1.1 (Винера) *Винеровский процесс существует.*

Теорема 1.2 (Бореля) *Пусть в Ω имеется счетное число независимых событий A_n.Сформулируем событие $A = \{\omega : \omega$ принадлежит бесконечному числу событий$\}$, тогда:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{A_k\} < \infty \Leftrightarrow P\{A\} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{A_k\} = \infty \Leftrightarrow P\{A\} = 1$$

Теорема 1.3 *Пусть $w(t,\omega)$ - винеровский процесс, тогда*

$$P\{\nexists\{\lim_{t\to\infty}\frac{w(t,\omega)}{t}\}\} = 1$$

Доказательство.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{w(2^{-k+1},\omega) - w(2^{-k},\omega)}{2^{-k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{w(2^{-k+1},\omega)}{2^{-k}} - \lim_{k\to\infty}\frac{w(2^{-k},\omega)}{2^{-k}}$$

этот предел, если он существует, равен $w(0)$. Докажем, что предела не существует, для этого предположим противное. Пусть предел существует для множества ω с вероятностью 1. Тогда

$$P\{w(2^{-k+1},\omega) - w(2^{-k},\omega) > \sqrt{2^{-k}}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\sqrt{t}}^{\infty}\exp(\frac{-s^2}{2t})ds = p_0$$

$$\Rightarrow \text{ряд} \sum_{k=1}^{\infty} P\{A_k\} \text{ расходится}$$

$$\Rightarrow \frac{w(2^{-k+1},\omega) - w(2^{-k},\omega)}{2^{-k}} > \frac{1}{2^{-k}}$$

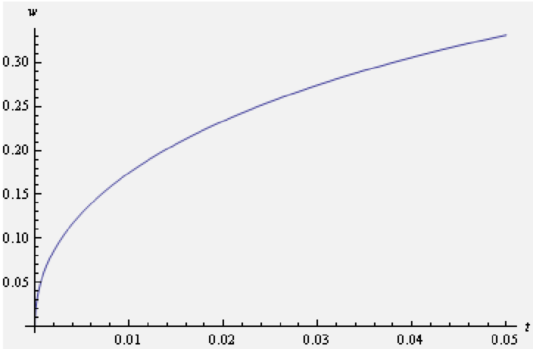

Рис. 1: $w = \sqrt{2t \ln\ln(\frac{1}{t})}$

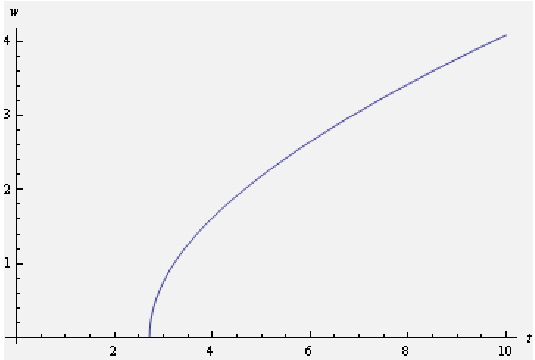

Рис. 2: $w = \sqrt{2t \ln\ln(t)}$

для бесконечно большого числа значений k и множества ω вероятностной меры 1. Следовательно, $w(0)$ не существует для ω меры равной 1.Таким образом, мы получили противоречие, и следовательно,

$$P\{\nexists\{\lim_{t\to\infty} \frac{w(t,\omega)}{t}\}\} = 1$$

■

Теорема 1.4 (закон повторного логарифма 1) *Пусть $w(t,\omega)$-винеровский процесс, тогда*

$$P\{\limsup_{t\to 0} \frac{w}{\sqrt{2t\ln\ln(\frac{1}{t})}} = 1\} = 1$$

и

$$P\{\liminf_{t\to 0} \frac{w}{\sqrt{2t\ln\ln(\frac{1}{t})}} = -1\} = 1$$

Теорема 1.5 (закон повторного логарифма 2) *Пусть $w(t,\omega)$-винеровский процесс, тогда*

$$P\{\lim_{t\to\infty} \sup \frac{w(t,\omega)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1\} = 1$$

и

$$P\{\lim_{t\to\infty} \inf \frac{w(t,\omega)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1\} = 1$$

Последние равенства показывают, что почти любая траектория винеровского процесса $w(t,\omega)$ задевает верхнюю и нижнюю кривые бесконечно много раз.

Доказательство. Теорема 1.4 следует из Теоремы 1.5.Значения винеровского процесса в целых точках $w(n)$ образуют случайное блуждание с распределением $N(0,1)$ - применяем закон повторного логарифма для случайного блуждания и следующую лемму (см. [1]):

Лемма 1.1

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\left|\frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} - \frac{w(|t|)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}\right| = 0\right\} = 1.$$

Доказательство. Из однородности винеровского процесса по времени и симметричности нормального распределения получаем:

$$P\left\{\sup_{n\le t\le n+1}\Big|w(t) - w(n)\Big| > x\right\} \le P\left\{\sup_{0\le t\le 1} w(t) > x\right\} + P\left\{\inf_{0\le t\le 1} w(t) < -x\right\} =$$

$$= 2P\left\{\sup_{0\le t\le 1} w(t) > x\right\} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} \exp^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \mathcal{O}\Big(exp^{-\frac{x^2}{2}}\Big).$$

Положим $A_n = \sup_{n\le t\le 1} |w(t) - w(n)| > \sqrt{2n}.P(A_n) = \mathcal{O}(\exp^{-n})$- ряд по n сходится.

$$P\left\{\sup_{t\ge N}\frac{|w(t)-w(|t|)|}{\sqrt{2t}} > 1\right\} = P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \to 0(N\to\infty).$$

■ ■

Из закона повторного логарифма следует, что траектории винеровского процесса $w(t)$ при $t\to 0$ осциллируют между кривыми $w = -\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}$ и $w = \sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}$

1.2 Условное математическое ожидание и его свойства

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$-вероятностное пространство и $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$- случайная величина, такая, что:

$E\|X\| < \infty$. Если $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$ есть σ-алгебра, то *условное математическое ожидание величины* X относительно $\mathcal{H}$, обозначаемое $E(X|\mathcal{H})$,определяется следующим образом.

Определение 1.3 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-вероятностное пространство, ξ-$\mathcal{A}$-измеримая функция (случайная величина),$\mathfrak{C}$-σ–подалгебра в $\mathcal{A}$. Тогда условным математическим ожиданием (УМО; обозначение: $M(\xi|\mathfrak{C})$) ξ относительно $\mathfrak{C}$ называется случайная величина $\widetilde{\xi}(\omega)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *$\widetilde{\xi}$ $\mathfrak{C}$-измерима,*
2. *для всех $C\in\mathfrak{C}$*

$$\int_C \xi dP = \int_C \widetilde{\xi} dP$$

.

Замечание. 1.1 *ξ не обязана быть $\mathfrak{C}$–измеримой (иначе определение тривиально: возьмём $\widetilde{\xi} = \xi$). УМО есть, так сказать "упрощение"исходной случайной величины, такое чтобы она стала измеримой относительно более "бедной"σ-алгебры*

Следующие два утверждения обосновывают корректность определения:

Утверждение. 1.1 *УМО случайной величины ξ существуют, если $M|\xi| < \infty$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай неотрицательной случайной величины ξ.

$Q(C) := \int_C \xi dP$ определяет меру на $(\Omega,\mathfrak{C})$,абсолютно непрерывную относительно меры P рассмотренной на $(\Omega,\mathfrak{C})$.По теореме Радона –Никодима существует $\mathfrak{C}$-измеримая функция $g(\omega)\ge 0$ такая, что $\int_\Omega g(\omega)dP = 1$ и $Q(C) = \int_C g(\omega)dP$ (g-производная Радона –Никодима). g по определению является вариантом УМО.

В случае знакопеременной ξ полагаем $\xi = \xi^+ - \xi^-(\xi^+$ и ξ^-неотрицательны) и берём в качестве варианта УМО $M(\xi^+|\mathfrak{C}) - M(\xi^-|\mathfrak{C})$ ■

Утверждение. 1.2 *УМО определено однозначно почти наверное.*

Доказательство. От противного: пусть g_1, g_2 - два варианта УМО $M(\xi|\mathfrak{C})$. Пусть также $C = \{\omega|g_1(\omega)\ne g_2(\omega)\}, P(C) > 0$. Имеем, что $C = C_<\cup C_>$, где $C_* = \{\omega|g_1(\omega)*g_2(\omega)\}, *\in\{<,>\}$. Хотя бы одно из множеств $C_<$ и $C_>$ имеет положительную меру (иначе P(C)=0); без ограничения общности считаем $P(C_<) > 0$. g_1 и g_2 измеримы, поэтому $D = C_<\in\mathfrak{C}$. Тогда по определению варианта УМО

$$\int_D g_1 dP = \int_D \xi dP = \int_D g_2 dP,$$

что противоречит тому, что $g_1 < g_2$ всюду на D и $P(D) > 0$. ■

Поэтому УМО можно считать однозначно определённым с точностью до множеств P-меры нуль.

Определение 1.4 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$- вероятностное пространство, $\mathfrak{C}$- σ- подалгебра в $\mathcal{A}, A \in \mathcal{A}$. Тогда условная вероятность A относительно $\mathfrak{C}$ определяется так: $Pf(A|\mathfrak{C}) = M(I_A|\mathfrak{C})$, где I_A- характеристическая функция A.*

Определение 1.5 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$- вероятностное пространство, ξ и η- случайные величины, $\mathfrak{C}_\eta-$ $\sigma-$ подалгебра в $\mathcal{A}$, порождённая η (т. е. прообразы всех борелевских множеств из $\mathbb{R}$). Тогда условным матожиданием ξ относительно η называется $M(\xi|\eta) = M(\xi|\mathfrak{C}_\eta)$.*

Перечислим основные свойства условного математического ожидания.

Определение 1.6 *Будем говорить, что ξ не зависит от σ- алгебры $\mathfrak{C}$, если для любого события $C \in \mathfrak{C}$ случайные величины ξ и I_C независимы.*

Обозначение: $\mathfrak{C}_o = \{\Omega, \emptyset\}$- тривиальная σ- алгебра.

Утверждение. 1.3 *1. Если $P(\xi = c) = 1$, то $M(\xi, \mathfrak{C}) = c$ п.н.*

2. Линейность: $M(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2|\mathfrak{C}) = \alpha_1 M(\xi_1|\mathfrak{C}) + \alpha_2 M(\xi_2|\mathfrak{C})$

3. Если $\xi \leq \eta$ п.н., то $M(\xi|\mathfrak{C}) \leq M(\eta|\mathfrak{C})$ п.н.

4. $|M(\xi|\mathfrak{C})| \leq M(|\xi||\mathfrak{C})$ п.н.

5. Пусть ξ не зависит от $\mathfrak{C}$, то $M(\xi|\mathfrak{C}) = M\xi$ п.н.

6. $M(\xi|\mathfrak{C}_0) = M\xi$

7. $M(\xi, \eta|\zeta) = \zeta \cdot M(\xi|\zeta)$, если ξ изменяется относительно $\mathfrak{C}$

8. $M(\xi) = MM(\xi|\mathfrak{C})$

Примеры.

1. Если $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$, то $M(\xi|\mathcal{F}) = \xi$,
2. Если $\mathcal{F}_\infty = \{\Omega, \emptyset\}$, то $M(\xi|\mathcal{F}) = M(\xi)$

Замечание. 1.2 *Для квадратично интегрируемых случайных величин условное математическое ожидание $M(\xi|\eta)$ можно рассматривать как проекцию случайной величины ξ на L_{F_η}-пространство случайных величин, измеримых относительно F_η. Обычное (безусловное) математическое ожидание в этом случае будет расстоянием от случайной величины ξ до пространства L_{F_η}.*

2 Теория стохастических дифференциальных уравнений

2.1 Стохастический интеграл Ито и стохастический дифференциал Ито

Поставим в соответствие винеровскому процессу $w_t = w(t, \omega)$ для каждого t σ- алгебру $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_(w_t), F \leq t$, получим растущую последовательность (поток) σ- алгебр. Назовём случайный процесс $\xi(t, \omega)$ *прогрессивно измеримым (неупреждающим)*, если для $\forall t$ он будет измеримым относительно $\mathcal{F}_t$. Мы хотим определить интеграл от случайного процесса $f(t, \omega)$ по винеровскому процессу w_t:

$$I(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \omega) dw_t$$

Однако, как мы увидим, не все случайные процессы интегрируемы по Ито в корректном математическом смысле. Интеграл же от прогрессивно-измеримого процесса удается корректно определить.

Сначала определим стохастический интеграл Ито для ступенчатых прогрессивно измеримых процессов $f_N(t,\omega)$, т.е. таких, которые на каждом интервале (t_i, t_{i+1}) являются постоянной случайной величиной, зависящей от ω:

$$I^N(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f_N(t,\omega)dw_t = \sum_{i=0}^{N-1} f_N(t_i,\omega)(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})$$

Замечание 2.1 *Важной особенностью определения интеграла Ито является то, что в интегральной сумме значение функции берется в точке начала отрезка,(т.е. в левом конце отрезка).*

Утверждение 2.1 (изометрия Ито) *Если $f_N(t,\omega)$ - ступенчатый прогрессивно измеримый относительно $\mathcal{F}_t$ случайный процесс, то:*

$$\|I^N(\omega)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|f_N(t,\omega)\|^2_{L_2(0,T)}$$

или

$$M(I^N(\omega)) = \int_{t_1}^{t_2} M(f_N^2(t,\omega))$$

Доказательство.

$$M(\sum_{i=0}^{N-1} f_N(t_i,\omega)(w_{t_i+1} - w_{t_i}))^2 = M(\sum_{i=0}^{N-1} f_N^2(t_i,\omega)(w_{t_i+1} - w_{t_i})^2) + 2M(\sum_{i<j} f_N(t_i,\omega)f_N(t_j,\omega)\cdot$$

$$\cdot(w_{t_i+1} - wt_i)(w_{t_j+1} - w_{t_j}))$$

$$M(f_N(t_i,\omega)f_N(t_j,\omega)(w_{t_i+1} - w_{t_i})(w_{t_j+1} - w_{t_j})) = M(M(f_N(t_i,\omega)f_N(t_j,\omega)(w_{t_i+1} - w_{t_i})(w_{t_j+1} - w_{t_j}))|\mathcal{F}_t) = 0$$

$$M(w_{t_j+1} - w_{t_j}) = M(w_{t_j+1} - w_{t_j}|\mathcal{F}_t) = 0,$$

в силу того, что $\mathcal{F}_{t_j}$ $\mathcal{F}_{w_{t_i+1}-w_{t_i}}$независимы. ■

Теорема 2.1 (Ито) $I^N(\omega) \xrightarrow[N\to\infty]{L_2(\omega)} I(\omega)$ *в среднем квадратичном.*

Доказательство. $\|I^N(\omega) - I^M(\omega)\|^2_{L_2(\omega)} =$

$$= \|I^N(\omega)\|^2_{L_2(\omega)} + \|I^M(\omega)\|^2_{L_2(\omega)} - 2(I^N(\omega), I^M(\omega))_{L_2(\omega)} =$$

$$= \|f_N(t,\omega)\|L_2(0,T)^2 + \|f_M(t,\omega)\|L_2(0,T)^2 - 2(f^N(\omega), f^M(\omega))_{L_2(\omega)} =$$

$$= \|f^N(\omega) - f^M(\omega)\|^2_{L_2(0,T)}$$

$$\text{при} N, M \to \infty$$

Таким образом, последовательность $I^(N)(\omega)$ также является фундаментальной и, следовательно, сходится. ■

Замечание 2.2 *Мы не утверждаем, поточечной сходимости для в $L_2(\Omega)$,т.е., что для каждого ω $I^N(\omega)$ будет сходиться к $I(\omega)$.*

Определение 2.1 *Пусть X- случайный процесс и существуют и два неупреждающих процесса μ и σ, для которых выполняется соотношение*

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s), \forall t \in [0,T].$$

Будем использовать более короткие обозначения, записывая наше интегральное соотношение в дифференциальном виде:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \tag{1}$$
$$X(0) = a. \tag{2}$$

В этом случае, будем говорить, что процесс X удовлетворяет дифференциальному уравнению Ито вида (1) и начальному условию (2).

Определение 2.2 *Случайный процесс $\xi(t,\omega)$ имеет стохастический дифференциал (производную), если существует пара случайных процессов $a(t,\omega)$ и $\sigma(t,\omega)$, таких что выполняются следующие свойства:*

1. $\xi(t+\Delta t,\omega) - \xi(t,\omega) = \sigma(t,\omega)(w_{t+\Delta t} - w_t) + o_1(\sqrt{\Delta t})$
2. $M(\xi(t+\Delta t,\omega) - \xi(t,\omega)|\mathcal{F}_{\sqcup}) = M(a(t,\omega)\Delta t|\mathcal{F}_{\sqcup}) + o_2(\Delta t)$*,где $\mathcal{F}_{\sqcup}$-σ- алгебра, порожденная винеровским процессом $w(t)$ до момента времени t_1.*

Замечание 2.3 *Мы имеем в виду, что некоторый случайный процесс $\eta(t,\omega)$ есть $o(\sqrt{\Delta t})$), если $M(\eta)/\sqrt{\Delta t}$ при $t \to 0$, а некоторый случайный процесс $\xi(t,\omega)$ есть $o(\sqrt{\Delta t})$, если, соответственно, $M(\xi)/\sqrt{\Delta t}$ при $t \to 0$.*

2.2 Формула Ньютона-Лейбница и Формула Ито

Теорема 2.2 (формула Ньютона-Лейбница) *Пусть процесс $\xi(t,\omega)$ имеет стохастический дифференциал $(a(t,\omega),\sigma(t,\omega))$, тогда:*

1. $M(\xi(t_2,\omega) - \xi(t_1,\omega)|\mathcal{F}_{t_1}) = M(\int_{t_1}^{t_2} a(t,\omega)dt|\mathcal{F}_{t_1}), \mathcal{F}_{t_1}$ *-σ- алгебра, порожденная винеровским процессом $w_(t_1)$.*
2. *Обозначим $\tilde{\xi}(t,\omega) = \xi(t,\omega) - \xi(t_1,\omega) - \int_{t_1}^{t_2} a(s,\omega)ds$, тогда*

$$\xi(t_2,\omega) = \xi(t_1,\omega) + \int_{t_1}^{t_2} a(s,\omega)ds + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(s,\omega)dw_s \text{ ,или } \tilde{\xi}(t,\omega) = \int_{t_1}^{t} \sigma(s,\omega)dw_s.$$

Доказательство.

1. Рассмотрим норму разности правой и левой части и докажем, что она равна нулю. Имеем

$$\|M(\xi(t_2,\omega) - \xi(t_1,\omega)|\mathcal{F}_{t_1})) - M(\int_{t_1}^{t_2} a(t,\omega)dt|\mathcal{F}_{t_1})\|_{L_{2(\Omega)}} \leq$$

[т.к. мы рассматриваем данные мат.ожидания в одной σ-алгебре, можем свести разность УМО к УМО разности, наш отрезок $[t_1,t_2]$ представить в виде суммы разбиений, интеграл по определению заменить рядом]

$$\leq \| \sum_{k=0}^{N-1} M(\xi(t_{k+1},\omega) - \xi(t_k,\omega) - a(t_k,\omega)\delta t_k|\mathcal{F}_{t_1})\|_{L_{2(\Omega)}} + \|M(\int_{t_1}^{t_2} a(t,\omega)dt - \sum_{k=0}^{N-1} a(t_k,\omega)\delta t_k|\mathcal{F}_{t_1})\|_{L_{2(\Omega)}}$$

Теперь рассмотрим и оценим каждый из полученных слагаемых: $M(\xi(t_{k+1},\omega) - \xi(t_k,\omega) - a(t_k,\omega)\delta t_k|\mathcal{F}_{t_1}$ [по свойству 5 УМО]$= M(M(\xi(t_{k+1},\omega) - \xi(t_k,\omega) - a(t_k,\omega)\delta t_k|\mathcal{F}_{t_1})|\mathcal{F}_{t_k})$[по определению стохастического дифференциала]$= M(\bar{\bar{o}}(\sqrt{\Delta t_k})|\mathcal{F}_{t_1}) \to 0$ Таким образом,

$$\|M(\xi(t_2,\omega) - \xi(t_1,\omega)|\mathcal{F}_{t_1}) - M(\int_{t_1}^{t_2} a(t,\omega)dt|\mathcal{F}_{t_1})\|_{L_{2(\Omega))}} \to 0, \text{ при } |\Delta t_k| \to 0$$

2. Так же как и для первого случая возьмем

$$\|\tilde{\xi}(t,\omega)-\int_{t_1}^{t}\sigma(s,\omega)dw_s\|^2_{L_{2\Omega}}=\lim_{N\to\infty}\|\tilde{\xi}(t,\omega)-\sum_{k=0}^{N-1}\sigma(t_k,\omega)\Delta w_k\|^2_{L_{2(\Omega)}}$$

При возведении в квадрат возникнут следующие члены:

(a) $M(\tilde{\xi}(t,\omega)-\sigma(t_k,\omega)\Delta w_k)^2=\bar{\bar{o}}(\Delta t_k)$ данное соотношение следует из определения стохастического дифференциала,

(b) $M(\Delta\tilde{\xi}(t_k,\omega)\tilde{\xi}(t_s,\omega))=M(M(\Delta\tilde{\xi}(t_{k_2}\omega)\tilde{\xi}(t_s,\omega)|\mathcal{F}_{t_s}))=$[т.к. $\xi(t_k,\omega)$ не зависит от $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}_{t_s}\Rightarrow$ можем вынести его]$=M(\Delta\tilde{\xi}(t_k,\omega)M(\Delta\tilde{\xi}(t_s,\omega)|\mathcal{F}_{t_s}))=$[из первого пункта мы знаем, что $M(\Delta\tilde{\xi}(t_s,\omega)|\mathcal{F}_{t_s})=0$]$=0$,

(c) $M(\Delta\tilde{\xi}(t_k,\omega)\sigma(t_s,\omega)w_s)=0$,

(d) $M(\sigma(t_s,\omega)\Delta w_s\sigma(t_k,\omega)\Delta w_k)=0$,
В качестве упражнения предлагаем доказать последние утверждения (a)-(d) самостоятельно.

■

Теорема 2.3 (формула Ито) *Пусть процесс $\xi(t,\omega)$ имеет стохастический дифференциал $(a(t,\omega),\sigma(t,\omega))$, тогда процесс $\phi(t,\xi(t,\omega))$, где $\phi(t,x)-$заданная гладкая функция, будет иметь следующий стохастический дифференциал:*

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\xi(t))+a(t,\omega)\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\xi(t))+\frac{1}{2}\sigma^2(t,\omega)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,\xi(t)),\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\xi(t))\sigma(t,\omega)dw_t\right)$$

Доказательство. Разложим функцию $\phi(t,x)$ в ряд Тейлора до второго порядка и воспользуемся свойствами приращений винеровского процесса, именно, следующей "таблицей умножения Ито":

$$(dt)^2=0, dtdw=0$$
$$(dw)^2=dt, i=1...d \tag{3}$$
$$dw_idw_j=0, i\neq j$$

. Воспроизведите детали доказательства самостоятельно. ■

Теорема 2.4 (другая форма записи формулы Ито) *Пусть $d\xi=a(t,\xi(t))dt+\sigma(t,\xi(t))dw_t,\xi(0)=x_0$ и пусть $\eta=\phi(t,\xi(t,\omega))$, где $\phi(t,x)-$заданная гладкая функция.*
Тогда:

$$d\eta=\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\xi(t))+a(t,\omega)\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\xi(t))+\frac{1}{2}\sigma^2(t,\omega)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,\xi(t))\sigma(t,\omega)dw_t,\ \eta(0)=\phi(0,\xi(0))$$

Доказательство. Эквивалентность формулировок следует из Формулы Ньютона-Лейбница и разложения Тейлора.

$$d\eta=\phi(t+\Delta t,\xi+d\xi)-\phi(t,\xi)=\frac{\partial\phi}{\partial t}dt+\frac{\partial\phi}{\partial x}d\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(dt)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(d\xi)^2+\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}dtd\xi+...=$$
$$=\frac{\partial\phi}{\partial t}dt+\frac{\partial\phi}{\partial x}(\xi dt+\sigma d\omega)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(dt)^2=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\xi dt+\sigma d\omega)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\sigma^2dt)=$$
$$=(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\sigma^2)dt+\frac{\partial\phi}{\partial x}\sigma d\omega$$

при проведении вычислений используем "таблицу умножения Ито"(см. (3)).

■

2.3 Уравнения Колмогорова

Определение 2.3 *Пусть $x \to P_t x-$ отображение за время t, сопоставим $f(x) \to f(P_t x)$, тогда*

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = (L_{\bar{v}f})(x),$$

будет называться генератором фазового потока.

Пусть дано стохастическое дифференциальное уравнение $d\xi = a(t,\xi)dt + \sigma(t,\xi)dw_t, \xi(0) = x$, тогда положим $P_t f(x) = M(\varphi(\xi_x(t,\omega)))$.При этом выполняется "полугрупповое"свойство $P_s(P_t f(x)) = P_{s+t} f(x)$. В этом случае $\frac{M(P_t f(x)) - f(x)}{t} \to a(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,\omega)\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)$ при $t \to 0$.

Теорема 2.5 (уравнение Колмогорова для моментов) *Пусть $u(t,x) = M(\varphi(\xi_x(t,\omega)))-$ момент, где $\varphi-$ некоторая гладкая функция, тогда $u'_t = L_x u, u|_{t=0} = \varphi(x)$, где оператор определен формулой:*

$$L_x = a(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,\omega)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Доказательство. Согласно интегральной формуле Ито

$$f(\xi_t) = f(x) + \int_0^t (L_{\bar{v}} f)(\xi_x(s,\omega))ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\sigma(s,\omega)dw_s$$

$$\Rightarrow \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = M\left(\int_0^t P_s(L_{\bar{v}} f)(x)ds + \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\sigma(s,\omega)dw_s\right)$$

При этом

$$M\left(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\sigma(s,\omega)dw_s\right) = 0.$$

Перейдем к пределу при $t \to 0$, тогда $\frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \to (L_{\bar{v}} f)(x)$ или $u'_t = L_x u$ при $t = 0$. Это верно и в любой другой момент времени t. (докажите!) ■

Задача. Вывести аналогичное уравнение $\varphi = \varphi(t,x)$ для случая фазового пространства.

Утверждение 2.2 *Пусть $p(s,x,t,y)-$ плотность вероятности перехода точки (s,x) в точку (t,y). Тогда справедливо равенство:*

$$p(s,x,t,y) = \int_a^b p(s,x,u,z)p(u,z,t,y)dz$$

*-**уравнение Колмогорова-Чепмена**.*

Теорема 2.6 (Колмогорова для переходных вероятностей) *Для переходных вероятностей имеют место следующие уравнения:*

1. *Обратное уравнение Колмогорова*

$$(\frac{\partial}{\partial t} - L_x)p(t,x,z,s) = 0,$$

где оператор

$$L_x = a(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,\omega)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

2. *Прямое уравнение Колмогорова*

$$(\frac{\partial}{\partial t} + L_z)p(t,x,s,z) = 0,$$

где оператор $L_x^* = \frac{\partial}{\partial z}(a(z)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma^2(z)-$ сопряженный оператор к L_x, т.е. такой, что $(L\varphi,\psi) = (\varphi, L^*\psi)$, для любых $\varphi,\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство.

1. $M(\varphi(\xi_t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t,x,s,z)\varphi(z) = u(t,x)$ тогда по теореме Колмогорова для моментов функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению:

$$u'_t = L_x u, u|_{t=0} = \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial}{\partial t} - L_x)p(t,x,s,z)\varphi(z)dz = 0$$

Так как это равенство выполняется для $\forall \varphi(z)$, то $(\frac{\partial}{\partial t} - L_x)p(t,x,s,z)\varphi(z) = 0$. В силу однородности по времени плотностей перехода $p(t,x,s,z) = p^*(t-s,x,z)$. В итоге получаем, что $(\frac{\partial}{\partial s} - L_x)p(t,x,s,z) = 0$.

2. Согласно уравнению Колмогорова-Чепмена

$$p(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x,u,z)p(u,z,t,y)dz.$$

Для произвольной функции $\varphi(y)$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x,t,y)\varphi(y)dy =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x,t+\Delta t,y)\varphi(y)dy - \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x,t,z)\varphi(z)dz\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x,t,z) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x,t+\Delta t,y)\varphi(y)dy - \varphi(z)\right) dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,x,t,z)L_z\varphi(z)dz = L^* p(s,x,t,z)\varphi(z)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_z^*\right) p(s,x,t,z)\varphi(z)dz = 0$$

Так как это равенство выполняется для $\forall \varphi(z)$, то $\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_z^*\right) p(s,x,t,z) = 0$

■

3 Принцип динамического программирования. Уравнения Беллмана (детерминированное и стохастическое)

3.1 Задача оптимального управления

Определение 3.1 *Рассмотрим динамическую систему, заданную следующей задачей Коши*

$$\dot{y} = f(t, y(t), u(t)),$$

$$y(0) = y_0,$$

где $u(t)$ - управление, $|u(t)| \leq 1$. Интегральным функционалом называется следующее выражение

$$\mathcal{F}(y(T)) = \int_0^T F(\tau, y(\tau), u(\tau))d\tau.$$

Задача состоит в том, что бы выбрать такое управление, что значение интегрального функционала достигало минимума (максимума). Таким образом, задача управления включает определения:

1. Динамической системы
2. Ограничения на функцию управления
3. Задачи минимизации (максимизации) функционала

Кроме того, иногда могут возникать ограничения (фазовые ограничения) на саму функцию y. Найти синтез означает определить управление $u(t, y)$, зависящее не только от времени t, но и от фазового состояния y. Найти программное управление означает предъявить управление $u(t)$, зависящее исключительно от времени t.

3.2 Уравнение Беллмана для детерминированной управляемой системы

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{cases} \int_s^T F(\tau, y(\tau), u(\tau))d\tau \to \min \\ \dot{y} = f(t, y(t), u(t)), |u(t)| = 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

При этом начальный момент времени s и начальное состояние y_0 фиксированы. Для заданных начальных значений (s, y_0) обозначим через $\mathcal{F}_{sy_0}$ класс кусочно - непрерывных управлений, определенных на некотором интервале $[s, T]$, которые являются допустимыми для начального состояния y_0.

Допустимость означает существование решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x, u(t))$, определенного на $[s, T]$ и удовлетворяющего условиям $x(s) = y_0$, $(T, x(T)) \in M$. Функция $\int_s^T F(\tau, y(\tau), u(\tau))$ определяет критерий оптимальности, рассматриваемая задача состоит в минимизации критерия на управлениях $u(t)$ из $\mathcal{F}_{sy_0}$.

Определение 3.2 *Функцией Беллмана называется следующая фунция:*

$$S(s, y_0) = \inf_{u \in \mathcal{F}_{sy}} \int_s^T F(\tau, y(\tau), u(\tau))d\tau.$$

Пусть наше управление неоптимально с начального момента s до момента t и оптимально с момента t до конечного момента . Тогда будет выполняться неравенство

$$\int_s^T F(\tau, y(\tau), u(\tau))d\tau + S(t, y(t)) \geq S(s, y_0).$$

Оно показывает, что если бы мы управляли оптимально с начального момента, то значение функции Беллмана было бы меньше, чем если бы оптимальное управление осуществлялось бы с момента $t \geq s$.

Разделив правую и левую части неравенства на $(t - s)$, получим

$$\frac{1}{t-s} \int_t^s F(\tau, y(\tau), u(\tau))d\tau \geq \frac{1}{t-s} \left(S(s, y_0) - S(t, y(t)) \right)$$

Воспользуемся тем, что $y(t) = y_0 + \Delta t f(s, y_0, u(t)) + o(\Delta t)$, тогда

$$\frac{1}{t-s} \int_t^s F(\tau, y(\tau), u(\tau))d\tau \geq \frac{1}{t-s} \left(S(s, y_0) - S(t, y_0 + \Delta t f(s, y_0, u(t))) \right).$$

Теперь перейдем к пределу при $t \to s$, тогда, считается, что $u(s) = v$, получим

$$F(s, y_0, v) \geq \frac{\partial S}{\partial t}(s, y_0) - (\nabla S(s, y_0), f(s, y_0, v)), \forall u$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(s, y_0) + (\nabla S(s, y_0), f(s, y_0, v) + F(s, y_0, v)) \geq 0.$$

Равенство достигается при оптимальном управлении с момента s. Рассмотрим следующую функцию от переменных $p = (p_1, p_2 \ldots p_n)$

$$G(p, s, y_0) = \min_{v \in U}(p, f(s, y_0, v)) + F(s, y_0, v).$$

Подставив в эту функцию, $p_i = \frac{\partial S}{\partial t}$; получим $\frac{\partial S}{\partial t} + G(\nabla S, s, y_0) = 0$.

Утверждение 3.1 (Уравнение Беллмана для функции $S(s, y)$)

$$\frac{\partial S}{\partial s}(s, y_0) + \min_{v \in U}(\nabla S(s, y_0), f(s, y_0, v)) + F(s, y_0, v) = 0.$$

Для этого уравнения еще имеет место терминальное условие S(T,y)=0. Для определения управления сначала решается уравнение Беллмана, а затем из условия

$$(\nabla S(s, y_0), f(s, y_0, v)) + F(s, y_0, v) = \min_{v \in U}(\nabla S(s, y_0), f(s, y_0, v)) + F(s, y_0, v)$$

находится оптимальное управление.

3.3 Уравнение Беллмана для стохастической управляемой системы

Теперь рассмотрим случай, когда управляемый диффузионный процесс задан стохастическим дифференциальным уравнением:

$$d\xi = f(\xi(t), u(t))dt + \sigma(\xi(t), u(t))d\omega,$$

$$\xi(0) = \xi_0.$$

Управление $u(t) = u(t, \xi(t))$ представляет собой ограниченный так называемый "марковский синтез а минимизируемый функционал имеет вид

$$J(s, y, u) = M\left(\int_s^T L(t, \xi(t), u(t))dt + \psi(\xi(T))\right),$$

где функция $\psi(\xi(T))$- заданный терминальный член, а $L(t, \xi(t), u(t))$- гладкая функция. (Возьмем, к примеру, управление портфелем, включающим n ценных бумаг, где цены удовлетворяют приведенному стохастическому дифференциальному уравнению. Нам нужно выбирать структуру портфеля в каждый момент времени таким образом, чтобы через время T математическое ожидание стоимости портфеля было максимально возможным. Доля i- той ценной бумаги в портфеле в каждый момент времени есть функция от цен на каждую ценную бумагу:

$$h_i = f_i(t, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n),$$

где ξ_i - цены на бумаги, представимые как случайные процессы. Функция Беллмана будет выглядеть следующим образом:

$$W(s, y) = \min_u J(s, y, u).$$

При этом, будем считать, во- первых, что функция определена, во- вторых, что она имеет непрерывные производные второго порядка по всем переменным, в-третьих, существует ограничение на управление. Можно поставить аналогичную предыдущему пункту задачу, начальным состоянием которой будет уже некоторая точка (s, y), а функция Беллман будет значением экстремума функционала как функция этой стартовой точки.

Определение 3.3 *Генератором процесса называется оператор вида:*

$$\mathbf{L^u} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^u_{i,j}(s,y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{k=1}^{n} f^u_k(s,y)\frac{\partial}{\partial y_k},$$

где коэффициенты $a^u_{i,j} = (\sigma\sigma^T)_{ij}$ зависят от управления.

При использовании неоптимального управлении с начального момента s до момента t и оптимальном управлении с момента t до конечного момента T получим неравенство:

$$W(s,y) \le M\int_s^t L(\tau,\xi(\tau),u(\tau))d\tau + MW(t,\xi(\tau)).$$

Можно заметить, что моменты удовлетворяют параболическому дифференциальному уравнению в частных производных. Поэтому, написав уравнение Колмогорова и проинтегрировав его по времени, получим следующее уравнение на функцию Беллмана:

$$W(s,y) = -M\int_s^t (W_s + \mathbf{L^u}W)d\tau + MW(t,\xi(\tau)).$$

(Поясним последнее равенство. Допустим, у нас есть дифференциальное уравнение

$$z_t = \mathbf{L}z,$$

где $z(t,x) = M(\varphi(\xi(t))$.Проинтегрировав его по времени, получаем:

$$z(t_2) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{L})ds.$$

Поскольку в качестве $\varphi(t)$ мы берем саму функцию Беллмана W, зависящую еще от переменной времени, под интегралом появляется W'_s. Теперь, вычитая из неравенства равенство, получим следующее неравенство:

$$0 \le M\int_s^t (W_s + \mathbf{L^u}W + L(\tau,\xi(\tau)),u(\tau))d\tau,$$

причем равенство достигается только при оптимальном управлении на отрезке [s,t]. Разделим получившееся неравенство на $(t-s)$.Тогда

$$0 \le \frac{1}{t-s}M\int_s^t (W_s + \mathbf{L^u}W + L(\tau,\xi(\tau)),u(\tau))d\tau$$

Теперь перейдем к пределу при $t \to s$, в результате получим:

$$0 \le W'_s(s,y) + \mathbf{L^u}W + L(s,y,u).$$

Равенство достигается только при оптимальном управлении. Следовательно,

$$W'_s(s,y) + \min_v (\mathbf{L^u}W + L(s,y,u)) = 0.$$

Снова рассмотрим функцию от переменных $p = (p_1, p_2 \dots p_n)$ и $q = (q_{ij})$

$$G(s,y,W,W'_y,W'_{yy}) = \min_u \Phi(s,p,q,u,y), \qquad (*)$$

где $\Phi(s,p,q,u,y) = W'_s(s,y) + \mathbf{L^u}W + L(s,y,u)$. Подставив $p_i = \frac{\partial W}{\partial y_i}$ и $q_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_j}$ получим уравнение Беллмана:

$$G(s,y,W,W'_y,W''_{yy}) = 0.$$

Терминальным условием для этого уравнения будет условие $W(T,y) = \Psi(y)$. Поскольку управление ограничено, т.е. лежит на компакте, то задача (*) разрешима, и минимум существует. Для решения этой задачи мы сначала двигаемся от конечной плоскости, заданной краевым условием, к начальной, находим функцию Беллмана W.Затем подставляем вместо p,q первых и матрицу вторых производных в точке (t,y) оптимальной функции W и, двигаясь в прямом направлении, находим искомое оптимальное управление.

4 Рынок вторичных ценных бумаг и инвестиционные портфели

4.1 Портфель Марковица

Пусть существуют N компаний, акции которых мы можем приобрести, и пусть ξ_i- случайная величина, реализации которой дают цены на i-ую ценную бумагу (ценную бумагу i-ой компании), а h_i- доля i-ой ценной бумаги в общем начальном капитале V_0. При этом естественно считать, что все $h_i \geq 0$ (если у нас нет заемных ценных бумаг) и $h_1 + \dots + h_N = 1$. Таким образом, множество ценных бумаг N компаний, в долях h_i соответственно, и образуют так называемый инвестиционный портфель. Пусть m_i- средняя доходность i-ой ценной бумаги , тогда:

$$V = \sum_{i=1}^{N} h_i \xi_i - \text{эффективность портфеля}$$

$$\sum_{i=1}^{N} h_i m_i - \text{средняя доходность портфеля}$$

$$D^2(V) = D^2(\sum_{i=1}^{N} h_i \xi_i) = M(\sum_{i=1}^{N} h_i(\xi_i - m_i))^2 - \text{риск портфеля}$$

В силу того, что различные отрасли промышленности зависимы друг от друга, скачки ценных бумаг также не являются независимыми.Пусть $Q_{ij} = M((\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j))$ - корреляция, тогда матрица $(Q_{ij}) = Q$ называется матрицей Марковица, а риск портфеля перепишется в виде:

$$D^2 = M\left(\sum_{i,j=1}^{N} h_i(\xi_i - m_i)\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{N} h_i h_j M\left((\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{N} h_i h_j Q_{ij}.$$

Наша цель- выбирать акции в различных долях таким образом, чтобы максимизировать доходность портфеля. Однако при этом рискованность портфеля может сильно возрасти, и поэтому сначала нам нужно установить порог риска d , который при управлении портфелем нам нельзя будет превышать. Таким образом, задачу можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{N} h_i m_i \to \max \\ h_1 + \dots + h_N = 1 \\ \sum_{i,j=1}^{N} h_i h_j Q_{ij} \leq d^2 \end{cases}$$

Эта задача и называется задачей Марковица, а ее решением будет набор оптимальных долей $h^* = (h_1^* \dots h_N^*)$. Если рассмотреть зависимость максимальной доходности портфеля $V^*(d) = \sum_{i=1}^{N} h_i^* m_i$ от выбираемого нами порога d, то ее график будет называться эффективным фронтом портфеля. Рассмотрим случай, когда портфель содержит безрисковую ценную бумагу (т.е. $D(\xi_0) = 0$) в доле h_0, тогда $\tilde{h} = (h_1 \dots h_N)$- параметры рисковой части портфеля, а V_0 и $\tilde{V}$ -соответствующие капиталы. Для такого портфеля верна следующая теорема:

Теорема 4.1 (Тобина о разделении) *Структура рисковой части портфеля $\tilde{h} = (h_1 \dots h_N)$ не зависит от порога d и зависит от доходности m_0 безрискового актива следующим образом: проведем из точки $(0, m_0)$ касательную к эффективному фронту рисковой части портфеля, тогда точка касания (m_0) будет соответствовать структуре $\tilde{h}$.*

4.2 Опционы и оценка их стоимости

Определение 4.1 *Опцион- вторичная ценная бумага, дающая ее держателю прав на выкуп в момент времени T акций по зафиксированной цене K, за которое в настоящий момент держатель платит стоимость C_0. Пусть S_t - случайная величина, реализации которой дают цену акций в момент t, тогда наша выгода от сделки будет определяться функцией выплат:*

$$F_T = (S_T - K)^+, \text{ где } (f)^+ = \max(f, 0)$$

Случайная величина называется балансом. Если считать, что число сделок очень большое, то может случиться, $M(F_T - C_0) = 0$, тогда в общем выгоды никто не получит. Поэтому, величину $C_0 = M(F_T)$ называют средней справедливой ценой опциона. Существуют следующие виды опционов:

Опцион европейского типа:

1. *Опцион call* $F_T = (S_T - K)^+$
2. *Опцион put* $F_T = (K - S_T)^+$
3. *Опцион коллар* $F_T = \min(\max(S_T, K_1), K_2)$
4. *Бостонский опцион* $F_T = \max(S_T - K_1) - (K_2 - K_1)$

Опцион азиатского типа:

1. $F_T = \left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_u du\right)^+, F_T = \left(S_T - \frac{1}{T}\int_0^T S_u du\right)^+$
2. $F_T = S_t - \min_{u \le T} S_u, F_T = \max_{u \le T} S_u - S_T,$

Теперь рассмотрим различные уравнения, моделирующие цену S_t на акции. В 1900 году Башелье предложил использовать следующее уравнение для цены:

$$S_t = S_0 + \sigma w_t,$$

где S_0- цена акции в начальный момент, w_t- броуновское движение. Величина σ характеризует величину скачков и называется волатильностью цены. Назовем среднесправедливой ценой такую цену опциона, что в среднем за большее количество сделок не выигрывает ни один из агентов. При этом формула для средней справедливой цены опциона будет следующей (докажите!):

$$C_0(T, K, S_0) = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

где $\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2}{2}\} -$ плотность стандартного распределения$\Phi(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(y)dy$. В 1965 году Самуэльсон предложил следующее стохастическое дифференциальное уравнение для цены акции:

$$\partial S_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t.$$

Решением уравнения Самуэльсона будет случайный процесс:

$$S_t = S_0 \exp\Big\{\mu t + \left(\sigma w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\Big\}$$

Его называют экономическим броуновским движением. Величина μ- тренд и характеризует величину общего подъема цены на акцию, а σ- волатильность, характеризующая величину скачков цены. К уравнению Самуэльсона нужно присоединить уравнение для банковского счета $dB_t = rB_t dt$, где r- банковская процентная ставка.

4.3 Уравнения Шоулса-Блейка

Рассмотрим задачу об оценке стоимости опциона call, считая, что цена акции моделируется следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dS_t = f(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dw_t,$$

а динамика ставки банковского кредита соответствует уравнению

$$dR_t = r(t)R_t dt.$$

Сделаем следующие предположения:

1. Рынок (S_t, R_t) безарбитражный, т.е. не существует такой сделки (арбитражной), с помощью которой можно из ничего и ничем не рискуя, получить прибыль.

2. Существует функция- оцениватель $V(t, x)$, такая, что стоимость опциона в момент t определяется как $V(t, S_t)$.

Теперь сформируем так называемый портфель Шоулса-Блейка П:

$$\Pi = V(t, S_t) - \delta S_t, \text{ где } \delta - \text{ некоторая величина, подлежащая определению.}$$

Тогда $\partial\Pi = (V'_t + L_x V - \delta f)dt + (V'_x\sigma - \delta\sigma)dw_t$,где оператор

$$L_x = f(t, x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Из уравнения видно, что при $\delta = V'_x$ изменение цены портфеля перестает быть случайным. Из условия безарбитражности следует, что $d\Pi = r(t)\Pi dt$.

Упражнение. Объясните, почему в противном случае возможна арбитражная сделка (т.е. когда уравнение $d\Pi = r(t)\Pi dt$ не выполнено). В итоге, получаем уравнение Шоулса-Блэйка для функции оценивателя:

$$V'_t + L_x V - V'_x(t, x) = r(t)(V - V'_x) \text{ с терминальным условием } V(T, x) = (x - K)^+.$$

Рассмотрим частный случай, когда $f(t, S_t) = \mu S_t$ и $\sigma(t, S_t) = \sigma_0 S_t$, тогда $L_x = \mu x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и уравнение Шоулса-Блэйка примет следующий вид:

$$V'_t + xV'_x + \frac{1}{2}\sigma_0^2 x^2 + V''_x - rV = 0, \; V(T, x) = (x - K)^+.$$

5 Хеджирование

5.1 Хеджирование и построение $\delta-$хеджирования

Одной из основных задач финансовой математики является задача определения так называемой страховой цены иска. В предыдущем параграфе мы расмотрели простейший рынок из одного актива и банковского счета. Рассмотрим теперь рынок активов, состоящий из n рисковых активов, т.е. акций, стоимостью $S_i(t, \omega)$ и безрискового актива S_0- денег на банковском счете. Они удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dS_0 = \rho s dt \\ dS_1 = S_1\mu_1(x)dt + S_1(\sigma_{11}(s)dw_1 + \cdots + \sigma_{1m}(s)dw_m) \\ \dots \\ dS_n = S_n\mu_n(x)dt + S_h(\sigma_{n1}(s)dw_1 + \cdots + \sigma_{nm}(s)dw_m) \end{cases}$$

Кроме того, на рынок воздействует ряд макрофакторов, влияющих на цены рыночных активов. Их поведение можно смоделировать следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dX_1 = f_1(x)dt + \lambda_{11}(s)dw_1 + \dots + \lambda_{1m}(s)dw_m \\ \dots \\ dX_k = f_k(x)dt + \lambda_{k1}(s)dw_1 + \dots + \lambda_{km}(s)dw_m \end{cases}$$

Мы считаем, что в момент времени T нам будет предъявлен иск, что означает, что мы должны выплатить сумму $F(S(T,\omega))$, причем F(y)-известная нам заданная непрерывная функция. С целью максимально обезопасить себя от больших выплат, мы выделяем в нулевой момент времени некоторое количество денег V_0 и вкладываем их в активы рынка. Наша задача состоит в том, чтобы, управляя далее этими вложениями, мы в момент времени t=T могли расплатиться только деньгами из нашего портфеля. При этом портфель называется ***самофинансирующимся***, если любое изменение величины средств одного из активов покрывается куплей или продажей другого актива в тех же денежных размерах. Итак, покажем, что существует такое значение начального капитала V_0 и такое управление портфелем, что к моменту T выполняется равенство $V(T,\omega) = F(S(T,\omega))$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то есть капитал управляемого нами портфеля $V(T,\omega)$ при почти всех вариантах развития ценовых сценариев будет покрывать величину предъявляемого нами иска. Такой портфель называют ***хеджирующим***.

Определение 5.1 *Назовем нормализованным рынком рынок из активов, величины которых связаны с величинами исходных активов формулами:*

$$\bar{S_l}(t) = \exp^{-\rho t} S_i(t)$$

Таким образом, мы перестаем измерять рынок в деньгах, а начинаем измерять в некоторых условных единицах. Нетрудно видеть, что нормализованный рынок удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} d\bar{S}_0 = 0 \\ d\bar{S}_1 = \bar{S}_1(\mu_1(x) - \rho)dt + \bar{S}_1(\sigma_{11}(s)dw_1 + \dots + \sigma_{1m}(s)dw_m) \\ \dots \\ d\bar{S}_n = \bar{S}_n(\mu_n(x) - \rho)dt + \bar{S}_1(\sigma_{n1}(s)dw_1 + \dots + \sigma_{nm}(s)dw_m) \end{cases}$$

Утверждение 5.1 *Пусть начальный капитал портфеля составляет V_0 и нами выбрано некоторое управление $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ портфелем, где θ_i- доли в соответствующих активах. Тогда капитал портфеля в момент времени t задается формулой:*

$$V(t,\omega) = V(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^{n} dS_i,$$

а капитал портфеля на нормализованном рынке, соответственно, формулой

$$\exp^{-\rho t} V(t,\omega) = V(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^{n} d\bar{S}_i, (\text{ т.к } d\bar{S}_0 = 0).$$

Поскольку θ_0 не входит в последнюю формулу, то мы можем его выбирать любым, в частности таким, чтобы портфель был самофинансирующимся. Рассмотрим теперь функцию U(t,S), являющуюся решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial S_i}\rho S_i + \frac{1}{2}(\Sigma\Sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial S_i S_j} = 0, U(T,S) = F(S)\exp^{-\rho t}, \Sigma = (\sigma_{ij})$$

Применив к уравнению задачи формулу Ито, получим:

$$dU(t,S(t)) = \frac{\partial U}{\partial t}dt + (\nabla S, dS) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S_i S_j}dS_i dS_j = \frac{\partial U}{\partial S}\exp^{-\rho t}d\bar{S}, dU(S) = \frac{\partial U}{\partial S_i}dS_i$$

Отсюда получаем, что $U(T,S(T)) - U(0,S_0) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial S_i}dS_i$ Из терминального условия $U(T,S(T)) = F(S)$ получаем, что $F(S)\exp^{-\rho T} = \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial S_i}dS_i$ Возвращаясь от нормализованного рынка к исходному, получим, что

$$F(S) = U(0,S_0) + \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial S_i}dS_i,$$

где величина θ_0, как уже было сказано, выбирается в каждый момент времени так, чтобы портфель был самофинансирующимся. Таким образом, мы получили, что число $U(0,S_0)$ является той начальной ценой V_0, начиная с которой мы можем построить хеджирующую стратегию,а в качестве долей активов следует брать

$$\bar{\theta} = gradU, \text{ т.е. } \theta_i = \frac{\partial U}{\partial S_i}$$

5.2 Управление индексом портфеля

Рассмотрим следующую общую модель рынка. На рынке присутствуют $m > 2$ ценных бумаг (активов), такие, как акции, облигации, счета или производственные ценные бумаги. На их цены воздействуют так же $n \geq 1$ макроэкономических фактора, такие, как дивидендная доходность, уровень инфляции, уровень безработицы, краткосрочная ставка банковского процента и т.д. Пусть (Σ, F_t, P)-основное вероятностное пространство. Обозначим $S_i(t)$- цену i-ой ценной бумаги в момент времени $t, x_j(t)$- уровень j-ого фактора в момент времени t. Процессы эволюции цен на ценные бумаги и уровень макроэкономических факторов описывается следующими стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (a + Ax(t))_i dt + \sum_{i=1}^{k+m} \sigma_{ik}dw_k(t), S_i(0) = s_i, i = 1, \ldots, m$$

$$dx(t) = (b + Bx(t))dt + \Lambda dw(t), x(0) = x_0,$$

где $w(t) - \mathbb{R}^{m+n}$ - значный стандартный процесс броуновского движения с компонентами $w_k(t), k = 1 \ldots m+n, X(t) - \mathbb{R}^n$- значный процесс факторов с компонентами $X_j(t), j = 1 \ldots n$, и $a, A, \Sigma = (\sigma)_{ij}, b, B, \Lambda = (\lambda_{ij})-$ параметры рынка, представляющие собой матрицы и векторы соответствующих размерностей. Рассмотрим $\mathbb{R}^m$ - значный процесс управления капиталом (инвестирования) $h(x(t))$, где компонента $h_i(t)$- доля капитала, вложенная в i-ую ценную бумагу, $i = 1 \ldots m$. Если она отрицательная, это значит, то данный актив был взят в долг. Процесс динамики капитала выглядит как приращение всего портфеля и описывается следующим уравнением:

$$dV(t) = \sum_{i=1}^m dS_i(t)\frac{Vh_i}{S_i} = \sum_{i=1}^m h_i(t)V(t)\left[(a + Ax(t))_i dt + \sum_{i=1}^{k+m}\sigma_{ik}dw_k(t)\right]$$

Сделаем замену переменных по формуле Ито:

$$d(\ln V) = \left(\sum_{i=1}^m h_i(t)(a + Ax_i(t))dt - \sum_{i=1}^{k+m}\left(\sum_{i=1}^m h_i\sigma_{ik}\right)^2\right)dt + \int_0^t \sum_{k=1}^{n+m}\left(\sum_{i=1}^m h_i\sigma_{ik}\right)dw_k(t)$$

Теперь проинтегрируем последнее уравнение по времени и поделим обе части на t:

$$\frac{\ln V}{t} = \frac{\ln V_0}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m h_i(t)(a + Ax_i(t))dt\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+m}\left(\sum_{i=1}^m h_i\sigma_{ik}\right)^2 dt + \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{k=1}^{n+m}\left(\sum_{i=1}^m h_i\sigma_{ik}\right)dw_k(t)$$

Последнее отношение называется индексом инвестиционного портфеля. Эта случайная величина имеет смысл мгновенной процентной ставки. Фактически, мы получили, что она может быть выражена как интегральный функционал от вектора x- процесса для моделирования макроэкономических показателей. Нам важно, чтобы в мгновенный процент от использования портфеля был максимальным в перспективе. Поэтому, нужно поставить условие:

$$\lim_{t\to\infty} \inf M\left(\frac{\ln V(t)}{t}\right) \to \max$$

И назвать риском величину $D\left(\frac{lnV(t)}{t}\right)$, соответственно как-то ограничив ее. Такая задача называется задачей управления стохастической системой с фазовыми ограничениями. Она подробно рассмотрена в работе [7](не могу найти авторов этой работы и саму работу тоже).

Более простая постановка задачи оптимизации соответствуют конечному интервалу времени:

$$M\left(V_{(T)}^{\frac{\theta}{2}}\right) \to \min .$$

Здесь параметр $\theta > 0$ называется рискочувствительным. С помощью этого параметра можно моделировать отношение инвестора к риску: $0 < \theta < 2$ соответствует "осторожному инвестору $\theta > 2$- "рискованному"инвестору, $\theta = 2$ - так называемый "рисконейтральный"случай.

Задача. С помощью метода Беллмана, изложенного в п. 3.3 докажите, что вектор оптимального управления $\bar{h}^*(x) = (h_1^*(x), \dots, h_m^*(x))$ доставляет минимум квадратичной форме

$$K(h_1, \dots, h_m, \bar{x}) \equiv (\frac{\theta}{2} + 1)h^T\Sigma\Sigma^T h - \sum_{i=1}^{m} h_i(a + Ax)_i$$

по $h = (h_1, \dots, h_m), \sum\limits_{i=1}^{m} h_i = 1$, где $\Sigma-$ матрица с элементами (σ_{ij}) размерности $m \times (m + n)$.

Указание. Следует искать функцию Беллмана в форме $W = v^{\frac{\theta}{2}}V(t, x)$. Управление $\bar{h}^*(x)$ строится в каждый момент времени по наблюдаемому вектору макроэкономических факторов $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

5.3 Теорема Гирсанова

В заключение этой главы рассмотрим теорему Гирсанова, которая является фундаментальным результатом теории стохастического анализа. Суть теоремы состоит в том, что если изменить коэффициент сноса данного процесса Ито (с невырожденным коэффициентом диффузии), то вероятностный закон процесса не изменится кардинальным образом. Пусть P-исходная вероятностная мера. Возьмем измеримую, интегрируемую относительно этой меры, функцию f, такую, что выполняется $\int_\Omega f(\omega)dP = 1$. При помощи этой функции построим новую меру Q следующим образом $Q(A) = \int_\Omega f(\omega)dP$, где A-некоторое множество из Ω. Формально, это можно записать как:

$$\frac{dQ}{dP} = f.$$

Такая функция f называется производной Радона-Никодима меры Q относительно меры P.

Теорема 5.1 (Гирсанова) . *Пусть $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ является процессом Ито вида:*

$$dY(t) = \beta(t,\omega)dt + \sigma(t,\omega)dw_t, Y(0) = y_0, t \leq T, \textit{где} w_t \in \mathbb{R}^m, \sigma(t,\omega) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Предположим, что существуют процессы $\alpha(t,\omega), u(t,\omega)$, такие, что

$$\sigma(t,\omega)u(t,\omega) = \beta(t,\omega) - \alpha(t,\omega) = f(t,\omega),$$

допустим, что $u(t,\omega)$ удовлетворяет условию Новикова:

$$M\left(\exp^{\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)}\right) < \infty$$

Положим,$M_t = \exp^{-\int_0^t u(s,\omega)ds - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega)ds}, t \leq T,$ и $dQ(\omega) = M_t(\omega)dP(\omega)$

Тогда процесс $\hat{w}_t = \int_0^t u(s,\omega)ds + w_t, t \leq T$, является броуновским движением относительно Q, а процесс Y(t) можно переписать в терминах процесса $\hat{w}_t$следующим образом

$$dY(t) = \alpha(t,\omega)dt + \sigma(t,\omega)dw_t.$$

Задача. С помощью теремы Гирсанова докажите, что используя капитал V_0, меньший, чем $U(0, S_0)$ (см. п. 5.2),невозможно полностью (для всех возможных сценариев развития цены) покрыть иск $F(S_2(T), \ldots, S_n(T))$.

6 Математическая модель формирования эффективного портфеля ценных бумаг

6.1

При формировании портфеля ценных бумаг инвестор сталкивается с проблемой риска и старается его минимизировать. Каждый актив портфеля подвергается постоянной проверке рынком, поэтому даже самый опытный инвестор может сомневаться в правильности выбора активов. Время и риск являются определяющими критериями в процессе инвестирования. Портфель представляет собой набор финансовых активов, главной целью формирования которого является стремление получить прибыль при минимально возможном риске. Данная цель достижима за счет диверсификации портфеля и тщательного фундаментального анализа входящих в него активов[2, 239]. Задачу выбора структуры портфеля можно рассматривать как игру с природой: стратегия инвестора представляет собой множество вариантов формирования портфеля, а множество состояний природы есть условия на рынке, определяющие дальнейшее поведение инвестора. уровень доходности портфеля в этом случае определяется по следующей формуле:

$$h_p(m,q) = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot h_j(m,q),$$

где $h_p(m,q)$ - доходность портфеля при сроке вложений m и реализации сценария временной структуры процентных ставок q, x_j - доля вложений в акции j, h_j - доходность акции j. Выигрыш инвестора равен разности доходности портфеля $h_p(m,q)$ и ставкой спот $s(m)$ (т.е. ставкой мгновенной ликвидности), установившейся в момент формирования портфеля. Полезность выигрыша определяется отношением инвестора к процентному риску. Согласно теории полезности Неймана-Моргенштерна функция полезности, отражающая стремление к избежанию риска, характеризуется положительным значением первой производной и отрицательным значением второй производной на всей области определения, соответствующей возможным значениям выигрыша. Функция полезности Неймана-Моргенштерна имеет вид:

$$U(h_p(m,q), s(m)) = 1 - \exp^{-w\cdot(h_p(m,q)-s(m))}, w > 0.$$

Функция вида $f(x) = 1 - \exp^{-w\cdot x}$ обладает несколькими преимуществами: отражает неприятие риска и степень неприятия риска у различных инвесторов. Для определения структуры портфеля с максимальным средним значением уровнем полезности необходимо решить задачу оптимизации:

$$\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} \sum_{q=1}^{Q} \left[1 - \exp^{-w\cdot(\sum\limits_{j=1}^{J}(m,q)-s(m))} \right] \cdot p(m) \cdot p(q) \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{J} x_j = 1;$$

$$x_j \geq 0, j \in [1, J],$$

где $p(m)$ -оценка предполагаемого срока вложений , $p(q)$ - оценка предполагаемых изменений временной структуры процентных ставок. Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени - период владения. В общем, подход Марковица основан на анализе среднегодовой доходности, стандартного отклонения и кривых безразличия. Альтернативные портфели анализируются с этих позиций. Портфель - набор различных ценных бумаг, следовательно, проблема видится как проблема выбора инвестиционного портфеля. Принимая решение, инвестор должен иметь в виду, что доходность в предстоящий период неизвестна [5]. Используя математический метод, известный как квадратическое программирование, инвестор может обработать ожидаемые доходности, стандартные отклонения и ковариации для определения эффективного множества. Итак, подход Марковица к проблеме портфеля предполагает, что инвестор старается решить две проблемы: максимизировать ожидаемую доходность при заданном уровне риска и минимизировать неопределенность (риск) при заданном уровне ожидаемой доходности.

Доходность портфеля характеризуется средневзвешенной доходностью его составляющих, которая для портфеля, состоящего, например, из двух активов, рассчитывается следующим образом:

$$P = W_a \dot{P}_a + W_b \cdot P_b,$$

где P - доходность портфеля, W_a - удельный вес актива А, W_b - удельный вес актива В. Будущая стоимость ценных бумаг (в отличие от текущей) не определена и зависит от большого количества различных факторов. Количественная мера этой неопределенности называется риском. При этом методы линейного программирования можно использовать для контроля систематического риска при формировании портфеля активов [5, 27].

Нами рассматривается "идеальный конкурентный рынок". Все участники такого рынка имеют свободный доступ ко всей информации о ценных бумагах и стремятся сформировать оптимальный портфель ценных бумаг. Спрос активов на этом рынке равен предложению. Под портфелем ценных бумаг понимают совокупность ценных бумаг, приобретенных инвестором. Структура портфеля - это соотношение долей капитала, вложенных в ценные бумаги различных видов. Для того, чтобы составить эффективный портфель, необходимо найти точку касания границы эффективности с кривой безразличия инвестора. Инвестор намечает иметь в своем портфеле N определенных ценных бумаг. Ему необходимы характеристики этих бумаг, т.е. ожидаемая доходность $E(r_p)$ и риск σ_p^2, для удобства расчетов лучше воспользоваться ковариациями доходностей активов.

Реальный портфель вложений в ценные бумаги, как правило, должен быть высокодиверсифицированным, т.е. содержать различные ценные бумаги различных компаний различных же отраслей. В такой ситуации трудно учесть все факторы; при большом количестве активов, входящих в портфель, оптимальность того или иного варианта может быть неочевидна. Задача нахождения оптимального портфеля ценных бумаг, а тем более, поддержание его в иммунизированном состоянии требует большого объема расчетов. Поэтому использование стандартных пакетов прикладных программ не лишено смысла. Дисперсия (размер риска) определяется по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r})^2}{n-1},$$

σ^2- дисперсия доходности актива, n- число периодов наблюдения, $\bar{r}$- средняя доходность актива. Стандартное отклонение определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

σ - стандартное отклонение. Стандартное отклонение говорит о величине и вероятности отклонения доходности актива от ее средней величины за определенный период. Для определения степени взаимосвязи и направления изменения доходности двух активов используют такие показатели, как ковариация и корреляция. Показатель ковариации определяется по формуле:

$$Cov_{AB} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(r_{A_i} - \bar{r_A})(r_{B_i} - \bar{r_B})}{n-1},$$

Cov_{AB} - ковариация доходности активов A и B. Положительное значение ковариации говорит о том, что доходности активов изменяются в одном направлении, отрицательная - в обратном. Нулевое значение ковариации означает, что взаимосвязь между активами отсутствует [2, 245]. Тогда риск (дисперсия) портфеля, состоящего из нескольких активов, запишется как:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \cdot \sigma_p^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot Cov_{i,j}$$

6.2 Определение доходности актива

Пусть $D_i(s)$ - дивиденд, выплаченный на акцию i в состоянии s (в конце периода), и пусть P_i - цена акции (в начале периода). Тогда:

$$r_i(s) = \frac{D_i(s) - P_i}{P_i}$$

является доходностью акции i в состоянии s. Доходность бессрочной привилегированной акции, равно как и обыкновенной акции с неизменным дивидендом, находится по формуле:

$$r_i = \frac{D_i(s)}{P_m},$$

P_m - текущая рыночная цена акции.

6.3 Определение ожидаемой доходности портфеля

На начальном этапе решения задачи необходимо оценить ожидаемую доходность портфеля в конце периода инвестирования, а так же оценить стоимость портфеля в начале инвестиционного процесса. В [5, 178] предлагается методика оценки ожидаемой доходности портфеля.

Портфель, формируемый инвестором, состоит из нескольких активов, каждый из которых обладает своей ожидаемой доходностью. Ожидаемая доходность портфеля определяется как средневзвешенная ожидаемая доходность входящих в него активов:

$$E(r_p) = E(r_1) \cdot \theta_1 + E(r_2) \cdot \theta_2 + ... + E(r_n) \cdot \theta_n,$$

$E(r_p)$ - ожидаемая доходность портфеля, $E(r_1), E(r_2), ...E(r_n)$ - ожидаемая доходность активов, входящих в состав портфеля, $\theta_1, \theta_2 ... \theta_n$ - удельный вес каждого актива в портфеле. Или иначе:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} E(r_i) \cdot \theta_i$$

Удельный вес актива в портфеле рассчитывается как отношение его стоимости к стоимости всего портфеля:

$$\theta_i = \frac{P_i}{P_p},$$

θ_i -удельный вес i -ого актива, P_i - стоимость i -ого актива, P_p - стоимость портфеля. Сумма всех удельных весов, входящих в портфель активов, всегда равна единице. Т.к. ожидаемая доходность портфеля представляет собой средневзвешенные ожидаемые доходности ценных бумаг, то вклад каждой ценной бумаги в ожидаемую доходность портфеля зависит от ее ожидаемой доходности, а так же от доли начальной рыночной стоимости портфеля, вложенной в данную ценную бумагу [5, 178 - 179]. Данное утверждение будет полезно при составлении математической модели задачи.

6.4 Построение и описание экономико - математической модели задачи форм

При определении оптимального в смысле минимизации риска портфеля, инвестор исходит из следующих допущений:

1. Состав портфеля ценных бумаг в течение периода владения неизменен при изменении структуры портфеля.
2. Средства инвестируются в один вид ценных бумаг - в акции.
3. Доходность портфеля не может быть больше доходности самой доходной ценной бумаги (акции), входящей в портфель.
4. Всегда приходится выбирать между увеличением доходности и уменьшением риска.

Инвестор не склонен вкладывать свои средства в один какой-либо наиболее доходный финансовый инструмент, но предпочитает диверсифицировать структуру своего портфеля вложений, теряя, однако, при этом в доходности. Необходимо рассчитать дисперсию, а так же ковариацию доходностей по ценным бумагам. Итак, запишем математическую модель задачи нахождения структуры оптимальных вложений в акции на основе модели Марковица. Множество недоминируемых портфелей, называемое эффективной границей, может быть построено решением общей задачи минимизации риска, впервые рассмотренной Марковицем:

$$\sigma^2 = \sum_i \sum_j x_i \cdot x_j \cdot Cov_{i,j} \to \min$$

при двух ограничениях. Первое ограничение фиксирует желаемый уровень доходности, а второе ограничение нормирует весовые коэффициенты портфеля:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E(r_i) - \bar{E}(x) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0.$$

на практике, обычно на величины x_i накладывают ограничения:$x_i \geq 0$.Т.е. предполагается, что инвестор не покупает акции в долг. Тогда формула, описывающая риск портфеля, перепишется в виде:

$$\sigma_p^2(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot Cov_{i,j} \to \min,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} E(r_i) \cdot x_i \geq \bar{E}(x), i \in [1, n],$$

т.к. мы предполагаем, что прогнозная доходность портфеля составит величину $\bar{E}(x)$;

$$\sum_{i=1}^{n} E(r_i) \cdot x_i \leq \bar{E}_{\max}(x), i \in [1, n],$$

т.к. доходность портфеля не может превышать доходность самой доходной ценной бумаги, включенной в портфель;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

т.к. максимальный размер инвестиций не может превысить инвестируемых средств;

$$x_i \geq 0,$$

т.к. инвестиции должны быть положительными.

Список литературы

[1] А.Н.Ширяев Вероятность — Наука, 1998.

[2] А.Н. Буренин. Рынок ценных бумаг и производные финансовые инструменты: Уч. Пособие. - М.: ФКК, - 1998. - 352 с. — М., Космосинформ, 1994.

[3] Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. Пособие / Под ред. Б.А. Лагоши. - М.: Финансы и статистика, 1999. — 176с.: с ил.

[4] Мельников Р. Оптимизация рискового портфеля ценных бумаг с фиксированным доходом // РЦБ. - 2000. — № 20 (179). - с.54 - 56.

[5] Фомин Г.П. Методы и модели линейного программирования в коммерческой деятельности. - М.: Финансы и статистика, 2005.

[6] Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции. - М.: Инфра-М, - 1999.