

Н. М. Бокало*

**КОРРЕКТНОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
И ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ
БЕЗ УСЛОВИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ**

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Для линейных и многих нелинейных параболических уравнений и систем единственность решений краевых задач в неограниченных областях имеет место в классах функций с квалифицированным поведением на бесконечности, а существование доказывается при определенных предположениях о росте на бесконечности исходных данных или связи роста исходных данных с геометрией области [1–6]. Но среди нелинейных уравнений существуют такие, для которых решения соответствующих краевых задач единственны без каких-либо ограничений на их поведение на бесконечности и существуют при исходных данных с произвольным ростом на бесконечности [7–17]. В данной работе описаны параболические системы (заданные в неограниченных по пространственным переменным областях), для которых справедливы результаты такого рода относительно первой смешанной задачи и задачи Коши. Кроме того, доказана непрерывная зависимость обобщенного решения рассматриваемых задач от их правых частей. При этом используется методика работы [9].

1. Постановка задачи и формулировка результатов. Пусть

$$Q = \Omega \times (0, T),$$

где Ω — неограниченная область в $\mathbb{R}_x^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $0 < T < +\infty$. Обозначим

$$\Sigma = \partial\Omega \times (0, T).$$

*© Бокало Н. М., 2006 г.

Рассматривается задача

$$\begin{aligned} u_{it} &= \sum_{j=1}^n D_j a_{ij}(x, t, \delta u) + a_{i0}(x, t, \delta u) = \\ &= f_{i0}(x, t) + \sum_{j=1}^n D_j f_{ij}(x, t) \quad \text{в } Q, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$$u_i|_{t=0} = u_{i0}(x), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где $N \geq 1$ — целое число, $u = \text{colon}(u_1, u_2, \dots, u_N)$, $D_j v = \partial v / \partial x_j$, $j = \overline{1, N}$, $D_0 v = v$, $\delta u = (D_j u_i)$ — матрица с элементами $D_j u_i$, где i — номер строки, $i = \overline{1, N}$, j — номер столбца, $j = \overline{0, n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задача (1)–(3) является задачей Коши, если $\Omega = \mathbb{R}_x^n$, и первой краевой задачей, если $\Omega \neq \mathbb{R}_x^n$.

Допустим, что

- (A)** функции $a_{ij}(x, t, \varepsilon)$ ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{0, n}$) определены для точек $(x, t) \in Q$ и матриц $\varepsilon = (\varepsilon_{kl})$ с элементами $\varepsilon_{kl} \in \mathbb{R}^1$, где k — номер строки, $k = \overline{1, N}$, l — номер столбца, $l = \overline{0, n}$, и являются каратеодориевыми, т. е. измеримыми по (x, t) для всех ε и непрерывными по ε для почти всех (x, t) ;
- (B)** для почти всех $(x, t) \in Q$ и любых ε, η

$$\begin{aligned} |a_{ij}(x, t, \varepsilon) - a_{ij}(x, t, \eta)| &\leq A_{ij} \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^n |\varepsilon_{kl} - \eta_{kl}|, \quad A_{ij} = \text{const} > 0, \\ a_{ij}(x, t, 0) &\in L_{\text{loc}}^2(\bar{Q}), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

- (C)** для почти всех $(x, t) \in Q$ и любых ε

$$\begin{aligned} |a_{i0}(x, t, \varepsilon)| &\leq b_{i1}(x, t) \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n |\varepsilon_{kl}|^{2(p-1)/p} + \\ &+ b_{i2}(x, t) \sum_{k=1}^N |\varepsilon_{k0}|^{p-1} + b_{i3}(x, t), \end{aligned}$$

где $b_{i1}, b_{i2} \in L_{\text{loc}}^\infty(\bar{Q})$, $b_{i3} \in L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q})$, $p > 2$, $1/p + 1/p' = 1$;

- (D)** справедливо

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n (a_{ij}(x, t, \varepsilon) - a_{ij}(x, t, \eta))(\varepsilon_{ij} - \eta_{ij}) \geq$$

$$\geq K_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij} - \eta_{ij}|^2 + K_2 \sum_{i=1}^N |\varepsilon_{i0} - \eta_{i0}|^2 + K_3 \sum_{i=1}^N |\varepsilon_{i0} - \eta_{i0}|^p,$$

где $K_1, K_3 = \text{const} > 0$, а K_2 — произвольная константа;

(E) $f_{i0}(x, t) \in L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q})$, $f_{ij}(x, t) \in L_{\text{loc}}^2(\bar{Q})$, $u_{i0}(x) \in L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega})$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$.

Под $L_{\text{loc}}^q(\bar{G})$, где G — неограниченная область в $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$), понимаем пространство определенных и измеримых на Q функций, сужения которых на произвольное ограниченное измеримое множество $G' \subset G$ принадлежат пространству $L^q(G')$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Частным случаем системы (1), удовлетворяющей условиям (A)–(D), является полулинейное уравнение

$$\begin{aligned} u_t - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x, t)D_i u + a_i(x, t)u) + \sum_{i=0}^n b_i(x, t)D_i u + c(x, t, u) = \\ = f_0(x, t) + \sum_{j=1}^n D_j f_j(x, t), \end{aligned}$$

где относительно коэффициентов уравнения предполагается следующее:

$$\lambda_0 \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t)\varepsilon_i \varepsilon_j \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i|^2$$

для произвольных $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(x, t) \in Q$, $\lambda_0, \lambda_1 = \text{const} > 0$; $a_i(x, t) \in L_{\text{loc}}^\infty(Q)$, $i = \overline{1, n}$, $b_i(x, t) \in L_{\text{loc}}^\infty(Q)$, $i = \overline{0, n}$; для любых $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$ и почти всех $(x, t) \in Q$ справедливо

$$(c(x, t, s_1) - c(x, t, s_2))(s_1 - s_2) \geq c_0 |s_1 - s_2|^p,$$

где $c_0 = \text{const} > 0$, $p > 2$ (например, $c(x, t, s) = \hat{c}|s|^{p-2}s$, $\hat{c} = \text{const} > 0$).

Другим примером системы (1), удовлетворяющей условиям (A)–(D), является система

$$\begin{aligned} u_{it} - \sum_{j=1}^n D_j a_{ij}(x, t, \nabla u) + b_i(x, t)|u_i|^{p-2}u_i + c_i(x, t, u) = \\ = f_{i0}(x, t) + \sum_{j=1}^n D_j f_{ij}(x, t), \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где функции $a_{ij}(x, t, \varepsilon')$ ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$) определены для точек $(x, t) \in Q$ и матриц $\varepsilon' = (\varepsilon_{kl})$ с элементами $\varepsilon_{kl} \in \mathbb{R}^1$, где k — номер

строки, $k = \overline{1, N}$, l — номер столбца, $l = \overline{1, n}$, и являются измеримыми по (x, t) для всех ε' и дифференцируемыми по ε' для почти всех (x, t) , причем $\partial a_{ij}(x, t, \varepsilon') / \partial \varepsilon_{kl} \in L^\infty(Q)$, $\partial a_{ij}(x, t, \varepsilon') / \partial \varepsilon_{ij} \geq M_{ij}$, где $M_{ij} > 0$ — достаточно большие постоянные ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$); $p > 2$, $b_i \in L^\infty_{\text{loc}}(\bar{Q})$, $b_i(x, t) \geq b_0 = \text{const} > 0$, $c_i(x, t, u)$ измеримы по (x, t) для всех u и дифференцируемы по u для почти всех (x, t) , причем $\partial c_i(x, t, u) / \partial u_j \in L^\infty(Q)$ ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$).

Обозначим через $H^{1,0}_{\text{loc}}$ пространство функций $v(x, t) \in L^2_{\text{loc}}(\bar{Q})$, которые имеют обобщенные производные $v_x, \dots, v_{x_n} \in L^2_{\text{loc}}(\bar{Q})$, а через $\dot{H}^{1,0}_{\text{loc}}(\bar{Q})$ — подпространство функций из пространства $H^{1,0}_{\text{loc}}(\bar{Q})$, которые имеют равный нулю след на Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем вектор-функцию $u(x, t) = \text{col}(u_1(x, t), \dots, u_N(x, t))$, компоненты которой $u_i(x, t)$ принадлежат пространству $\dot{H}^{1,0}_{\text{loc}}(\bar{Q}) \cap L^p_{\text{loc}}(\bar{Q})$ и удовлетворяют интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \iint_Q \sum_{i=1}^N \left\{ -u_i \psi_{it} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t, \delta u) D_j \psi_i + a_{i0}(x, t, \delta u) \psi_i \right\} dx dt = \\ & = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N u_{i0}(x) \psi_i(x, 0) dx + \iint_Q \sum_{i=1}^N \left\{ f_{i0} \psi_i - \sum_{j=1}^n f_{ij} D_j \psi_i \right\} dx dt \quad (4) \end{aligned}$$

для произвольных $\psi_i \in C^\infty(\bar{Q})$ ($i = \overline{1, N}$), таких, что $\psi_i(x, t) = 0$ на $\partial Q \cap \{t > 0\}$ и при достаточно больших $|x|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Тождество (4) сохраняет силу для любых функций $\tilde{\psi}_i \in H^{1,1}(Q) \cap L^p(Q)$, равных нулю на $\partial Q \cap \{t > 0\}$ и при достаточно больших значениях $|x|$, $i = \overline{1, N}$ ($H^{1,1}(Q)$ — пространство функций из $L^2(Q)$, которые имеют обобщенные производные по $t, x, \dots, x_n$ из $L^2(Q)$). Чтобы убедиться в этом, достаточно взять последовательности $\{\psi_i^m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ функций из $C^\infty(\bar{Q})$, $i = \overline{1, N}$, которые удовлетворяют тем же условиям, что и ψ_i в определении 1, и сходятся к соответствующим $\psi_i(x, t)$ в $H^{1,1}(Q) \cap L^p(Q)$, подставить ψ_i^m вместо ψ_i в (4) и перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$. Предельный переход возможен в силу условий (B), (C), (E).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из определения 1 и замечания 3 следует, что производная u_t обобщенного решения u задачи (1)–(3) в смысле распределений $D(0, T; (H^{-1}_{\text{loc}}(\bar{\Omega}) + L^{p'}_{\text{loc}}(\bar{\Omega}))^N)$ принадлежит пространству

$$L^2(0, T; (H^{-1}_{\text{loc}}(\bar{\Omega}))^N) + L^{p'}_{\text{loc}}(0, T; (L^{p'}_{\text{loc}}(\bar{\Omega}))^N).$$

Здесь $H_{\text{loc}}^{-1}(\bar{\omega})$ — пространство распределений на Ω , сужение которых на любую ограниченную подобласть Ω' области Ω принадлежит пространству $H^{-1}(\Omega')$, сопряженному к $\dot{H}^1(\Omega')$. Отсюда (см., например, [18]) вытекает, что $u \in C([0, T]; (L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega}))^N)$. Под $C([0, T]; (L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega}))^N)$ понимаем пространство измеримых на Q вектор-функций, сужение которых на множество $\Omega' \times (0, T)$, где Ω' — произвольная ограниченная подобласть области Ω , принадлежит $C([0, T]; (L^2(\Omega'))^N)$. Поэтому начальные условия (3) можно понимать как значения функции $u \in C([0, T]; (L_{\text{loc}}^2(\Omega))^N)$ в точке $t = 0$. Следовательно, обобщенное решение задачи (1)–(3) можно определить как вектор-функцию $u(x, t) = \text{col}(u_1(x, t), \dots, u_N(x, t))$, компоненты которой $u_i(x, t)$ принадлежат пространству

$$\dot{H}_{\text{loc}}^{1,0}(\bar{Q}) \cap L_{\text{loc}}^p(\bar{Q}) \cap C([0, T]; (L_{\text{loc}}^2(\Omega))),$$

удовлетворяют условиям (3) и интегральному тождеству, которое отличается от тождества (4) только тем, что в правой части отсутствует первый член и пробные функции ψ_i берутся из пространства $C_0^\infty(Q)$ ($i = \overline{1, N}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что задача (1)–(3) корректна, если ее обобщенное решение

- 1) существует для любых $f_{i0}(x, t) \in L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q})$, $f_{ij}(x, t) \in L_{\text{loc}}^2(\bar{Q})$, $u_{i0} \in L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega})$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$;
- 2) единственно;
- 3) непрерывно зависит от правых частей задачи (1)–(3).

Под непрерывной зависимостью обобщенного решения задачи (1)–(3) от правых частей понимаем следующее: для любых последовательностей

$$\{f_{i0}^m\}_{m=1}^\infty \subset L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q}), \quad \{f_{ij}^m\}_{m=1}^\infty \subset L_{\text{loc}}^2(\bar{Q}), \quad \{u_{i0}^m\}_{m=1}^\infty \subset L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega}),$$

таких, что

$$\begin{aligned} f_{i0}^m &\rightarrow f_{i0} \quad \text{в } L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q}), & f_{ij}^m &\rightarrow f_{ij} \quad \text{в } L_{\text{loc}}^2(\bar{Q}), \\ u_{i0}^m &\rightarrow u_{i0} \quad \text{в } L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega}), & i &= \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

соответствующая последовательность $\{u^m = (u_1^m, \dots, u_N^m)\}$ сходится в $(\dot{H}_{\text{loc}}^{1,0}(\bar{Q}) \cap L_{\text{loc}}^p(\bar{Q}))^N$ к $u = (u_1, \dots, u_N)$. Здесь u — обобщенное решение задачи (1)–(3), u^m — обобщенное решение задачи, которая отличается от задачи (1)–(3) только тем, что в правой части стоят f_{i0}^m , f_{ij}^m , u_{i0}^m вместо f_{i0} , f_{ij} , u_{ij} .

Напомним, что $f^m \rightarrow f$ в $L^q_{\text{loc}}(\bar{Q})$ ($\dot{H}^{1,0}_{\text{loc}}(\bar{Q})$) при $m \rightarrow +\infty$, если для произвольной ограниченной области $Q' \subset Q$ $f^m \rightarrow f$ в норме $L^q(Q')$ ($\dot{H}^{1,0}(Q')$).

Перейдем к формулировке основных результатов. Сначала введем некоторые обозначения. Будем считать, что точка $x = 0$ принадлежит Ω . Пусть для произвольного числа $R > 0$ Ω_R — связная компонента множества $\Omega \cap \{x: |x| < R\}$, которой принадлежит точка $x = 0$. Тогда, очевидно, $\Omega_R \subset \Omega_{R_1}$ для любых $R < R_1$. Обозначим $Q_{R,t_0} = \Omega_R \times (0, t_0)$, где t_0 — произвольное число из промежутка $(0, T]$. Под $|\eta|$, где $\eta \in \mathbb{R}^k$, подразумеваем норму вектора η , т. е. $|\eta| = \left(\sum_{i=1}^k \eta_i^2\right)^{1/2}$. Пусть $\nabla u = (D_j u_i)$ — матрица с элементами $D_j u_i$, где i — номер строки, j — номер столбца, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$, $|\nabla u| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |D_j u_i|^2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (А)—(Е). Тогда задача (1)—(3) корректна. Кроме того, для произвольных чисел R_1, R_2 , таких, что $1 \leq R_1 < R_2$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_{R_1}} |u(x, t)|^2 dx + \iint_{Q_{R_1, T}} (|\nabla u|^2 + |u|^p) dx dt \leq \\ & \leq \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)^{\varkappa} \left(C_1 R_2^{-\gamma} + C_2 \int_{\Omega_{R_2}} \sum_{i=1}^N |u_{i0}|^2 + \right. \\ & \left. + C_3 \iint_{Q_{R_2, T}} \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0}(x, t) - a_{i0}(x, t, 0)|^{p'} + \sum_{j=1}^n |f_{ij}(x, t) - a_{ij}(x, t, 0)|^2 \right\} dx dt \right). \end{aligned}$$

Здесь $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1)—(3); $\varkappa, \gamma$ — положительные постоянные, которые зависят от n, p ; C_1, C_2, C_3 — положительные постоянные, которые зависят только от n, p, K_i ($i = 1, 2, 3$), A_{ij} ($i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}$), T .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При наличии оценки

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |u_{i0}|^2 dx + \iint_Q \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0}(x, t) - a_{i0}(x, t, 0)|^{p'} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n |f_{ij}(x, t) - a_{ij}(x, t, 0)|^2 \right\} dx dt \leq K, \end{aligned}$$

где $K = \text{const} > 0$, обобщенное решение, о котором говорится в теореме 1, имеет компоненты, принадлежащие пространству $\dot{H}^{1,0}(Q) \cap L^p(Q)$, и удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \iint_Q (|\nabla u|^2 + |u|^p) dx dt \leq \\ & \leq C_2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |u_{i0}|^2 dx + \\ & + C_3 \iint_Q \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0}(x, t) - a_{i0}(x, t, 0)|^{p'} + \sum_{j=1}^n |f_{ij}(x, t) - a_{ij}(x, t, 0)|^2 \right\} dx dt, \end{aligned}$$

которая получается из оценки теоремы 1 предельным переходом сначала при $R_2 \rightarrow +\infty$, а потом при $R_1 \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как будет вытекать из доказательства теоремы 1, для единственности обобщенного решения задачи (1)–(3) вместо условия (D) достаточно наложить следующее условие:

(D') справедливо

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n (a_{ij}(x, t, \varepsilon) - a_{ij}(x, t, \eta))(\varepsilon_{ij} - \eta_{ij}) \geq \\ & \geq K_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij} - \eta_{ij}|^2 + K_2 \sum_{i=1}^N |\varepsilon_{i0} - \eta_{i0}|^2 + \bar{K}_3 \sum_{i=1}^N |\varepsilon_{i0} - \eta_{i0}|^q, \end{aligned}$$

где $q \in (2; p]$, $K_1, \bar{K}_3 = \text{const} > 0$, а K_2 — произвольная постоянная.

Обозначим через e^i n -мерный вектор, i -я компонента которого равна 1, а остальные — нули.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, существуют числа $\omega > 0$, $\kappa \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие, что

- 1) если $x \in \Omega$, то $x \pm \omega e^\kappa \in \Omega$;
- 2) $a_{ij}(x, t, \varepsilon) = a_{ij}(x + \omega e^\kappa, t, \varepsilon)$ для любых ε и почти всех $(x, t) \in Q$, $i = \bar{1}, \bar{N}$, $j = \bar{0}, n$;
- 3) $f_{ij}(x, t) = f_{ij}(x + \omega e^\kappa, t)$ и $u_{i0}(x) = u_{i0}(x + \omega e^\kappa)$ для почти всех $(x, t) \in Q$ и $x \in \Omega$ соответственно, $i = \bar{1}, \bar{N}$, $j = \bar{0}, n$.

Тогда обобщенное решение задачи (1)–(3), о котором говорится в теореме 1, периодическое по x_κ с периодом ω , т. е. $u(x + \omega e^\kappa, t) = u(x, t)$ для почти всех $(x, t) \in Q$.

2. Вспомогательная лемма. Перед тем как доказывать теоремы 1 и 2, покажем справедливость такого утверждения.

ЛЕММА. Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1)–(3), $\tilde{u}(x, t)$ — обобщенное решение задачи, которая отличается от задачи (1)–(3) только тем, что в правой части задачи (1)–(3) вместо f_{ij} , u_{i0} стоят $\tilde{f}_{ij}$, $\tilde{u}_{i0}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{0, n}$. Тогда для произвольных чисел t_0 , R_0 , R , таких, что $0 < t_0 \leq T$, $0 < R_0 < R$, $1 \leq R$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{R_0}} |u - \tilde{u}|^2|_{t=t_0} dx + \iint_{Q_{R_0, t_0}} (|\nabla(u - \tilde{u})|^2 + |u - \tilde{u}|^p) dx dt \leq \\ & \leq \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^S \left(B_1 R^{n-q/(q-2)} + B_2 \int \sum_{i=1}^N |u_{i0} - \tilde{u}_{i0}|^2 + \right. \\ & \left. + B_3 \iint \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}|^{p'} + \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}|^2 \right\} dx dt \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где q — любое число из промежутка $(2, p]$; s — произвольное число, такое, что $s > 2q/(q-2)$; B_1 , B_2 , B_3 — положительные постоянные, которые зависят только от n , N , p , s , K_i ($i = 1, 2, 3$), A_{ij} ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала напомним определения и некоторые нужные нам свойства усреднений по Стеклову [19]. Пусть $v(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$. Определим для каждого $h > 0$

$$v_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t v(\theta) d\theta, \quad v_{\bar{h}} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\theta) d\theta.$$

Функции $v_h(t)$, $v_{\bar{h}}(t)$ называются усреднениями функции $v(t)$ по Стеклову. Если $v(t) \in L^1(a, b)$, то усреднения $v_h(t)$, $v_{\bar{h}}(t)$ строят по тем же самым правилам, предварительно положив $v(t)$ вне (a, b) нулем. Легко проверить (изменением порядка интегрирования) справедливость равенств

$$\int_{a-h}^b v(t) \varphi_{\bar{h}}(t) dt = \int_a^b v_h(t) \varphi(t) dt, \quad \int_{a-h}^b v(t) \varphi_{h\bar{t}}(t) dt = - \int_a^b v_{ht}(t) \varphi(t) dt$$

для любых $v(t), \varphi(t) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$, если $\varphi = 0$ вне $[a, b]$. Кроме того, $v_h \rightarrow v$ в $L^q(a, b)$ при $h \rightarrow 0$, где $q \geq 1$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Пусть $R \in [1, +\infty)$ — произвольное число. Определим функцию $\zeta(x)$ следующим образом: $\zeta(x) = (1/R)(R^2 - |x|^2)$, если $|x| \leq R$, и $\zeta(x) = 0$, если $|x| > R$. Для произвольных чисел $t_0 \in (0, T)$ и $\delta \in (0, t_0/2)$ введем функцию $\eta - \delta(t, t_0)$, такую, что $\eta_\delta(t, t_0) = 1$, если $t \in [\delta, t_0 - \delta]$, $\eta_\delta(t, t_0) = t/\delta$, если $t \in [0, \delta]$, $\eta_\delta(t, t_0) = -(t - t_0)/\delta$, если $t \in (t_0 - \delta, t_0]$, $\eta_\delta(t, t_0) = 0$, если $t \notin [0, t_0]$.

Теперь вычтем из интегрального тождества (4) для u аналогичное интегральное тождество для $\tilde{u}$ и подставим (см. замечание 3) в получившееся равенство $\psi_i = (w_{ih}\zeta^s\eta_\delta(t, t_0)\exp\{-2\mu t\})_{\bar{h}}$, где $w_i = u_i - \tilde{u}_i$, $i = \overline{1, N}$, s — положительное число, величину которого уточним позже, $0 < h < T - t_0$, $\mu > -K_2$. В результате получим

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_{R, t_0}} \sum_{i=1}^N w_{iht} w_{ih} \zeta^S \eta_\delta \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
& + \iint_{Q_{R, t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^n (a_{ij}(x, t, \delta u) - a_{ij}(x, t, \delta \tilde{u}))_h \zeta^S + \right. \\
& + s \sum_{j=1}^n (a_{ij}(x, t, \delta u) - a_{ij}(x, t, \delta \tilde{u}))_h w_{ih} \zeta^{s-1} D_j \zeta + \\
& + (a_{i0}(x, t, \delta u) - a_{i0}(x, t, \delta \tilde{u}))_h w_{ih} \zeta^s \left. \right\} \eta_\delta \exp\{-2\mu t\} dx dt = \\
& = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_{i0} - \tilde{u}_{i0}) (w_{ih} \zeta^s \eta_\delta \exp\{-2\mu t\})_{\bar{h}}|_{t=0} dx + \\
& + \iint_{Q_{R, t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ (f_{i0} - \tilde{f}_{i0})_h w_{ih} \zeta^s - \right. \\
& - \sum_{j=1}^n (f_{ij} - \tilde{f}_{ij})_h D_j (w_{ih} \zeta^s) \left. \right\} \eta_\delta \exp\{-2\mu t\} dx dt. \quad (6)
\end{aligned}$$

Преобразуем первый член левой части (6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_{R, t_0}} \sum_{i=1}^N w_{iht} w_{ih} \zeta^S \eta_\delta \exp\{-2\mu t\} dx dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^N (w_{ih}^2)_t \zeta^S \eta_\delta \exp\{-2\mu t\} dx dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0} \int_{\Omega_R} |w_h|^2 \zeta^S \exp\{-2\mu t\} dx dt - \\
&- \frac{1}{2\delta} \int_0^\delta \int_{\Omega_R} |w_h|^2 \zeta^S \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
&+ \mu \iint_{Q_{R,t_0}} |w_h|^2 \zeta^S \eta_\delta \exp\{-2\mu t\} dx dt. \tag{7}
\end{aligned}$$

Подставив (7) в (6), перейдем к пределу сначала при $h \rightarrow 0$, а потом при $\delta \rightarrow 0$. Это с учетом замечания 4 даст

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \exp\{-2\mu t_0\} \int_{\Omega_R} |w(x, t_0)|^2 \zeta^S dx + \\
&+ \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^n (a_{ij}(x, t, \delta u) - a_{ij}(x, t, \delta \tilde{u})) (D_j u_i - D_j \tilde{u}_i) + \right. \\
&+ (a_{i0}(x, t, \delta u) - a_{i0}(x, t, \delta \tilde{u})) (u_i - \tilde{u}_i) + \mu (u_i - \tilde{u}_i)^2 \left. \right\} \zeta^S \exp\{-2\mu t\} dx dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^N |u_{i0} - \tilde{u}_{i0}|^2 \zeta^S dx - \\
&- s \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (a_{ij}(x, t, \delta u) - a_{ij}(x, t, \delta \tilde{u})) w_i \zeta^{s-1} (D_j \zeta) \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
&+ \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ (f_{i0} - \tilde{f}_{i0}) w_i \zeta^S - \sum_{j=1}^n (f_{ij} - \tilde{f}_{ij}) D_j (w_i \zeta^S) \right\} \exp\{-2\mu t\} dx dt. \tag{8}
\end{aligned}$$

Используя условия (B), (D) и оценки $|D_j \zeta| \leq 2$, $j = \overline{1, n}$, из (8) находим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \exp\{-2\mu t_0\} \int_{\Omega_R} |w(x, t_0)|^2 \zeta^S dx + \\
&+ \iint_{Q_{R,t_0}} \{K_1 |\nabla w|^2 + (K_2 + \mu) |w|^2 + K_3^* |w|^p\} \zeta^S \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^N |u_{i0} - \tilde{u}_{i0}|^2 \zeta^s dx + \\
&+ 2s \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n A_{ij} \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\sum_{l=1}^n |D_l w_k| + |w_k| \right) \right\} |w_i| \zeta^{S-1} \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
&+ \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}| |w_i| \zeta^S + 2s \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}| |w_i| \zeta^{S-1} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}| |D_j w_i| \zeta^S \right\} \exp\{-2\mu t\} dx dt. \tag{9}
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство

$$\sum_{i=1}^N a_i^p \geq N^{(2-p)/2} \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right), \quad p > 2, \quad a_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}$$

(его легко вывести из неравенства Гельдера) и обозначили

$$K_3^* = K_3 N^{(2-p)/2}.$$

Заметим, что

$$(K_2 + \mu)|w|^2 + 2^{-1} K_3^* |w|^p \geq K_4 |w|^q, \tag{10}$$

где q — произвольное число из отрезка $[2, p]$,

$$K_4 = \min \left\{ K_2 + \mu, \frac{K_3^*}{2} \right\} > 0.$$

Из (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \exp\{-2\mu t_0\} \int_{\Omega_R} |w(x, t_0)|^2 \zeta^S dx + \\
&+ \iint_{Q_{R,t_0}} \left\{ K_1 |\nabla w|^2 + \frac{1}{2} K_3^* |w|^p + K_4 |w|^q \right\} \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^N |u_{i0} - \tilde{u}_{i0}|^2 \zeta^s dx + 2sA \iint_{Q_{R,t_0}} |\nabla w| |w| \zeta^{s-1} \exp\{-2\mu t\} dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2sA \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^2 \zeta^{s-1} \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
& + \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}| |w_i| \zeta^s \exp\{-2\mu t\} + \right. \\
& + 2s \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}| |w_i| \zeta^{s-1} \exp\{-2\mu t\} + \\
& \left. + \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}| |D_j w_i| \zeta^s \exp\{-2\mu t\} \right\} dx dt, \tag{11}
\end{aligned}$$

где

$$A = \left(nN \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем нам потребуется неравенство Юнга

$$ab \leq \varepsilon a^r + M(\varepsilon, r) b^{r'}, \tag{12}$$

где

$$\varepsilon > 0, \quad r > 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad M(\varepsilon, r) = \frac{(r-1)}{r} (r\varepsilon)^{1/(1-r)}.$$

Оценим сверху члены правой части неравенства (11), используя неравенство Гельдера и Юнга, таким образом:

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}| |w_i| \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq \\
& \leq \iint_{Q_{R,t_0}} \left(\sum_{i=1}^N |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}|^{p'} \zeta^s \exp\{-2\mu t\} \right)^{1/p'} \times \\
& \times \left(\sum_{i=1}^N |w_i|^p \zeta^s \exp\{-2\mu t\} \right)^{1/p} dx dt \leq \\
& \leq \varepsilon_1 \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N |w_i|^p \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M(\varepsilon_1, p) \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}|^{p'} \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq \\
& \leq \varepsilon_1 N \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^p \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
& + M(\varepsilon_1, p) \iint_{Q_{R,t_0}} |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}|^{p'} \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt \quad (13)
\end{aligned}$$

(здесь мы использовали неравенство $\left(\sum_{i=1}^N a_i^p\right)^{1/p} \leq N^{1/p} \left(\sum_{i=1}^N a_i^2\right)^{1/2}$, $p > 2$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$),

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}| |D_j w_i| \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq \\
& \leq \varepsilon_2 \iint_{Q_{R,t_0}} |\nabla w|^2 \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
& + M(\varepsilon_2, 2) \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}|^2 \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}| |w_i| \zeta^{s-1} \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq \\
& \leq \varepsilon_3 n \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^2 \zeta^{s-2} \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
& + M(\varepsilon_3, 2) \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}|^2 \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_{R,t_0}} |\nabla w| |w| \zeta^{s-1} \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq \varepsilon_4 \iint_{Q_{R,t_0}} |\nabla w| \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\
& + M(\varepsilon_4, 2) \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^2 \zeta^{s-2} \exp\{-2\mu t\} dx dt, \quad (16)
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ — произвольные числа.

Пусть $q \in (2, p]$. Тогда, приняв

$$a = |w|^2 \zeta^{2s/q} (\exp\{-2\mu t\})^{2/q}, \quad b = \zeta^{s(q-2)/q-1} (\exp\{-2\mu t\})^{(q-2)/q},$$

из неравенства Юнга имеем

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^2 \zeta^{s-1} \exp\{-2\mu t\} dx dt &\leq \varepsilon_5 \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^q \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\ &+ M(\varepsilon_5, q) \iint_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s-q/(q-2)} \exp\{-2\mu t\} dx dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^2 \zeta^{s-2} \exp\{-2\mu t\} dx dt &\leq \varepsilon_6 \iint_{Q_{R,t_0}} |w|^q \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\ &+ M(\varepsilon_6, q) \iint_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s-2q/(q-2)} \exp\{-2\mu t\} dx dt, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0$ — произвольные числа.

Выбрав $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ достаточно малыми, из (11), (13)–(18) получим

$$\begin{aligned} \exp\{-2\mu t_0\} \int_{\Omega_R} |w(x, t_0)|^2 \zeta^s dx &+ \iint_{Q_{R,t_0}} \{|\nabla w|^2 + |w|^p\} \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt \leq \\ &\leq C_3 \iint_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s-2q/(q-2)} \exp\{-2\mu t\} dx dt + \\ &+ C_4 \iint_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s-q/(q-2)} \exp\{-2\mu t\} dx dt + C_5 \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^N |u_{i0} - \tilde{u}_{i0}|^2 \zeta^s dx + \\ &+ C_6 \iint_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0} - \tilde{f}_{i0}|^{p'} + \sum_{j=1}^n |f_{ij} - \tilde{f}_{ij}|^2 \right\} \zeta^s \exp\{-2\mu t\} dx dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть R_0 — произвольное число из промежутка $(0, R)$. Учитывая, что $0 \leq \zeta(x) \leq R$, причем $R - R_0 \leq \zeta(x)$, когда $|x| \leq R_0$, и выбирая $s > 2q/(q-2)$, из (19) легко получаем (5).

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ. Выберем последовательность областей $\{\Omega^m\}$, удовлетворяющую условиям

$$\Omega^m \supset \Omega_m, \quad \text{dist}(\partial\Omega^m \setminus \partial\Omega, \partial\Omega^{m+1} \setminus \partial\Omega) > 0,$$

$\partial\Omega^m$ — кусочно-гладкая поверхность. Очевидно, что

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega^m = \Omega, \quad \text{dist}(0, \partial\Omega^m \setminus \partial\Omega) > m,$$

где O — начало координат. Обозначим

$$Q^m = \Omega^m \times (0, T), \quad \Sigma^m = \partial\Omega^m \times (0, T), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим семейство смешанных задач

$$\begin{aligned} & u_{it}^m - D_j a_{ij}(x, t, \delta u^m) + a_{i0}(x, t, \delta u^m) = \\ & = f_{i0}(x, t) + \sum_{j=1}^n D_j f_{ij}(x, t) \quad \text{в } Q^m, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1_m)$$

$$u_i^m = 0 \quad \text{на } \Sigma^m, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2_m)$$

$$u_i^m|_{t=0} = u_{i0}(x), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3_m)$$

Обобщенным решением задачи (1_m) – (3_m) назовем вектор-функцию $u^m(x, t) = \text{col}(u_1^m(x, t), \dots, u_N^m(x, t))$, компоненты которой принадлежат пространству $\dot{H}^{1,0}(Q^m) \cap L^p(Q^m)$ и удовлетворяют интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \iint_{Q^m} \sum_{i=1}^N \left\{ -u_i^m \psi_{it} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t, \delta u^m) D_j \psi_i + a_{i0}(x, t, \delta u^m) \psi_i \right\} dx dt = \\ & = \int_{\Omega^m} \sum_{i=1}^N u_{i0} \psi_i(x, 0) dx + \int_{\Omega^m} \sum_{i=1}^N \left\{ f_{i0} \psi_i - \sum_{j=1}^n f_{ij} D_j \psi_i \right\} dx dt \end{aligned} \quad (4_m)$$

для любых $\psi_i \in C^1(Q^m)$, таких, что $\psi_i = 0$ на $\partial Q^m \cap \{t > 0\}$, $\overline{1, N}$.

Методом Галёркина, используя условия (А)–(Е), легко показать (см. [18, 19]), что существует единственное обобщенное решение u^m задачи (1_m) , (2_m) . Доопределим u^m нулем на $Q \setminus Q^m$ и полученную функцию опять обозначим через u^m . Покажем, что последовательность

$\{u^m\}$ является фундаментальной в норме $H^{1,0}(Q_\kappa) \cap L^p(Q_\kappa)$, где κ — любое фиксированное натуральное число.

Пусть m, l, ν, κ — произвольные натуральные числа, такие, что $m, l > \nu > 2\kappa$. Поскольку

$$Q^m \supset Q_\nu, \quad Q^l \supset Q_\nu, \quad \partial Q^m \cap \partial Q \supset \partial Q_\nu \cap \partial Q, \quad \partial Q^l \cap \partial Q \supset \partial Q_\nu \cap \partial Q,$$

то справедливо неравенство (5) с $u = u^m$, $\tilde{u} = u^l$, $t_0 = T$, $R_0 = \kappa$, $R = \nu$, $f_{ij} = f_{ij}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{0, n}$ (чтобы показать это, достаточно повторить доказательство леммы). Отсюда

$$\iint_{Q_\kappa} (|\nabla(u^m - u^l)|^2 + |u^m - u^l|^p) dx dt \leq B_1^* \nu^{n-q/(q-2)}, \quad (20)$$

где $B_1^* > 0$ — постоянная, не зависящая от ν .

Выберем $q \in (2, 2n/(n-1))$, если $n > 1$, и $q \in (2, p]$, если $n = 1$. Тогда $n - q(q-2) < 0$ и правую часть неравенства (20) можно сделать как угодно малой за счет выбора достаточно большого значения ν . Отсюда следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\nu \in \mathbb{N}$ ($\nu > 2\kappa$), такое, что при $m, l > \nu$ левая часть (20) меньше ε , т. е. последовательность $\{u^m\}$ фундаментальная в норме $H^{1,0}(Q_\kappa) \cap L^p(Q_\kappa)$, где κ — произвольное натуральное число. Значит, существует функция $u \in H_{\text{loc}}^{1,0}(\bar{Q}) \cap L_{\text{loc}}^p(\bar{Q})$, такая, что

$$u_i^m \rightarrow u_i \quad \text{в} \quad H_{\text{loc}}^1(\bar{Q}) \cap L_{\text{loc}}^p(\bar{Q}), \quad \overline{1, N}. \quad (21)$$

Отсюда и из условия (B) имеем

$$a_{ij}(x, t, \delta u^m) \rightarrow a_{ij}(x, t, \delta u) \quad \text{в} \quad L_{\text{loc}}^2(\bar{Q}), \quad (22)$$

$i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$.

В силу соотношений (21) и условий (A), (C) из последовательности $\{u^m\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u^{m_\nu}\}$, что

$$u_i^{m_\nu}(x, t) \rightarrow u_i(x, t), \quad \nabla u_i^{m_\nu}(x, t) \rightarrow \nabla u_i(x, t) \quad \text{почти всюду на } Q, \quad (23)$$

$$a_{i0}(x, t, \delta u^{m_\nu}(x, t)) \rightarrow a_{i0}(x, t, \delta u) \quad \text{почти всюду на } Q, \quad (24)$$

$$a_{i0}(x, t, \delta u^{m_\nu}(x, t)) \rightarrow \chi_i^*(x, t) \quad \text{слабо в } L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q}), \quad (25)$$

$i = \overline{1, N}$.

Из (24), (25) и леммы из работы [18, с. 25] получим

$$a_{i0}(x, t, \delta u^{m_\nu}) \rightarrow a_{i0}(x, t, \delta u) \quad \text{слабо в } L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q}), \quad i = \overline{1, N}. \quad (26)$$

Теперь покажем, что u — обобщенное решение задачи (1)–(3). Пусть $\psi_i(x, t)$, $i = \overline{1, N}$, — произвольные функции из $C^\infty(\bar{Q})$, которые равны нулю на $\partial Q \cap \{t > 0\}$ и при достаточно больших значениях $|x|$. Тогда для любых $\nu \in \mathbb{N}$, таких, что $\text{supp } \psi_i \subset Q^{m_\nu}$, $i = \overline{1, N}$, имеем (см. (4_m))

$$\begin{aligned} \iint_Q \sum_{i=1}^N \left\{ -u_i^{m_\nu} \psi_{it} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t, \delta u^{m_\nu}) D_j \psi_i + a_{i0}(x, t, \delta u^{m_\nu}) \psi_i \right\} dx dt = \\ = \int_{\Omega^m} \sum_{i=1}^N u_{i0}(x) \psi_i(x, 0) dx + \iint_Q \sum_{i=1}^N \left\{ f_{i0} \psi_i - \sum_{j=1}^n f_{ij} D_j \psi_i \right\} dx dt. \end{aligned}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу, устремив ν к ∞ . В результате, учитывая (21), (22), (26), получим (4). Существование обобщенного решения задачи (1)–(3) доказано.

Оценка обобщенного решения вытекает из (5), если учесть, что в случае, когда $\tilde{f}_{ij} = a_{ij}(x, t, 0)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{0, n}$, вектор-функция $\tilde{u} = \text{col}(0, \dots, 0)$ является обобщенным решением соответствующей задачи.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ. Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — два решения задачи (1), (2). Из леммы, приняв $R = 2R_0$, $t_0 = T$, получим

$$\iint_{Q_{R_0, T}} (|\nabla w|^2 + |w|^p) dx dt \leq B_4(q) R_0^{n-q/(q-2)}, \quad (27)$$

где $w = u_1 - u_2$, а $B_3(q)$ — положительная постоянная, которая не зависит от R_0 . Выберем q таким, чтобы выполнялось неравенство $n - q/(q-2) < 0$, и перейдем в (27) к пределу, устремив R_0 к $+\infty$. В результате получим $w = 0$ почти всюду на Q , что и надо было показать.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ. Пусть

$$\{f_{i0}^k\}_{k=1}^\infty \subset L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q}), \quad \{f_{ij}^k\}_{k=1}^\infty \subset L_{\text{loc}}^2(\bar{Q}), \quad \{u_{i0}^k\} \subset L_{\text{loc}}^2(\bar{Q}) -$$

такие последовательности, что

$$\begin{aligned} f_{i0}^k \rightarrow f_{i0} \quad \text{в } L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q}), \quad f_{ij}^k \rightarrow f_{ij} \quad \text{в } L_{\text{loc}}^2(\bar{Q}), \\ u_{i0}^k \rightarrow u_{i0} \quad \text{в } L_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega}), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

а $\{u^k\}$ — последовательность обобщенных решений соответствующих задач. Покажем, что тогда $u_i^k \rightarrow u_i$ при $k \rightarrow \infty$ в $H_{\text{loc}}^{1,0}(\bar{Q}) \cap L_{\text{loc}}^p(\bar{Q})$, $i = \overline{1, N}$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ — любое число, а Q' — произвольная ограниченная подобласть области Q . Тогда существуют такие числа $0 < t_0 \leq T$, $R_0 \geq 1$, что $Q' \subset Q_{R_0, t_0}$. Возьмем $R > 2R_0$. По лемме имеем

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q'} (|\nabla(u - u^k)|^2 + |u - u^k|^p) dx dt \leq \\
& \leq \iint_{Q_{R_0, t_0}} (|\nabla(u - u^k)|^2 + |u - u^k|^p) dx dt \leq \\
& \leq \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s \left(B_1 R^{n-q/(q-2)} + B_2 \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^N |u_{i0} - u_{i0}^k|^2 dx + \right. \\
& \quad \left. + B_3 \iint_{Q_{R_0, t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0} - f_{i0}^k|^{p'} + \sum_{j=1}^n |f_{ij} - f_{i0}^k|^2 \right\} dx dt \right). \quad (28)
\end{aligned}$$

Пусть $q \in (2, 2n/(n-1))$, если $n > 1$, и $q > 2$ — произвольное, если $n = 1$. Тогда $n - q/(q-2) < 0$. Отсюда следует, что существует такое R , для которого

$$2^s B_1 R^{n-q/(q-2)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (29)$$

Зафиксируем это значение R . Из того, что $f_{i0}^k \rightarrow f_{i0}$ в $L_{\text{loc}}^{p'}(\bar{Q})$, $f_{ij}^k \rightarrow f_{ij}$ в $L_{\text{loc}}^2(\bar{Q})$, $u_{i0}^k \rightarrow u_{i0}$ в $L_{\text{loc}}^2(\bar{Q})$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$, вытекает существование такого $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\begin{aligned}
& 2^s \left(B_2 \int_{\Omega_R} |u_{i0} - u_{i0}^k|^2 dx + \right. \\
& \quad \left. + B_3 \iint_{Q_{R, t_0}} \sum_{i=1}^N \left\{ |f_{i0} - f_{i0}^k|^{p'} + \sum_{j=1}^n |f_{ij} - f_{i0}^k|^2 \right\} dx dt \right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq k_0. \quad (30)
\end{aligned}$$

Поскольку $R > 2R_0$ и, значит,

$$\frac{R}{R - R_0} = \frac{R - R_0 + R_0}{R - R_0} = 1 + \frac{R_0}{R - R_0} \leq 2,$$

то из (29) и (30) следует, что правая часть (28) меньше ε для всех $k \geq k_0$, т. е. то, что нужно было показать. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из теоремы 1 имеем существование единственного обобщенного решения $u(x, t)$ задачи (1)–(3). Пусть $\tilde{\psi}_i(x, t)$, $i = \overline{1, N}$, — произвольные функции из $C_0^\infty(Q)$. Положим в интегральном тождестве (4) $\psi_i(x, t) = \tilde{\psi}_i(x - we^k, t)$, $i = \overline{1, N}$, и под интегралами сделаем замену x на $x + we^k$. В результате, учитывая, что $a_{ij}(x + we^k, t, \delta u(x + we^k, t)) = a_{ij}(x, t, \delta u(x + we^k, t))$ (см. условие 2), придем к выводу, что $u(x + we^k, t)$ является обобщенным решением задачи (1)–(3). Отсюда и из единственности обобщенного решения задачи (1)–(3) следует равенство $u(x + we^k, t) = u(x, t)$ для почти всех $(x, t) \in Q$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. 1935. № 2. С. 199–216.
2. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // УМН. 1976. Т. 31, № 6. С. 142–166.
3. Олейник О. А. Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Там же. 1978. Т. 33, № 3. С. 126.
4. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Там же. С. 7–76.
5. Oleinik O. A. Some Asymptotic Problems of the Theory of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 1996. Lezioni Lincei. Acad. Naz. Lincei.
6. Калашников А. С. О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравн. 1973. Т. 9, № 4. С. 682–691.
7. Brezis H. Semilinear equations in R^n without condition at infinity // Appl. Math. Optim. 1984. V. 12. P. 271–282.
8. Herrero M. A., Pierre M. Cauchy problem for $u_t - \Delta u^m = 0$, when $0 < m < 1$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 291. P. 145–158.
9. Bernis F. Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 106, N 3. P. 217–241.
10. Бокало Н. М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. Вып. 14. С. 3–44.
11. Бокало Н. М. Об однозначной разрешимости задачи без начальных условий для полулинейных параболических уравнений в неограниченных обла-

- стях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 33–40.
12. *Diaz J. I., Oleinik O. A.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of their solutions // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1992. V. 315. P. 787–792.
 13. *Гладков А. Л.* Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 47–64.
 14. *Абдуллаев У. Г.* О существовании неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности со стоком // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33, № 2. С. 232–245.
 15. *Vazquez J. L., Walias M.* Existence and uniqueness of solutions of diffusion-absorption equations with general data // J. Diff. Int. Equations. 1994. V. 7. P. 15–36.
 16. *Курта В. В.* О поведении решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравн. 1994. Т. 30, № 10. С. 1782–1791.
 17. *Guo J. S.* Large time behaviour of solutions of fast diffusion equation with source // Nonlinear Anal. 1994. V. 23, N 12. P. 1559–1568.
 18. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
 19. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.