А. Н. Аверьянов*

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей; единичный период $\Pi = (0,1)^2$; Y_{s} — твердая часть периода Π, строго в нем содержащаяся и состоящая из конечного числа областей с гладкой границей; Y_{f} — часть периода Π, заполненная жидкостью, $Y_{\mathrm{f}} = \Pi \setminus \bar{Y}_{\mathrm{s}}$; W — неограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с заданной 1-периодической структурой, т. е. область, инвариантная относительно сдвигов на векторы $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\bar{W} = \bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}^2} (z + \bar{Y}_{\mathrm{f}})$; ε — малый параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\bar{e}_i$ — единичный вектор вдоль оси x_i. Пусть T_ε — подмножество точек $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$, таких, что

$$\varepsilon(z + \Pi) \subset Q, \quad \rho(\partial Q, \varepsilon(z + \Pi)) \geqslant \varepsilon.$$

Определим перфорированную область Q^ε следующим образом:

$$Q^\varepsilon = Q \setminus \bigcup_{z\in T_\varepsilon} \varepsilon(z + \bar{Y}_{\mathrm{s}}), \quad \partial Q^\varepsilon = \bigcup_{z\in T_\varepsilon} \varepsilon(z + \partial Y_{\mathrm{s}}) \cup \partial Q$$

(т. е. перфорированная область Q^ε получается из области Q, если исключать из нее такие твердые включения $\varepsilon\bar{Y}_{\mathrm{s}}$, для которых соответствующие периоды $\varepsilon\Pi$ расположены вне ε-окрестностей ∂Q). Введем вспомогательные множества:

$$\bar{Q}_1^\varepsilon = \bigcup_{z\in T_\varepsilon} \varepsilon(z + \bar{\Pi}), \quad Q_0^\varepsilon = Q \cap \varepsilon W.$$

Рассмотрим вязкое течение несжимаемой жидкости в области Q^ε:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f(x), \ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \ \text{ в } \ Q^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial Q^\varepsilon} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$f \in C^\infty(\bar{Q}), \quad f_i = (f, \bar{e}_i).$$

Впервые асимптотическое разложение задачи (1) построено в [1] в виде

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &= \varepsilon^2 v_0(x,y) + \varepsilon^3 v_1(x,y) + \ldots, \\ p^\varepsilon &= q(x) + \varepsilon p_0(x,y) + \varepsilon^2 p_1(x,y) + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \in Q^\varepsilon$, $y = x/\varepsilon$, $v_k(x,y)$, $p_k(x,y)$ 1-периодичны по переменной y, $k = (0,1)$. При этом

$$\begin{aligned} v_0(x,y) &= \left(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right) z^i(y), \\ p_0(x,y) &= \left(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right) q^i(y) \end{aligned} \tag{3}$$

(здесь и далее по всем дважды повторяющимся индексам в формулах проводится суммирование), $z^i(y), q^i(y)$ — решение периодической задачи Стокса на ячейке:

$$\begin{cases} -\Delta z^i(y) + \nabla q^i(y) = \bar{e}_i, \ \operatorname{div} z^i(y) = 0 \ \text{ в } \ Y_\mathrm{f}, \\ z^i|_{y \in \partial Y_\mathrm{s}} = 0, \\ z^i(y), q^i(y) \ \ \text{1-периодичны}. \end{cases} \tag{4}$$

Для построение $q(x)$ рассматривается следующая задача Неймана:

$$\begin{cases} K_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left(f_i(x) - \dfrac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right) = 0 \ \text{ в } \ Q, \\ K_{ij} n_j \left(f_i(x) - \dfrac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right) \Big|_{x \in \partial Q} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где n_j — компоненты вектора внешней нормали $\bar{n}$ к границе ∂Q, $\langle \ \rangle$ — оператор усреднения по быстрой переменной y, $K_{ij} = \langle (z^i(y), \bar{e}_j) \rangle$ — положительно определенный и симметричный тензор проницаемости.

Эквивалентной формой записи задачи (5) является следующая:

$$\operatorname{div}\langle v_0(x,y) \rangle = 0 \ \text{ в } \ Q, \quad (\langle v_0(x,y) \rangle, \bar{n})|_{x \in \partial Q} = 0. \tag{6}$$

На ячейке Y_f функции $v_0(x,y)$ и $p_0(x,y)$ удовлетворяют задаче

$$\begin{cases} -\Delta_y v_0(x,y) + \nabla_y p_0(x,y) = f(x) - \nabla q(x), \\ \qquad \operatorname{div}_y v_0(x,y) = 0 \ \text{ в } \ Y_\mathrm{f}, \\ v_0(x,y)|_{y \in \partial Y_\mathrm{s}} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

В [1] доказана следующая теорема об асимптотической сходимости.

Теорема 1 (Тартар). *Существуют продолжения u^ε, p^ε на область Q (u^ε продолжается нулем), такие, что*

$$u^\varepsilon/\varepsilon^2 \to \langle v_0(x,y)\rangle \quad \text{слабо в} \quad (L_2(Q))^2,$$
$$p^\varepsilon \to q(x) \quad \text{сильно в} \quad L_2(Q).$$

В [2] рассматривается задача Стокса в бесконечной периодической области εW в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, при условии, что $f \in (L_2(\mathbb{R}^n))^n$. Для этого случая получена следующая интегральная оценка:

$$\left\| u^\varepsilon(x) - \varepsilon^2 v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{H_1(\varepsilon W)} +$$
$$+ \varepsilon \left\| p^\varepsilon(x) - q(x) - \varepsilon p_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(\varepsilon W)/\mathbb{R}} = O(\varepsilon^2).$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\left\| u^\varepsilon(x) - \varepsilon^2 v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{H_1(Q^\varepsilon)} +$$
$$+ \varepsilon \left\| p^\varepsilon(x) - q(x) - \varepsilon p_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}} = O(\varepsilon^{3/2}).$$

Доказательство этой теоремы будет дано после нескольких лемм.

Технические леммы. Рассмотрим серию вспомогательных задач:

$$\begin{cases} -\Delta w^{k,m}(y) + \nabla h^{k,m}(y) = 0, \\ \qquad \operatorname{div} w^{k,m}(y) = K_{km} - (z^k(y), \bar{e}_m) \quad \text{в} \quad Y_{\mathrm{f}}, \\ w^{k,m}|_{y\in\partial Y_{\mathrm{s}}} = 0, \\ w^{k,m}(y), h^{k,m}(y) \quad \text{1-периодичны.} \end{cases} \tag{8}$$

Существование решения этой задачи вытекает из следующей леммы, доказанной в [3].

Лемма 1. *Пусть 1-периодические вектор-функции $F_k(y) \in (L_2(Y_{\mathrm{f}}))^n$ и функция $\varphi(y) \in L_2(Y_{\mathrm{f}})$, $Y_{\mathrm{f}} \subset \mathbb{R}^n$, $k = (0,1,\ldots,n)$, а граница ∂Y_{s} достаточно гладкая. Тогда система*

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = F_0 + \dfrac{\partial F_k}{\partial y}, \ \operatorname{div} u = \varphi \quad \text{в} \quad Y_{\mathrm{f}}, \\ u|_{y\in\partial Y_{\mathrm{s}}}, \\ u, p \quad \text{1-периодичны,} \end{cases}$$

имеет единственное решение в классе 1-периодических функций $\Longleftrightarrow$ $\langle\varphi\rangle = 0$, при этом $u \in (H_1(Y_{\mathrm{f}}))^n$, $p \in L_2(Y_{\mathrm{f}})/\mathbb{R}$.

Определим $v_1(x,y)$ и $p_1(x,y)$ из (2) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
v_1(x,y) &= w^{k,m}(y)\frac{\partial}{\partial x_m}\left(f_k(x) - \frac{\partial}{\partial x_k}q(x)\right),\\
p_1(x,y) &= h^{k,m}(y)\frac{\partial}{\partial x_m}\left(f_k(x) - \frac{\partial}{\partial x_k}q(x)\right).
\end{aligned} \tag{9}
$$

При помощи (3), (5), (8) и (9) нетрудно показать, что $v_1(x,y)$ и $p_1(x,y)$ удовлетворяют следующей системе:

$$
\begin{cases}
-\Delta_y v_1(x,y) + \nabla_y p_1(x,y) = 0,\\
\qquad \operatorname{div}_y v_1(x,y) = -\operatorname{div}_x v_0(x,y) \quad \text{в} \quad Y_{\mathrm{f}},\\
v_1(x,y)|_{y\in\partial Y_{\mathrm{s}}} = 0.
\end{cases} \tag{10}
$$

Решения задач (7) и (10) параметрически зависят от $x \in \bar{Q}$.

Лемма 2. *Решения периодических задач на ячейке* (4) *и* (8) *являются гладкими вплоть до границы ∂Y_{s} твердого включения Y_{s} и удовлетворяют следующим оценкам:*

$$
\left|D^\beta z^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| + \left|D^\beta q^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| + \left|D^\beta w^{k,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| + \left|D^\beta h^{k,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| = O(\varepsilon^{-k}),
$$
$$
\beta = (\beta_1, \beta_2), \quad |\beta| = k. \tag{11}
$$

Доказательство. Гладкость решения $z^i(y), q^i(y)$ во внутренней точке области W следует из свойств эллиптических операторов. Для доказательства гладкости решения вплоть до границы ∂Y_{s} поместим твердое включение Y_{s} в строго внутреннюю подобласть Q_0 периода П. Задача Дирихле для системы Стокса (относительно $z^i(y)$ и $q^i(y)$), поставленная в $Q_0 \setminus \bar{Y}_{\mathrm{s}}$, обладает гладким решением вплоть до границы ∂Y_{s} в силу общих результатов Темама для неоднородной системы Стокса [4]. Поэтому

$$
|D^\beta z^i(y)| + |D^\beta q^i(y)| \leqslant C_\beta, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2), \quad |\beta| = k.
$$

Переходя к переменной $x = \varepsilon y$, получаем оценку (11) для $z^i(x/\varepsilon)$, $q^i(x/\varepsilon)$. Обоснование гладкости и оценка (11) для $w^{k,m}(x/\varepsilon)$, $h^{k,m}(x/\varepsilon)$ получаются аналогично. Лемма 2 доказана.

Следствие. *Справедлива оценка*

$$
\left|D_x^\beta v_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right| + \left|D_x^\beta p_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right| = O(\varepsilon^{-k}). \tag{12}
$$

Доказательство непосредственно следует из (3), (9), (11).

Решения периодических задач на ячейке (4) и (8) доопределим нулем на твердом включении Y_{s}. Тогда с учетом (3) и (9) имеем

$$
\begin{gathered}
v_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in (H_1(Q))^2, \quad p_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in L_2(Q), \\
v_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{x \in Q^\varepsilon \setminus Q_0^\varepsilon} \equiv 0, \quad p_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{x \in Q^\varepsilon \setminus Q_0^\varepsilon} \equiv 0.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Введем следующие обозначения: τ — натуральный параметр (длина участка границы ∂Q, отсчитываемая от фиксированной точки на ∂Q, принятой за нуль); n — расстояние от данной точки до границы ∂Q. В некоторой окрестности границы ∂Q введем криволинейные координаты (n, τ) и соответствующий им ортонормированный базис $(\bar{n}, \bar{\tau})$. Пусть $x = x(\tau)$ — параметризация границы ∂Q. На границе ∂Q введем функцию $\alpha(\tau)$:

$$
\alpha(\tau) = \left(v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \bar{\tau}\right).
$$

Лемма 3. *Существует функция $\gamma(\tau) \in C^2(\partial Q)$, такая, что*

$$
\begin{gathered}
\operatorname{mes}\operatorname{supp}(\gamma(\tau) - \alpha(\tau)) = O(\varepsilon^2), \\
|D^k\gamma(\tau)| = O(\varepsilon^{-k}), \quad k = 0, 1, 2.
\end{gathered}
$$

Доказательство. Пусть X — множество, состоящее из x_j — точек пересечения границы ∂Q с границей $\partial\varepsilon Y_{\mathrm{s}}$ твердых включений $\varepsilon Y_{\mathrm{s}}$. Количество таких точек имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$, и в них производные функции $\alpha(\tau)$ претерпевают разрыв. Имеем

$$
X = \bigcup x_j \equiv \partial Q \cap \partial\varepsilon W.
$$

Далее, на ∂Q рассмотрим множество V:

$$
\operatorname{mes} V = O(\varepsilon^2), \quad X \subset V \subset \partial Q \cap \varepsilon W.
$$

Согласно (3_1), (9_1) и утверждению леммы 2, на множестве $\partial Q \setminus X$ справедлива оценка

$$
|D^k\alpha(\tau)| = O(\varepsilon^{-k}).
$$

Для построения искомой функции $\gamma(\tau) \in C^2(\partial Q)$ достаточно сгладить функцию $\alpha(\tau)$ на множестве X, переопределив ее на множестве V таким образом, чтобы выполнялась предыдущая асимптотическая оценка. Построенная таким образом функция и является искомой. Лемма 3 доказана.

Введем обозначения

$$
\begin{gathered}
u_0^\varepsilon(x,y) = \varepsilon^2(v_0(x,t) + \varepsilon v_1(x,y)),\\
p_0^\varepsilon(x,y) = \varepsilon p_0(x,y).
\end{gathered} \tag{14}
$$

При помощи (7) и (10) легко видеть, что на бесконечной периодической структуре εW выполнены тождества

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div} u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon(\operatorname{div}_y v_0(x,y))|_{y=x/\varepsilon} + \\
+ \varepsilon^2(\operatorname{div}_x v_0(x,y) + \operatorname{div}_y v_1(x,y))|_{y=x/\varepsilon} + \varepsilon^3(\operatorname{div}_x v_1(x,y))|_{y=x/\varepsilon} = \\
= \varepsilon^3(\operatorname{div}_x v_1(x,y))|_{y=x/\varepsilon} \equiv \varepsilon^3 \tilde g_1(x,\varepsilon);\\
-\Delta u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla p_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = (-\Delta_y v_0(x,y) + \nabla_y p_0(x,y))|_{y=x/\varepsilon} + \\
+ \varepsilon[-(2(\nabla_x,\nabla_y) + \varepsilon\Delta_x)(v_0(x,y) + \varepsilon v_1(x,y)) + \nabla_x p_0(x,y)]|_{y=x/\varepsilon} = \\
= f(x) - \nabla q(x) - \varepsilon[(2(\nabla_x,\nabla_y) + \varepsilon\Delta_x)(v_0(x,y) + \varepsilon v_1(x,y))]|_{y=x/\varepsilon} + \\
+ \varepsilon(\nabla_x p_0(x,y))|_{y=x/\varepsilon} \equiv f(x) - \nabla q(x) + \varepsilon \tilde f_1(x,\varepsilon).
\end{gathered}
$$

В результате для области $Q_0^\varepsilon = Q \cap \varepsilon W$ получаем

$$
\begin{cases}
-\Delta u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla p_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = f(x) - \nabla q(x) + \varepsilon \tilde f(x,\varepsilon),\\
\operatorname{div} u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^3 \tilde g_1(x,\varepsilon) \quad \text{в} \quad Q_0^\varepsilon,\\
u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{x\in\partial Q} = \varepsilon^2\left(v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{x\in\partial Q}.
\end{cases} \tag{15}
$$

Из (12) и (14) следует оценка

$$
|\tilde f_1(x,\varepsilon)| + |\tilde g_1(x,\varepsilon)| \leqslant \mathrm{const}. \tag{16}
$$

Введем новое множество A_ε:

$$
A_\varepsilon = (Q^\varepsilon \setminus Q_1^\varepsilon) \cap \varepsilon W.
$$

Поскольку

$$
Q^\varepsilon \setminus Q_1^\varepsilon = Q \setminus Q_1^\varepsilon \quad \text{и} \quad Q_0^\varepsilon = Q \cap \varepsilon W,
$$

легко видеть, что

$$
A_\varepsilon = (Q \setminus Q_1^\varepsilon) \cap \varepsilon W \subset Q_0^\varepsilon.
$$

Пусть по определению

$$
S_\varepsilon = (Q^\varepsilon \setminus Q_1^\varepsilon) \cap \varepsilon W.
$$

Тогда граница области A_ε имеет вид

$$\partial A_\varepsilon = \partial Q_1^\varepsilon \cup S_\varepsilon \cup (\partial Q \cap \varepsilon \bar{W}).$$

Лемма 4. *Для любой пробной вектор-функции $w \in (H_0^1(Q^\varepsilon))^2$ справедлива следующая оценка*:

$$\left| \int\limits_{S_\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_0^\varepsilon(x, x/\varepsilon)}{\partial n}, w \right) - p_0^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) (w, \bar{n}) \right] ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{3/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)} + \left| \int\limits_{\partial Q_1^\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_0^\varepsilon(x, x/\varepsilon)}{\partial n}, w \right) - p_0^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) (w, \bar{n}) \right] ds \right|.$$

Доказательство. Умножим уравнение (15_1) скалярно на пробную вектор-функцию w и проинтегрируем по области A_ε. В результате получим

$$\int\limits_{A_\varepsilon} (f - \nabla q + \varepsilon \tilde{f}_1, w)\, dx = \int\limits_{A_\varepsilon} (\nabla u_0^\varepsilon, \nabla w)\, dx - \int\limits_{A_\varepsilon} p_0^\varepsilon \operatorname{div} w\, dx +$$

$$+ \int\limits_{S_\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n}, w \right) - p_0^\varepsilon (w, \bar{n}) \right] ds - \int\limits_{\partial Q_1^\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n}, w \right) - p_0^\varepsilon (w, \bar{n}) \right] ds,$$

откуда с учетом приведенных ниже оценок и следует утверждение леммы. При этом использованы оценки (12), (16), тождество (14), неравенство Фридрихса и оценка $\operatorname{mes} A_\varepsilon = O(\varepsilon)$:

$$\left| \int\limits_{A_\varepsilon} (\nabla u_0^\varepsilon, \nabla w)\, dx \right| \leqslant C\varepsilon \int\limits_{A_\varepsilon} |\nabla w|\, dx \leqslant C\varepsilon^{3/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)},$$

$$\left| \int\limits_{A_\varepsilon} p_0^\varepsilon \operatorname{div} w\, dx \right| \leqslant C\varepsilon \int\limits_{A_\varepsilon} |\nabla w|\, dx \leqslant C\varepsilon^{3/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)},$$

$$\left| \int\limits_{A_\varepsilon} (f - \nabla q + \varepsilon \tilde{f}_1, w)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{A_\varepsilon} |w|\, dx \leqslant C\varepsilon^{1/2} \|w\|_{L_2(Q^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{3/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)}.$$

Лемма 5. *Для вектор-функции $w \in (H_0^1(Q^\varepsilon))^2$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{\partial Q_1^\varepsilon} |w|\, ds \leqslant C\varepsilon^{1/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)}.$$

Доказательство. Пусть M_ε — множество тех периодов $\varepsilon\Pi$ ($\varepsilon\Pi \subset \subset Q_1^\varepsilon$), грани которых образуют границу ∂Q_1^ε. Количество таких периодов имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$. На периоде Π рассмотрим следующую вектор-функцию: $h\colon Y_{\mathrm{f}} \to \mathbb{R}$, $h(y) = w(\varepsilon y)$, где $y = x/\varepsilon$. Поскольку $h|_{y\in\partial Y_{\mathrm{s}}} = 0$, то

$$\|h\|_{L_2(Y_{\mathrm{f}})} \leqslant C\|\nabla h\|_{L_2(Y_{\mathrm{f}})}.$$

Тогда

$$\|h\|_{L_2(\partial\Pi)} \leqslant C\|h\|_{H_1(Y_{\mathrm{f}})} \leqslant C\|\nabla h\|_{L_2(Y_{\mathrm{f}})}.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\|w\|_{L_2(\partial\varepsilon\Pi)} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\nabla w\|_{L_2(\varepsilon Y_{\mathrm{f}})}.$$

Поэтому

$$\|w\|_{L_1(\partial\varepsilon\Pi)} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|w\|_{L_2(\partial\varepsilon\Pi)} \leqslant C\varepsilon\|\nabla w\|_{L_2(\varepsilon Y_{\mathrm{f}})}.$$

Суммируя предыдущую оценку по множеству M_ε, при помощи очевидного неравенства

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j)^{1/2}\right)^2 \leqslant (n+1)\sum_{j=1}^{n} a_j, \quad a_j \geqslant 0,$$

заключаем:

$$\int\limits_{\partial Q_1^\varepsilon} |w|\,ds \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)}.$$

В [1] доказана следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть 1-периодическая вектор-функция $v(y)$ принадлежит $(H_1(Y_{\mathrm{f}}))^2$,*

$$\operatorname{div} v(y) = 0 \ \text{ в } \ Y_{\mathrm{f}}, \quad v|_{y\in\partial Y_{\mathrm{s}}} = 0,$$

а S_k — одна из граней периода Π с нормалью $\bar n$. Тогда

$$(\langle v\rangle, \bar n) = \int\limits_{S_k}(v, \bar n)\,ds \equiv (\langle v\rangle_{S_k}, \bar n).$$

Лемма 7. *Имеет место следующая оценка:*

$$\left|\int\limits_0^\tau \left(v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \bar n\right)\,ds\right| = O(\varepsilon), \quad x = x(\tau) \in \partial Q.$$

Доказательство. Точки границы ∂Q (с координатами 0 и τ соответственно) соединим отрезками s_0 и s_τ с вершинами ближайших ребер периодов $\varepsilon\Pi$ на ∂Q_1^ε. Длина отрезков s_0 и s_τ имеет порядок $O(\varepsilon)$. Часть границы на ∂Q_1^ε, ограниченную s_0 и s_τ (и лежащую в $C\varepsilon$-окрестности участка $[0,\tau]$ границы ∂Q), обозначим L_ε.

По построению ломаная L_ε состоит из целого числа граней периодов $\varepsilon\Pi$. Область, ограниченную участком $[0,\tau]$ границы ∂Q, отрезками s_0, s_τ и ломаной L_ε, обозначим B_ε,

$$B_\varepsilon \subset Q^\varepsilon \setminus \bar{Q}_1^\varepsilon, \quad \operatorname{mes} B_\varepsilon = O(\varepsilon).$$

Из (15_2) и (13), (14) следует, что

$$\operatorname{div} u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^3 \tilde{g}_1(x,\varepsilon) \ \text{ в } \ Q^\varepsilon.$$

Интегрируя это равенство по области B_ε, с учетом (14_1) получаем

$$\varepsilon^3 \int\limits_{B_\varepsilon} \tilde{g}_1(x,\varepsilon)\,dx = \varepsilon^2 \int\limits_0^\tau (v_0 + \varepsilon v_1, \bar{n})\,ds + \varepsilon^2 \int\limits_{L_\varepsilon} (v_0 + \varepsilon v_1, \bar{n})\,ds + \\ + \varepsilon^2 \int\limits_{s_0} (v_0 + \varepsilon v_1, \bar{n})\,ds + \varepsilon^2 \int\limits_{s_\tau} (v_0 + \varepsilon v_1, \bar{n})\,ds,$$

откуда

$$\left| \int\limits_0^\tau (v_0, \bar{n})\,ds \right| \leqslant C\varepsilon + \left| \int\limits_{L_\varepsilon} (v_0, \bar{n})\,ds \right|. \tag{17}$$

Далее проинтегрируем равенство (6) по области B_ε. Получим

$$\left| \int\limits_{L_\varepsilon} (\langle v_0 \rangle, \bar{n})\,ds \right| = \left| \int\limits_{s_0} (\langle v_0 \rangle, \bar{n})\,ds + \int\limits_{s_\tau} (\langle v_0 \rangle, \bar{n})\,ds \right| = O(\varepsilon). \tag{18}$$

Покажем, что

$$\left| \int\limits_{L_\varepsilon} (v_0 - \langle v_0 \rangle, \bar{n})\,ds \right| = O(\varepsilon),$$

тогда из (17) и (18) будет следовать искомая оценка. Действительно, из (3_1) имеем

$$v_0(x,y) = \left(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right) z^i(y).$$

По лемме 6 на каждой грани S периода Π имеет место тождество

$$((\langle z^i(y)\rangle, \bar{n}) = \int\limits_S (z^i(y), \bar{n})\, ds \equiv (\langle z^i(y)\rangle_S, \bar{n}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\varepsilon S} (v_0 - \langle v_0\rangle, \bar{n})\, ds = \int\limits_{\varepsilon S} \left(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x)\right) \left(z^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle z^i(y)\rangle, \bar{n}\right) ds =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon S} \left(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x)\right) \left(z^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle z^i(y)\rangle_S, \bar{n}\right) ds. \tag{19}$$

Далее действуем стандартным образом [5].

Пусть фиксирована точка $x_0 \in \varepsilon S$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon S} \left(f_i(x_0) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x_0)\right) \left(z^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle z^i(y)\rangle_S, \bar{n}\right) ds = 0.$$

В силу утверждения леммы 2 и условия Липшица имеем

$$|(z^i(x/\varepsilon) - \langle z^i(y)\rangle_S, \bar{n})| \leqslant \mathrm{const},$$

$$\left|\left(f_i - \frac{\partial q}{\partial x_i}\right)(x) - \left(f_i - \frac{\partial q}{\partial x_i}\right)(x_0)\right| \leqslant C|x - x_0| = O(\varepsilon).$$

В результате из (19) получаем

$$\left|\int\limits_{\varepsilon S} (v_0 - \langle v_0\rangle, \bar{n})\, ds\right| = \left|\int\limits_{\varepsilon S} \left[\left(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(f_i(x_0) - \frac{\partial}{\partial x_i} q(x_0)\right)\right] \left(z^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle z^i(y)\rangle_S, \bar{n}\right) ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\varepsilon S} |x - x_0|\, ds = O(\varepsilon^2).$$

Суммируя полученное неравенство по всем граням εS, образующим ломаную L_ε, окончательно получаем

$$\left|\int\limits_{L_\varepsilon} (v_0 - \langle v_0\rangle, \bar{n})\, ds\right| = O(\varepsilon).$$

Лемма 7 доказана.

В [1] доказана следующая лемма.

Лемма 8 (Тартар). *Существует линейный оператор*

$$R_\varepsilon\colon (H_0^1(Q))^2 \to (H_0^1(Q^\varepsilon))^2,$$

такой, что

$$\text{если}\quad w|_{Q^\varepsilon} \in (H_0^1(Q^\varepsilon))^2, \quad \text{то}\quad R_\varepsilon w = w|_{Q^\varepsilon} \tag{20}$$

(т. е. если сужение вектор-функции w из $(H_0^1(Q))^2$ на область Q^ε принадлежит пространству $(H_0^1(Q^\varepsilon))^2$, то это сужение и является образом для w),

$$\text{если}\quad \operatorname{div} w = 0, \quad \text{то}\quad \operatorname{div}(R_\varepsilon w) = 0, \tag{21}$$

и выполнены оценки

$$\|R_\varepsilon w\|_{L_2(Q^\varepsilon)} \leqslant C\|w\|_{L_2(Q)} + C\varepsilon\|\nabla w\|_{L_2(Q)}, \tag{22}$$

$$\|\nabla(R_\varepsilon w)\|_{L_2(Q^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|w\|_{L_2(Q)} + C\|\nabla w\|_{L_2(Q)}. \tag{23}$$

Лемма 9. *Для любой функции $p(x)$ из $L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}$ имеет место оценка*

$$\|p\|_{L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla p\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)}. \tag{24}$$

Доказательство. Определим функционал F_ε из $(H_{-1}(Q))^2$ следующим образом:

$$(F_\varepsilon, w) = (\nabla p, R_\varepsilon w) = -(p, \operatorname{div}(R_\varepsilon w)). \tag{25}$$

Тогда с учетом оценок (23), (25) находим

$$|(F_\varepsilon, w)| \leqslant \|\nabla p\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)}\|R_\varepsilon w\|_{H_1(Q^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla p\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)}\|w\|_{H_1(Q)}.$$

Поэтому

$$\|F_\varepsilon\|_{H_{-1}(Q)} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla p\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)}. \tag{26}$$

Для любой $w \in (H_0^1(Q))^2$, такой, что $\operatorname{div} w = 0$, с учетом (21) и (25) имеем

$$(F_\varepsilon, w) = (\nabla p, R_\varepsilon w) = -(p, \operatorname{div}(R_\varepsilon w)) = 0.$$

Поэтому (в силу ортогональности подпространств потенциальных и соленоидальных вектор-функций) существует такая функция $q(x) \in L_2(Q)/\mathbb{R}$, что

$$F_\varepsilon = \nabla q \quad \text{в}\quad (H_{-1}(Q))^2. \tag{27}$$

В силу (20) сужение F_ε на область Q^ε совпадает с ∇p, т. е.

$$(F_\varepsilon, w)|_{Q^\varepsilon} = (\nabla p, w|_{Q^\varepsilon}),$$

поэтому

$$F_\varepsilon = \nabla q = \nabla p \quad \text{на} \quad Q^\varepsilon.$$

Легко видеть, что существует такая постоянная C_1, что

$$p(x) + C_1 = q(x)|_{Q^\varepsilon}. \tag{28}$$

Действительно, пусть $p(x) + C_1 - q(x)$ принадлежит $L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}$. Тогда имеем

$$\|p(x) + C_1 - q(x)\|_{L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}} \leqslant C(Q^\varepsilon)\|\nabla p - \nabla q\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)} = 0.$$

В результате при помощи (28), (27), (26) получаем искомую оценку:

$$\|p\|_{L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}} \leqslant \|p + C_1\|_{L_2(Q^\varepsilon)} = \|q\|_{L_2(Q^\varepsilon)} \leqslant \|q\|_{L_2(Q)/\mathbb{R}} \leqslant$$
$$\leqslant C(Q)\|\nabla q\|_{H_{-1}(Q)} = C(Q)\|F_\varepsilon\|_{H_{-1}(Q)} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla p\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)}.$$

Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 2. Введем невязки скорости и давления

$$\begin{gathered} \tilde{u}^\varepsilon(x,y) = u^\varepsilon(x) - u_0^\varepsilon(x,y), \\ \tilde{p}^\varepsilon(x,y) = p^\varepsilon(x) - q(x) - p_0^\varepsilon(x,y). \end{gathered} \tag{29}$$

Из (12) и (13) имеем

$$u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{x\in Q^\varepsilon\setminus Q_0^\varepsilon} \equiv 0, \quad p_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{x\in Q^\varepsilon\setminus Q_0^\varepsilon} \equiv 0.$$

Теперь рассмотрим дифференциальное выражение

$$-\Delta u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla p_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

как элемент из $(H_{-1}(Q^\varepsilon))^2$. Пусть $w \in (H_0^1(Q^\varepsilon))^2$ — пробная вектор-функция. Тогда с учетом (15) имеем

$$\left(\left(-\Delta u_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla p_0^\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{Q^\varepsilon}, w\right) =$$
$$= \int\limits_{Q^\varepsilon} (\nabla u_0^\varepsilon, \nabla w)\, dx - \int\limits_{Q^\varepsilon} p_0^\varepsilon \operatorname{div} w\, dx = \int\limits_{Q_0^\varepsilon} (\nabla u_0^\varepsilon, \nabla w)\, dx - \int\limits_{Q_0^\varepsilon} p_0^\varepsilon \operatorname{div} w\, dx =$$

$$= \int\limits_{Q_0^\varepsilon} \left(-\Delta u_0^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \nabla p_0^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right), w \right) \, dx + \int\limits_{S_\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n}, w \right) - p_0^\varepsilon (w, \bar{n}) \right) ds =$$

$$= \int\limits_{Q_0^\varepsilon} (f(x) - \nabla q(x) + \varepsilon \tilde{f}_1(x, \varepsilon), w) \, dx + \int\limits_{S_\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n}, w \right) - p_0^\varepsilon (w, \bar{n}) \right) ds$$

$$\left(\partial Q_0^\varepsilon = \left(\bigcup_{z \in T_\varepsilon} \varepsilon(z + \partial Y_{\mathrm{s}}) \right) \cup (\varepsilon \bar{W} \cap \partial Q) \cup S_\varepsilon; \quad w|_{\partial Q_0^\varepsilon \setminus S_\varepsilon} = 0 \right).$$

В результате для невязок $\tilde{u}^\varepsilon(x, x/\varepsilon)$, $\tilde{p}^\varepsilon(x, x/\varepsilon)$ при помощи оценок (1), (14_1), (15) и (29) получаем

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \nabla \tilde{p}^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = F_1 + F_2 + F_3, \\ \operatorname{div} \tilde{u}^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \varepsilon^3 \tilde{g}_1(x, \varepsilon), \\ \tilde{u}^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \Big|_{x \in \partial Q^\varepsilon} = -\varepsilon^2 \left(v_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \Big|_{x \in \partial Q^\varepsilon}, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$F_1(w) = \int\limits_{S_\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial u_0^\varepsilon(x, x/\varepsilon)}{\partial n}, w \right) - p_0^\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) (w, \bar{n}) \right) ds,$$

$$F_2(w) = \int\limits_{Q^\varepsilon \setminus Q_0^\varepsilon} (f(x) - \nabla q(x), w) \, dx, \quad F_3(w) = \varepsilon \int\limits_{Q_0^\varepsilon} (\tilde{f}_1(x, \varepsilon), w) \, dx.$$

С учетом лемм 4 и 5 легко видеть, что выполнена оценка

$$|F_1(w)| \leqslant C \varepsilon^{3/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)}. \tag{31}$$

Поскольку $\operatorname{mes}(Q^\varepsilon \setminus Q_0^\varepsilon) = O(\varepsilon)$ и для любого $x \in Q$

$$|f(x) - \nabla q(x)| \leqslant \mathrm{const},$$

то при помощи неравенства Фридрихса получаем

$$|F_2(w)| \leqslant C \varepsilon^{1/2} \|w\|_{L_2(Q^\varepsilon)} \leqslant C \varepsilon^{3/2} \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)}. \tag{32}$$

Используя (16), находим

$$|F_3(w)| \leqslant C \varepsilon \|w\|_{L_2(Q^\varepsilon)} \leqslant C \varepsilon^2 \|\nabla w\|_{L_2(Q^\varepsilon)}. \tag{33}$$

Из (31)—(33) следует, что

$$\sum_{i=1}^{3} \|F_i\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)} = O(\varepsilon^{3/2}). \tag{34}$$

Далее, пусть

$$h \in (H_1(Q^\varepsilon))^2,$$

где

$$h|_{\partial Q^\varepsilon} = -\varepsilon^2 \left(v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{x\in\partial Q^\varepsilon}, \tag{35}$$

тогда, умножая (30_1) скалярно на $\tilde{u}^\varepsilon(x, x/\varepsilon) - h(x)$, имеем

$$\int\limits_{Q^\varepsilon} (\nabla\tilde{u}^\varepsilon, \nabla\tilde{u}^\varepsilon - \nabla h)\, dx - \int\limits_{Q^\varepsilon} \tilde{p}^\varepsilon(\varepsilon^3\tilde{g}_1 - \operatorname{div} h)\, dx = \sum_{j=1}^{3} F_j(\tilde{u}^\varepsilon - h). \tag{36}$$

Из (34) следует оценка

$$\begin{aligned} |F_j(\tilde{u}^\varepsilon - h)| &\leqslant \|F_j\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)} \|\tilde{u}^\varepsilon - h\|_{H_1(Q^\varepsilon)} \leqslant \\ &\leqslant C\varepsilon^{3/2}(\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)} + \|\nabla h\|_{L_2(Q^\varepsilon)}). \end{aligned} \tag{37}$$

При помощи оценок (16) и (37) получаем из (36)

$$\begin{aligned} \|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|^2_{L_2(Q^\varepsilon)} &\leqslant (C\varepsilon^{3/2} + \|\nabla h\|_{L_2(Q^\varepsilon)})\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)} + \\ &+ (C\varepsilon^3 + \|\operatorname{div} h\|_{L_2(Q^\varepsilon)})\|\tilde{p}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}} + C\varepsilon^{3/2}\|\nabla h\|_{L_2(Q^\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{38}$$

Кроме того, из (30_1) и (34) имеем

$$\|\nabla\tilde{p}^\varepsilon\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)} \leqslant \|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{3} \|F_j\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{3/2} + \|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)}.$$

С учетом утверждения леммы 9 находим

$$\|\tilde{p}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)/\mathbb{R}} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla\tilde{p}^\varepsilon\|_{H_{-1}(Q^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{1/2} + C\varepsilon^{-1}\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)}.$$

Подставляя данную оценку в (38), заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|^2_{L_2(Q^\varepsilon)} &\leqslant (C\varepsilon^{3/2} + \|\nabla h\|_{L_2(Q^\varepsilon)} + \varepsilon^{-1}\|\operatorname{div} h\|_{L_2(Q^\varepsilon)})\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|_{L_2(Q^\varepsilon)} + \\ &+ C\varepsilon^{3/2}(\varepsilon^{3/2} + \|\nabla h\|_{L_2(Q^\varepsilon)}) + C\varepsilon^{1/2}\|\operatorname{div} h\|_{L_2(Q^\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно предъявить вектор-функцию $h(x)$, удовлетворяющую оценке

$$\|\nabla h\|_{L_2(Q^\varepsilon)} + \varepsilon^{-1}\|\operatorname{div} h\|_{L_2(Q^\varepsilon)} = O(\varepsilon^{3/2}). \tag{39}$$

Теорема 3. *Существует вектор-функция $h(x)$, удовлетворяющая условию* (35), *для которой справедлива оценка* (39).

Доказательство. Введем пару срезающих функций $\mu_j(x)$, $j = 1, 2$, таких, что

$$\begin{gathered} \mu_j \in C^2(\mathbb{R}^+), \quad \|\mu_j\|_{C^2(\mathbb{R}^+)} \leqslant \mathrm{const}, \quad \operatorname{supp}\mu_j \subset [0, 1/2], \\ \mu_1(0) = 0, \quad \mu_1'(0) = -1, \quad \mu_2(0) = 1, \quad \mu_2'(0) = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

Далее, пусть

$$C_\varepsilon = (\operatorname{mes}\partial Q)^{-1} \int\limits_{Q^\varepsilon} \tilde{g}_1(x, \varepsilon)\, dx.$$

Из (16) имеем

$$|C_\varepsilon| \leqslant \mathrm{const}\,. \tag{41}$$

Введем вектор $\beta(\tau)$, определенный на границе ∂Q:

$$\beta(\tau) = v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - C_\varepsilon \varepsilon \bar{n}, \quad x = x(\tau).$$

Из леммы 7 следует, что

$$\left| \int\limits_0^\tau (\beta, \bar{n})\, ds \right| = O(\varepsilon), \tag{42}$$

а при помощи оценки (12) находим

$$|\beta(\tau)| + \varepsilon|\beta'(\tau)| \leqslant \mathrm{const}\,. \tag{43}$$

Так как из (15_2) следует, что

$$\int\limits_{\partial Q} \left(v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \bar{n}\right) ds = \varepsilon \int\limits_{Q^\varepsilon} \tilde{g}_1(x, \varepsilon)\, dx,$$

то выполнено

$$\int\limits_{\partial Q} (\beta, \bar{n})\, ds = 0.$$

Пусть $V_\varepsilon = \{x \mid x \in Q,\ \rho(\partial Q, x) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность границы ∂Q. В V_ε рассмотрим следующую функцию тока $\Psi_\varepsilon(n, \tau)$:

$$\Psi_\varepsilon(n, \tau) = \varepsilon \mu_1\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right) \gamma(\tau) - \mu_2\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right) \int\limits_0^\tau (\beta, \bar{n})\, ds$$

(здесь $\gamma(\tau)$ — функция, построенная в лемме 3). Для нее выполнены оценки

$$|D^k\gamma(\tau)| = O(\varepsilon^{-k}), \quad k = (0,1,2), \tag{44}$$

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp}\left(\gamma(\tau) - \left(v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \bar{\tau}\right)\right) = O(\varepsilon^2). \tag{45}$$

Кроме того, пусть на множестве $Q \setminus V_\varepsilon$ по определению $\Psi_\varepsilon \equiv 0$. Легко видеть, что в V_ε выполнены равенства

$$\left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial n}\right|_{n=0} = -\mu_1'(0)\gamma(\tau) + \varepsilon^{-1}\mu_2'(0)\int\limits_0^\tau(\beta,\bar{n})\,ds = \gamma(\tau), \tag{46}$$

$$\left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial \tau}\right|_{n=0} = \varepsilon\mu_1(0)\gamma'(\tau) - \mu_2(0)(\beta(\tau),\bar{n}) = -(\beta(\tau),\bar{n}). \tag{47}$$

Далее от криволинейных координат (n,τ) в окрестности ∂Q переходим к декартовым координатам $x = (x_1, x_2)$ и по функции тока Ψ_ε в Q строим соленоидальный вектор

$$w^{\text{sol}} = w_1^{\text{sol}}\bar{e}_1 + w_2^{\text{sol}}\bar{e}_2 \equiv -\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x_2}\bar{e}_1 + \frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x_1}\bar{e}_2.$$

На границе ∂Q выполнены равенства

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial n}\right|_{n=0} = \cos\varphi, \quad \left.\frac{\partial x_2}{\partial n}\right|_{n=0} = \sin\varphi, \tag{48}$$

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right|_{n=0} = -\sin\varphi, \quad \left.\frac{\partial x_2}{\partial \tau}\right|_{n=0} = \cos\varphi \tag{49}$$

(φ — угол между внешней нормалью $\bar{n}$ и единичным ортом $\bar{e}_1$).

Из (46)—(49) получаем

$$\gamma(\tau) = \left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial n}\right|_{n=0} = \left.\frac{\partial x_1}{\partial n}\right|_{n=0}\cdot\left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x_1}\right|_{\partial Q} + \left.\frac{\partial x_2}{\partial n}\right|_{n=0}\cdot\left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x_2}\right|_{\partial Q} =$$
$$= \cos\varphi\cdot w_2^{\text{sol}}|_{\partial Q} - \sin\varphi\cdot w_1^{\text{sol}}|_{\partial Q} = (w^{\text{sol}}|_{\partial Q},\bar{\tau});$$
$$-(\beta(\tau),\bar{n}) = \left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial \tau}\right|_{n=0} = \left.\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right|_{n=0}\cdot\left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x_1}\right|_{\partial Q} + \left.\frac{\partial x_2}{\partial \tau}\right|_{n=0}\cdot\left.\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x_2}\right|_{\partial Q} =$$
$$= -\sin\varphi\cdot w_2^{\text{sol}}|_{\partial Q} - \cos\varphi\cdot w_1^{\text{sol}}|_{\partial Q} = -(w^{\text{sol}}|_{\partial Q},\bar{n}).$$

Поэтому

$$w^{\text{sol}}|_{\partial Q} = (\beta(\tau),\bar{n})\bar{n} + \gamma(\tau)\cdot\bar{\tau}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2\Psi_\varepsilon}{\partial n^2} = \varepsilon^{-1}\mu_1''\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\gamma(\tau) - \varepsilon^{-2}\mu_2''\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\int\limits_0^\tau (\beta,\bar n)\,ds,$$

$$\frac{\partial^2\Psi_\varepsilon}{\partial \tau^2} = \varepsilon\mu_1\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\gamma''(\tau) - \mu_2\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)(\beta'(\tau),\bar n),$$

$$\frac{\partial^2\Psi_\varepsilon}{\partial n\partial\tau} = -\varepsilon\mu_1'\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\gamma'(\tau) + \varepsilon^{-1}\mu_2'\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)(\beta(\tau),\bar n),$$

откуда при помощи оценок (40), (42)—(44) находим

$$|D_{xx}\Psi_\varepsilon| = O(\varepsilon^{-1}), \quad \|\nabla w^{\mathrm{sol}}\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{-1/2}).$$

Введем вектор-функцию w_3 следующим образом:

$$w_3 = C_\varepsilon\cdot\varepsilon\mu_2\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\cdot\bar n \ \text{ в } \ V_\varepsilon,$$
$$w_3 \equiv 0 \ \text{ в } \ Q\setminus V_\varepsilon.$$

Для нее выполнено

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} w_3 = O(\varepsilon), \quad w_3|_{\partial Q} = C_\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\bar n,$$
$$|\operatorname{div} w_3| \leqslant |\nabla w_3| \leqslant \mathrm{const},$$
$$\|\nabla w_3\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{1/2})$$

(используются оценки (40) и (41)). Наконец, пусть по определению

$$w_4 = \mu_2\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\left(\left(v_0\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),\bar\tau\right) - \gamma(\tau)\right)\bar\tau \ \ (x = x(\tau)\in\partial Q).$$

Тогда в силу (40), (44) и (45) получаем

$$w_4|_{\partial Q} = \left(\left(v_0\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),\bar\tau\right) - \gamma(\tau)\right)\bar\tau, \quad \operatorname{mes}\operatorname{supp} w_4 = O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial n} = -\varepsilon^{-1}\mu_2'\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\left(\left(v_0\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),\bar\tau\right) - \gamma(\tau)\right)\bar\tau,$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial \tau} = \mu_2\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right)\frac{d}{d\tau}\left(\left(v_0\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),\bar\tau\right) - \gamma(\tau)\right)\bar\tau,$$

$$|\nabla w_4| = O(\varepsilon^{-1}), \quad \|\nabla w_4\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{1/2}).$$

В результате искомый вектор $h(x)$ имеет следующий вид:

$$h(x) = \varepsilon^2(w^{\mathrm{sol}} + w_3 + w_4).$$

Автор выражает благодарность Т. Д. Вентцель за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. С. 170—177, 184—185, 438—447.
2. *Жиков В. В.* Усреднение уравнения Стокса в перфорированных средах // ДАН. 1993. Т. 334, № 2.
3. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
4. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. М.: Мир, 1981. С. 35, 37.
5. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. С. 14—15.