ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2019 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2019. Т. 55. № 6)**).

DOI: 10.1134/S0374064119110128

И. Н. Сергеев (Москва) “О зависимости и независимости перроновских и ляпуновских свойств устойчивости от фазовой области системы” (27 сентября 2019 г.).

Для заданной открытой и связной области $G\subset\mathbb{R}^n$, являющейся окрестностью нуля и называемой *фазовой областью*, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot x=f(t,x),\quad f(\cdot,0)\equiv 0,\quad x\in G,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,\infty),\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G). \tag{1}$$

Определение 1 [1]. Систему (1) (точнее, её *нулевое* решение) назовём:

1) *устойчивой* (*асимптотически*) *по Перрону*, если для любого $\varepsilon>0$ (соответственно для $\varepsilon=0$) существует такое $\delta>0$, что любое решение x с начальным условием $|x(0)|<\delta$ удовлетворяет неравенству

$$\varliminf_{t\to\infty}|x(t)|\leqslant\varepsilon, \tag{2}$$

а если система (1) не является устойчивой по Перрону, то назовём её *неустойчивой по Перрону*;

2) *вполне неустойчивой по Перрону*, если для некоторых $\varepsilon,\delta>0$ ни одно ненулевое решение x с начальным условием $|x(0)|<\delta$ не удовлетворяет неравенству (2) (в частности, определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$).

Перроновские свойства устойчивости из определения 1 являются аналогами соответствующих *ляпуновских* свойств [2, гл. II]: *устойчивости* (*асимптотической*), *неустойчивости* и *полной неустойчивости* (последняя означает, что для некоторых $\varepsilon,\delta>0$ ни одно ненулевое решение x с начальным условием $|x(0)|<\delta$ не удовлетворяет неравенству $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)|\leqslant\varepsilon$).

Все четыре ляпуновские свойства устойчивости, а также свойства перроновской неустойчивости и перроновской полной неустойчивости инвариантны относительно операции уменьшения фазовой области системы, что и утверждает

Теорема 1. *Если система устойчива по Ляпунову, возможно даже асимптотически, или неустойчива по Перрону или по Ляпунову, возможно даже вполне, то при её сужении на любую подобласть исходной фазовой области ни одно из этих свойств не нарушается.*

Этот вывод не распространяется на перроновскую устойчивость и на перроновскую асимптотическую устойчивость, поскольку справедлива

Теорема 2. *Существует такая асимптотически устойчивая по Перрону линейная ограниченная система с фазовой областью* $\mathbb{R}^n$, *что:*

1) выкалывание из области $\mathbb{R}^n$ *любой одной ненулевой точки делает систему неустойчивой по Перрону;*

2) сужение системы на любую ограниченную подобласть области $\mathbb{R}^n$ *приводит к её полной неустойчивости по Перрону.*

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков. В настоящее время руководители семинара – Н.Х. Розов, И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Более того, при отсутствии ляпуновской устойчивости никакая перроновская устойчивость не инвариантна относительно уменьшения фазовой области, так как верна

Теорема 3. *Если система неустойчива по Ляпунову, возможно даже вполне, то её сужение на некоторую фазовую подобласть исходной фазовой области приводит к неустойчивости и по Перрону, соответственно даже полной.*

Определение 2 [2, гл. IV]. В случае, когда системе (1) можно поставить в соответствие *линейную* систему *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \equiv f'_x(t,0) \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,x) - A(t)x| = o(x) \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{3}$$

правая часть $A(t)x$ системы (3) называется *линейным приближением* для системы (1). Скажем, что некоторое линейное приближение, или сама система (3) первого приближения, *обеспечивает* заданное перроновское или ляпуновское свойство устойчивости, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением.

Свойство первого приближения обеспечивать какую-либо устойчивость (неустойчивость) уже, несмотря на теоремы 2 и 3, является инвариантным относительно выбора фазовой области, а значит, не зависит и от самого факта её фиксации, что и подтверждает

Теорема 4. *Если первое приближение обеспечивает какое-либо из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости для некоторой фиксированной фазовой области, то оно обеспечивает то же свойство и для любой другой фазовой области.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Б. С. Калитин (Минск) “Дополнение к теореме Ляпунова для полудинамических систем” (4 октября 2019 г.).

Доклад посвящён развитию метода функций Ляпунова [1, гл. 1; 2, гл. 1; 3, гл. 5; 4–7] для задач устойчивости компактных положительно инвариантных множеств полудинамических систем $(X,\mathbb{R}^+,\pi)$, определяемых на произвольном пространстве X с метрикой d.

Определение. Значения $\psi(x,t)$ непрерывной функции $\psi\colon X\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ назовём *длиной* отрезка $x[0,t]$ движения $x:\tau\mapsto x\tau$ $(\tau\in\mathbb{R}^+)$ полудинамической системы, если для любого $x\in X$ выполнены условия:

1) $\psi(x,0)=0$;

2) $\psi(x,t_1)-\psi(x,t_2)\geqslant d(xt_1,xt_2)$, $t_1>t_2\geqslant 0$;

3) $\psi(x,t_1)=\psi(x,t_2)+\psi(xt_2,t_1-t_2)$, $t_1>t_2\geqslant 0$,

а множество всех таких функций ψ обозначим через Ψ.

Теорема 1 [8]. *Если для некоторой окрестности U компактного положительно инвариантного множества $M\subset X$ существуют непрерывные функции $V\colon U\to\mathbb{R}^+$ и $\psi\in\Psi$, подчинённые условиям:*

1) $V(x)\geqslant 0$, $x\in U\setminus M$, и $V(x)=0$, $x\in M$;

2) M устойчиво относительно множества $Y_0=\{x\in U\backslash M : V(x)=0\}$;

3) $V(xt)\leqslant V(x)-\psi(x,t)$, $x\in U\setminus M$, $x(0,t]\subset U\setminus Y_0$, $t>0$,

то множество Y_0 состоит из точек покоя, а M устойчиво в X.

Основной результат доклада представляет

Теорема 2. *Если для некоторой окрестности U компактного положительно инвариантного множества $M\subset X$ существуют непрерывные функции $V\colon U\to\mathbb{R}^+$, $\psi\in\Psi$ и $\varphi\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}^+$, подчинённые условиям 1), 2) из формулировки теоремы 1 и для некоторого $C>0$ условиям:*

3) $0<\int_0^t\varphi(d(Y_0,x(s))\,ds<C$, $x(0,t]\subset U\setminus Y_0$, $t>0$;

4) $V(xt)\leqslant V(x)-\psi(x,t)(\int_0^t\varphi(d(Y_0,x(s)))\,ds)^{-1}$, $x\in U\setminus M$, $x(0,t]\subset U\setminus Y_0$, $t>0$,

то M устойчиво в X.

Отметим, что в обеих теоремах на множестве Y_0 нулевого уровня функции Ляпунова V имеет место относительная неасимптотическая устойчивость множества M. При этом в теореме 1 рассмотрен частный случай, когда множество Y_0 состоит из положений равновесия полудинамической системы, тогда как в работах [5–7] предполагаются более жёсткие требования относительной асимптотической устойчивости множества M или его B-устойчивости.

Литература. 1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950. 2. Зубов В.И. Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). М., 1984. 3. Bhatia N.P., Szegö G. Stability theory of Dynamical systems. Berlin; Heidelberg; New York, 1970. 4. Auslander J., Seibert P. Prolongations and Generalised Liapunov Functions // Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. New York, 1963. P. 456–462. 5. Kalitine B.S. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques // R.A.I.R.O. Automatique/Systems Analisys and Control. 1982. V. 16. № 3. P. 275–286. 6. Калитин Б.С. Развитие теоремы Ляпунова об устойчивости // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 5. С. 758–766. 7. Kalitine B. Sur le thòoréme de la stabilitò non asymptotique dans la mòthode directe de Lyapunov // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 2004. I 338. P. 163–166.

И. Н. Сергеев (Москва) “О приводимости автономных линейных дифференциальных систем к автономным линейным уравнениям” (11 октября 2019 г.).

Для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ с заданным ортонормированным базисом рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty),$$

задаваемых непрерывными оператор-функциями $A\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ (с которыми в дальнейшем и отождествляем сами системы), и выделим в нём два подмножества $\mathcal{M}^n$ и $\mathcal{C}^n$, состоящие соответственно из ограниченных (равномерно на $\mathbb{R}_+$) и автономных линейных систем.

Определение 1. Скажем, что система $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ $(A \in \mathcal{M}^n)$ *отвечает уравнению* (соответственно *ограниченному* уравнению), если она имеет в заданном базисе следующий вид:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} x, \quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

а подмножество всех таких систем обозначим через $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ (соответственно $\mathcal{E}^n$).

Определение 2. Систему $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ назовём *приводимой к уравнению* $B \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ непрерывно-дифференцируемым невырожденным преобразованием $L\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$, если верно равенство $B = LAL^{-1} + \dot{L}L^{-1}$, а саму приводимость назовём (перенося её название и на преобразование):

1) *ляпуновской*, если $\|L\| + \|L^{-1}\| + \|\dot{L}\| < \infty$;

2) *асимптотической*, если существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} L(t) \equiv L_0 \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$;

3) *обобщённо-ляпуновской*, если $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}(\ln|L(t)| + \ln|L^{-1}(t)|) = 0$;

4) *периодической* (T-*периодической*), если функция L периодична (с периодом $T > 0$).

Асимптотическая или периодическая приводимость влечёт за собой ляпуновскую, а ляпуновская – обобщённо-ляпуновскую. Вопросы приводимости систем к уравнениям играют важную роль в теории управления [1, 2], а также в теории устойчивости по Ляпунову применительно к классу уравнений [3]. Настоящий доклад служит продолжением доклада [4], к теореме 1 которого добавляет нечто новое.

Теорема 1. *Любая двумерная автономная система* $A \in \mathcal{C}^2$ *при каждом* $T > 0$ *приводима* T-*периодически к некоторому автономному же уравнению* $B \in \mathcal{E}^2 \bigcap \mathcal{C}^2$.

Утверждение теоремы 1 не распространяется на автономные системы, порядок которых больше двух, причём даже если периодическую приводимость в нём ослабить до *ляпуновской*. Это и утверждает

Теорема 2. *При каждом* $n > 2$ *существует автономная система* $A \in \mathcal{C}^n$, *не приводимая ляпуновски ни к какому автономному уравнению* $B \in \mathcal{E}^n \bigcap \mathcal{C}^n$.

Возможности *асимптотической* приводимости автономных систем к уравнениям оказываются ещё более скромными, как показывает

Теорема 3. *При каждом* $n > 1$ *существует автономная система* $A \in \mathcal{C}^n$, *не приводимая асимптотически ни к какому уравнению* $B \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$.

Использование же обобщённо-ляпуновской приводимости вместо ляпуновской, наоборот, полностью снимает ограничение, обусловленное теоремой 2, о чём и говорит

Теорема 4. *Любая автономная система* $A \in \mathcal{C}^n$ *обобщённо-ляпуновски приводима к некоторому автономному же уравнению* $B \in \mathcal{E}^n \bigcap \mathcal{C}^n$.

Наряду с рассмотренными ранее действительными линейными системами и уравнениями, полезную роль играют их комплексные аналоги (с комплексным фазовым пространством $\mathbb{C}^n$). Множества этих систем, аналогичные введённым выше, будем обозначать теми же буквами, но другого начертания: $\mathscr{C}^n$ и $\mathscr{E}^n$ вместо прежних $\mathcal{C}^n$ и $\mathcal{E}^n$ соответственно. Кроме того, распространим определение 2 на комплексные преобразования $L\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{Aut}\mathbb{C}^n$.

В комплексном случае аналог теоремы 2 уже не верен, зато действует распространённый на системы *любой размерности* аналог теоремы 1, каковой и представляет собой

Теорема 5. *Любая автономная комплексная система* $A \in \mathscr{C}^n$ *при каждом* $T > 0$ *приводима* T*-периодически к некоторому автономному комплексному уравнению* $B \in \mathscr{E}^n \bigcap \mathscr{C}^n$.

Теоремы настоящего и предшествующего (см. [4]) докладов доказаны в работе [5].

Литература. 1. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трёхмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2003. № 1. С. 31–62. 2. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33. 3. Сергеев И.Н. О предельных значениях ляпуновских показателей линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1664–1665. 4. Сергеев И.Н. О приводимости ограниченных и неограниченных линейных систем к линейным уравнениям // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 900–901. 5. Сергеев И.Н. О приводимости линейных дифференциальных систем к линейным дифференциальным уравнениям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 3. С. 39–45.

А. В. Аксёнов, К. П. Дружков (Москва) “Способ построения законов сохранения уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном в эйлеровых и лагранжевых переменных” (18 октября 2019 г.).

Система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных (безразмерных) имеет следующий вид [1, § 2.4]:

$$u_t + uu_x + vu_y = -\rho_x + h_x, \quad v_t + uv_x + vv_y = -\rho_y + h_y, \quad \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ – компоненты средней по глубине горизонтальной скорости, $z = -h(x, y)$ – профиль дна (z – вертикальная координата), $\rho = \eta + h \geqslant 0$ ($\eta = \eta(x, y, t)$ – отклонение свободной поверхности). Введём новые переменные $a = a(x, y, t)$, $b = b(x, y, t)$ и рассмотрим систему уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y = -\rho_x + h_x, \quad v_t + uv_x + vv_y = -\rho_y + h_y,$$

$$a_t + ua_x + va_y = 0, \quad b_t + ub_x + vb_y = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = \rho, \tag{2}$$

третье и четвёртое уравнения в которой означают, что введённые переменные a, b лагранжевы. Перепишем последнюю систему в лагранжевых переменных [1, § 12.1]:

$$x_{tt} = -\frac{y_b\rho_a - y_a\rho_b}{x_a y_b - x_b y_a} + h_x, \quad y_{tt} = -\frac{-x_b\rho_a + x_a\rho_b}{x_a y_b - x_b y_a} + h_y, \quad \rho(x_a y_b - x_b y_a) = 1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Решения системы (1) являются одновременно как решениями системы (2), так и решениями (в неявном виде) системы (3).*

Под *законами сохранения* системы (2) будем понимать дивергентные формы, для которых на решениях этой системы выполнено соотношение

$$D_x(P) + D_y(Q) + D_t(R) = 0,$$

где D_x, D_y, D_t – операторы полного дифференцирования, а P, Q, R – функции от независимых и зависимых переменных и их производных: *порядком* закона сохранения будем называть максимальный порядок этих производных, а законы сохранения нулевого порядка будем называть *гидродинамическими.* Аналогично определяются законы сохранения систем (1) и (3).

Теорема 2. *Гидродинамический закон сохранения системы (1) с функциями P, Q, R от переменных a, b, x, y, t, u, v, ρ определяет закон сохранения первого порядка системы (3) с функциями*

$$\widetilde{P} = y_bP - x_bQ + (x_by_t - x_ty_b)R, \quad \widetilde{Q} = -y_aP + x_aQ - (x_ay_t - x_ty_a)R, \quad \widetilde{R} = (x_ay_b - x_by_a)R.$$

Теорема 3. *Если функции P, Q, R в некотором законе сохранения системы (1) не зависят от a, b, то они определяют закон сохранения системы (2), все законы сохранения которой, кроме закона сохранения*

$$D_t(\rho) + D_x(\rho u) + D_y(\rho v) = 0,$$

получаются из законов сохранения системы (1).

В докладе найдены все гидродинамические законы сохранения системы (1). С помощью теорем 2 и 3 получены гидродинамические законы сохранения системы (2) (они совпали с полученными ранее в [2]) и законы сохранения первого порядка системы (3).

Литература. 1. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., 1959. 2. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Вестн. НИЯУ МИФИ. 2018. Т. 7. № 3. С. 240–248.

А. С. Баландин (Пермь) “Асимптотические свойства решений линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа” (25 октября 2019 г.).

Исследуется устойчивость дифференциального уравнения нейтрального типа

$$(I - S)\dot{x} - Tx = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где

$$S = \sum_{j=1}^{J} a_j S_{h_j}, \quad (S_hy)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t \geqslant h, \\ 0, & t < h, \end{cases} \quad (Ty)(t) = \int\limits_0^{\omega} (S_\xi y)(t)\, dr(\xi),$$

$J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j, \omega \in \mathbb{R}_+$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ – функция с ограниченной вариацией, $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – локально суммируемая функция, а I – тождественный оператор.

Решение уравнения (1) при заданных начальных условиях представимо [1, 2] в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)f(s)\, ds, \tag{2}$$

где X и Y – *фундаментальное решение* и *функция Коши* уравнения (1), к изучению асимптотических свойств которых сводится любая задача устойчивости для уравнения (1).

Из представления (2) следует, что X – решение однородного уравнения (1) с начальным условием $x(0) = 1$. Известно [3, с. 84], что для уравнения (1) в случае $S = 0$ справедливо равенство $Y = X$, которое сводит исследование неоднородного уравнения (1) к изучению свойств фундаментального решения, т.е. к исследованию соответствующего однородного уравнения.

Для неоднородного уравнения (1) связь между фундаментальным решением и функцией Коши более сложна [2, 4]: $X=(I-S)Y$. Поэтому если функция Y ограничена, имеет предел на бесконечности или допускает экспоненциальную оценку, то теми же свойствами обладает и функция X. Обратное неверно: существуют уравнения вида (1), для которых функция X стремится к нулю на бесконечности, а функция Y неограниченно возрастает.

Теорема [1, 5]. *Функция Коши уравнения (1) удовлетворяет при некоторых* $M_1,\gamma_1>0$ *оценке* $|Y(t)|\leqslant M_1e^{-\gamma_1 t}$, $t\in\mathbb{R}_+$, *тогда и только тогда, когда оператор* $(I-S):L_1\to L_1$ *обратим и при некоторых* $M_2,\gamma_2>0$ *имеет место оценка* $|X(t)|\leqslant M_2e^{-\gamma_2 t}$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Эта теорема разбивает задачу исследования экспоненциальной устойчивости уравнения (1) на две: задачу об обратимости оператора $I-S$ в пространстве L_1 и задачу об экспоненциальной оценке сверху фундаментального решения.

Первая задача эквивалентна вопросу об однозначной разрешимости в L_1 функционального уравнения $(I-S)y=z$. Отметим два вида оператора S, для которых удалось найти критерий однозначной разрешимости указанного уравнения:

1) если запаздывания $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_J$ рационально соизмеримы, то получаем задачу об экспоненциальной устойчивости линейного автономного разностного уравнения, для которой известны критерии И. Шура–А. Кона, Э. Джури, М. Мардена и др.;

2) если запаздывания $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_J$ линейно независимы (над полем $\mathbb{Q}$), то функциональное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $\sum_{j=1}^{J}|a_j|<1$.

Для решения *второй задачи* предлагаются следующие методы:

1) построить область D-разбиения в пространстве параметров с последующим определением области устойчивости;

2) пользуясь обратимостью оператора $I-S$, заменить исследование однородного уравнения (1) исследованием эквивалентного ему уравнения $\dot{x}=(I-S)^{-1}Tx$ (вообще говоря, с неограниченным последействием);

3) поставить в соответствие уравнению (1) уравнение запаздывающего типа, фундаментальное решение которого имеет те же асимптотические свойства, что и фундаментальное решение уравнения (1).

Уравнение (1) обладает свойствами, не имеющими аналогов для уравнений запаздывающего типа: возможны, например, тонкие ситуации, когда все решения однородного уравнения сходятся к нулю, но медленнее экспоненты, или когда существует счётный набор линейно независимых периодических решений.

Литература. 1. Баландин А.С., Малыгина В.В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2007. № 7. С. 17–27. 2. Баландин А.С. Об асимптотическом поведении фундаментального решения и функции Коши дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 122. С. 187–199. 3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Пермь, 1991. 4. Баландин А.С. О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Прикл. математика и вопросы управления. 2018. № 1. С. 13–25. 5. Симонов П.М., Чистяков А.В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6. С. 37–49.

А. Н. Ветохин (Москва) “О строении множества точек полунепрерывности снизу топологической энтропии семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра из нульмерного пространства” (8 ноября 2019 г.).

Пусть (X,d) – компактное метрическое пространство, а $f\colon X\to X$ – непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d, определим на X дополнительную систему метрик d_1^f, $d_2^f,\ \ldots$ равенствами

$$d_n^f(x,y)=\max_{0\leqslant i<n} d(f^{\circ i}(x),f^{\circ i}(y)),\qquad f^{\circ i}(x)\equiv\underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{i}\circ\,\mathrm{id}_X,\quad n\in\mathbb{N},\quad x,y\in X.$$

Обозначим через $N_d(f,\varepsilon,n)$ максимальное число точек в X, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше ε (такой набор точек называется (f,ε,n)-*отделённым*). *Топологической энтропией* динамической системы (X,f) называется [1, с. 120] величина

$$h_{\mathrm{top}}(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varlimsup_{n\to\infty} n^{-1}\ln N_d(f,\varepsilon,n)$$

(которая не изменится, если метрику d заменить любой другой, задающей на X ту же топологию – это и объясняет, почему энтропия называется топологической).

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному отображению

$$f\colon \mathcal{M}\times X\to X \tag{1}$$

образуем функцию $\mathcal{M}\to\mathbb{R}_+\bigsqcup\{+\infty\}$, задав её правилом

$$\mu\mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot)). \tag{2}$$

Напомним, что точка μ_0 метрического пространства $\mathcal{M}$ называется точкой полунепрерывности снизу функции $h\colon \mathcal{M}\to\mathbb{R}\bigsqcup\{+\infty\}$, если для любой последовательности $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек пространства $\mathcal{M}$, сходящейся к точке μ_0, справедливо неравенство $h(\mu_0)\leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} h(\mu_k)$.

Известно [2], что при $X=[0,1]$ функция (2) всюду полунепрерывна снизу. Далее [3], если пространство $\mathcal{M}$ полно, то свойство полунепрерывности снизу функции (2) типично по Бэру, т.е. множество точек её полунепрерывности снизу содержит всюду плотное в $\mathcal{M}$ подмножество типа G_δ, и, кроме того, само это множество является [4] всюду плотным в $\mathcal{M}$ множеством типа G_δ, а для некоторого отображения (1) оно не является множеством типа F_σ: пространство $\mathcal{M}$ его параметров – канторово совершенное множество $\mathcal{K}$ на отрезке $[0,1]\subset\mathbb{R}$.

Ниже даётся полное описание множества точек полунепрерывности снизу функции (2) в случае полного метрического сепарабельного пространства $\mathcal{M}$, являющегося *нульмерным* (т.е. таким [5, с. 286], что любая его точка имеет сколь угодно малую замкнутую и одновременно открытую окрестность, что равносильно пустоте её границы, например, в случае $\mathcal{M}=\mathcal{K}$).

Теорема. *Если $X=\mathcal{K}$, а $\mathcal{M}$ – полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство, то для каждого всюду плотного его подмножества $\mathcal{G}\subset\mathcal{M}$ типа G_δ существует такое отображение (1), что множество точек полунепрерывности снизу функции (2) совпадает с множеством $\mathcal{G}$.*

Литература. 1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999. 2. Misiurewicz M. Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. et Phys. 1979. V. 27. P. 167–169. 3. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453. 4. Ветохин А.Н. Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 3. С. 69–72. 5. Куратовский К. Топология. Т. 1. М., 1966.

Е. А. Барабанов, В. В. Быков (Минск, Москва) “Обобщение примеров Перрона и Винограда неустойчивости показателей Ляпунова на линейные дифференциальные системы с параметрическими возмущениями” (8 ноября 2019 г.).

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,\infty), \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}_+$ матричными функциями A (отождествляемыми с соответствующими системами (1)), а через $\mathcal{R}^n$ – его подкласс, состоящий из *правильных* по Ляпунову систем [1, с. 51].

О. Перрон построил пример [2] системы $A\in\mathcal{M}^2$ с отрицательными показателями Ляпунова [1, с. 27] и такого её экспоненциально убывающего к нулю на бесконечности возмущения $Q(\cdot)$, что старший показатель Ляпунова возмущённой системы $(A+Q)\in\mathcal{M}^2$ положителен. Иными словами, показатели Ляпунова, отвечающие за устойчивость решения, сами оказались неустойчивыми даже при экспоненциально убывающих возмущениях системы.

Пример Перрона послужил отправной точкой для поиска подклассов класса $\mathcal{M}^n$, показатели Ляпунова систем из которых были бы *устойчивыми* (т.е. не изменялись) по отношению к убывающим к нулю на бесконечности линейным возмущениям. Долгое время считалось, что в силу результата Ляпунова об экспоненциальной устойчивости по правильному первому приближению [1, с. 53–55], таким свойством обладает класс $\mathcal{R}^n$. Однако Р.Э. Виноград привёл пример [3] системы $A \in \mathcal{R}^2$, показатели Ляпунова которой изменяются при некотором убывающем к нулю на бесконечности возмущении (при экспоненциально убывающих возмущениях правильных систем они не меняются, что следует из теоремы Богданова–Гробмана [4, 5]).

Для метрического пространства M введём класс $\mathcal{Z}^n$ (соответственно $\mathcal{E}^n$), состоящий из непрерывных функций $Q(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, *убывающих* (соответственно *убывающих экспоненциально*) к нулю на бесконечности по первому аргументу, причём *равномерно* по второму, т.е. удовлетворяющих неравенству

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| = 0 \quad (\text{соответственно} \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| < 0).$$

Для каждой системы $A \in \mathcal{M}^n$ введём класс $\mathcal{P}^n(A, M)$, состоящий из семейств систем

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t,\mu))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $\mu \in M$ – параметр и $Q \in \mathcal{E}^n$, а для каждой системы $A \in \mathcal{R}^n$ – класс $\mathcal{V}^n(A, M)$, состоящий из семейств (2), в которых $Q \in \mathcal{Z}^n$. Через $\lambda_1(\mu, A, Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu, A, Q)$ обозначим набор показателей Ляпунова системы (2), задающий в итоге вектор-функцию $\Lambda(\cdot, A, Q)\colon M \to \mathbb{R}^n$.

Ниже для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M даётся полное описание классов

$$\mathcal{P}^n(M) = \{\Lambda(\cdot, A, Q) : A \in \mathcal{M}^n, \ \ Q \in \mathcal{E}^n\}, \quad \mathcal{V}^n(M) = \{\Lambda(\cdot, A, Q) : A \in \mathcal{R}^n, \ \ Q \in \mathcal{Z}^n\},$$

включающих, как частные случаи, примеры Перрона и Винограда соответственно. Любая функция $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ из класса $\mathcal{P}^n(M)$ или $\mathcal{V}^n(M)$ обладает следующими тремя свойствами:

1) для любого $\mu \in M$ справедливы неравенства $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$;

2) вектор-функция f ограничена на M;

3) все компоненты f_k, $k = \overline{1,n}$, вектор-функции f принадлежат классу $(^*, G_\delta)$, т.е. для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f_k^{-1}([r,\infty)) \subset M$ образует множество типа G_δ [7, с. 224] (это свойство вытекает из работы В.М. Миллионщикова [6]).

Оказывается, классы $\mathcal{P}^n(M)$ и $\mathcal{V}^n(M)$ совпадают между собой, а их полное описание даёт

Теорема. *Для любого метрического пространства M оба класса $\mathcal{P}^n(M)$ и $\mathcal{V}^n(M)$ при $n = 1$ совпадают с классом постоянных функций $M \to \mathbb{R}$, а при $n > 1$ состоят из функций $f\colon M \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих свойствам 1)–3), и только из них.*

Литература. 1. Ляпунов А.М. Собр. соч.: в 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1956. 2. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Bd 31. H. 5. S. 748–766. 3. Виноград Р.Э. Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17. № 5. С. 645–650. 4. Богданов Ю.С. К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814. 5. Гробман Д.М. Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166. 6. Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 3. С. 364–380. 7. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937.

А. Н. Ветохин (Москва) “О строении множества точек полунепрерывности топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра” (15 ноября 2019 г.).

Напомним определение топологического давления [1, с. 624]. Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, $f\colon X \to X$ – непрерывное отображение. Для непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ положим по определению

$$S_n(\varphi)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^{\circ i}(x)), \quad f^{\circ i}(x) \equiv \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{i} \circ \mathrm{id}_X, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наряду с исходной метрикой d, определим на X дополнительную систему метрик $d_1^f, d_2^f, \ldots$ равенствами
$$d_n^f(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)), \quad x,y\in X, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Через $B^f(x,\varepsilon,n)$ обозначим открытый шар $\{y\in X : d_n^f(x,y)<\varepsilon\}$ в метрике d_n^f, а множество $E\subset X$ назовём (f,ε,n)-покрытием, если $X\subset\bigcup_{x\in E} B^f(x,\varepsilon,n)$. Положим
$$S_d(f,\varphi,\varepsilon,n) = \inf_E \sum_{x\in E} e^{S_n(\varphi(x))},$$

где точная нижняя грань берётся по всем конечным (f,ε,n)-покрытиям E. *Топологическим давлением* динамической системы, порождённой непрерывным отображением f относительно φ, называется величина
$$P_\varphi(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty} n^{-1}\ln S_d(f,\varphi,\varepsilon,n)$$

(которая не изменится, если метрику d заменить любой другой, задающей на X ту же топологию – это и объясняет, почему давление называется топологическим).

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному по совокупности переменных отображению
$$f\colon \mathcal{M}\times X\to X \tag{1}$$
образуем функцию
$$\mu\mapsto P_\varphi(f(\mu,\cdot)). \tag{2}$$
В работе [2] доказано, что для топологического давления (2) семейства отображений (1) типично по Бэру свойство полунепрерывности снизу, т.е. множество точек его полунепрерывности снизу содержит всюду плотное в $\mathcal{M}$ подмножество типа G_δ. Возникает естественный вопрос, что представляют собой множества точек полунепрерывности снизу и сверху функции (2).

С помощью формулы для топологического давления из [2] получается

Теорема 1. *Для любой непрерывной функции $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ и любого пространства $\mathcal{M}$ множество точек полунепрерывности снизу функции (2) – множество типа G_δ, а множество её точек полунепрерывности сверху – множество типа $F_{\sigma\delta}$.*

Из результата работы [2] вытекает

Теорема 2. *Если пространство $\mathcal{M}$ полно, то для любой непрерывной функции $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ множество точек полунепрерывности снизу функции (2) – всюду плотное множество типа G_δ.*

Пусть $\mathcal{K}$ – канторово совершенное множество на отрезке $[0,1]\subset\mathbb{R}$, $\mathrm{C}(\mathcal{K})$ – пространство непрерывных отображений $f\colon\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ с топологией равномерной сходимости. В работе [3] установлено, что для функции $\varphi\equiv 0$ топологическое давление в типичной по Бэру точке равно нулю, т.е. такие точки образуют в $\mathrm{C}(\mathcal{K})$ всюду плотное множество типа G_δ.

Теорема 3. *Для любой непрерывной функции $\varphi : X\to\mathbb{R}$ в типичной по Бэру точке пространства $\mathrm{C}(\mathcal{K})$ значение функции $P_\varphi\colon \mathrm{C}(\mathcal{K})\to\mathbb{R}$ не превосходит $\max_{x\in\mathcal{K}}\varphi(x)$.*

Литература. 1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999. 2. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологического давления // Функц. анализ и его приложения. 2017. Т. 51. № 4. С. 26–33. 3. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453.

И. А. Рудаков (Москва) “Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера–Бернулли” (22 ноября 2019 г.).

Рассмотрим квазилинейное уравнение T-периодических по времени (здесь всюду и ниже) колебаний балки
$$u_{tt}+u_{xxxx}-au_{xx}+g(x,t,u)=f(x,t), \quad u(x,t+T)=u(x,t), \quad x\in(0,\pi), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

в предположении одного из двух граничных условий:

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

или

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Решения понимаем как обобщённые (стандартно, в смысле интегрального тождества) и обозначаем $\Omega = [0,\pi] \times \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \bigcap \{0\}$, $H_k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N})$ – пространства Соболева.

Будем говорить, что выполнено условие (A), если

$$a > 0, \quad T = 2\pi b/c, \quad b, c \in \mathbb{N}, \quad (b,c) = 1,$$

и либо $(a+1/8)b \notin \mathbb{N}$ – в случае (2), либо $(a+1/4)b \notin \mathbb{N}$ – в случае (3).

Пусть функция $g \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ T-периодична и для некоторых констант $r > 2$, $u_0 > 0$, $A_1, A_2, A_3, A_4 > 0$ и $p \in [r-1, r)$ удовлетворяет условиям

$$0 < r \int\limits_0^u g(x,t,s)\,ds \leqslant ug(x,t,u), \quad (x,t) \in \Omega, \quad |u| \geqslant u_0, \tag{4}$$

$$A_1|u|^p - A_2 \leqslant |g(x,t,u)| \leqslant A_3|u|^p + A_4, \quad (x,t,u) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{5}$$

Теорема 1. *При условиях (A), (4) и (5) для любой T-периодичной функции $f \in H_1(\Omega)$ и любого $d > 0$ каждая из задач (1), (2) и (1), (3) имеет такое решение $u \in H_2(\Omega) \bigcap C^1(\Omega)$, что $\|u\|_{L_{p+1}(\Omega)} \geqslant d$ и $u_{xx} \in C(\Omega)$, а граничные условия выполнены в классическом смысле.*

Рассмотрим оператор $Lu = u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx}\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с областью определения $D \subset C^\infty(\Omega)$, состоящей из функций, удовлетворяющих условиям (2) или (3) (соответственно, в зависимости от задачи). Его собственные значения, образующие множество σ, имеют вид $\mu_{nm} = \lambda_n - (mc/b)^2$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, где соответственно

$$\lambda_n = (n + 1/4 - \theta_n)^4 + a(n + 1/4 - \theta_n)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\lambda_n = (n + 1/2 - \theta_n)^4 + a(n + 1/2 - \theta_n)^2, \quad n_0 \leqslant n \in \mathbb{N},$$

и для некоторых констант $b_0, b_1 > 0$ верны оценки $b_1 n^{-2} > \theta_n > b_0 n^{-2}$ соответственно.

Теорема 2 (нерезонансный случай). *Если при условиях (A), (4) и (5) для некоторых констант $\alpha, \beta, u_0 > 0$ выполнены условия*

$$\beta \geqslant -g(x,t,u)/u \geqslant \alpha, \quad (x,t) \in \Omega, \quad |u| \geqslant u_0, \quad [\alpha,\beta] \bigcap \sigma = \varnothing,$$

то для любой T-периодической функции $f \in H_1(\Omega)$ каждая из задач (1), (2) и (1), (3) имеет такое решение $u \in H_2(\Omega) \bigcap C^1(\Omega)$, что $u_{xx} \in C(\Omega)$.

Пусть выполнено условие (A) и для некоторых $\lambda \in \sigma$ и $M > 0$ функция g имеет вид

$$g(u) = -\lambda u - p(u), \quad |p(u)| \leqslant M, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Тогда функция $f \in L_2(\Omega)$ представима в виде суммы

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in N_1 = N_2^\perp, \quad f_2 \in N_2 = \ker(L - \lambda I), \quad \dim N_2 < \infty. \tag{7}$$

Теорема 3 (случай резонанса). *Если при условиях (A), (6) и (7) функция $p \in C^1(\mathbb{R})$ нестрого монотонна, $f \in H_1(\Omega)$ и слагаемое f_2 (7) для некоторого $\delta > 0$ в случае неубывания p удовлетворяет неравенству*

$$p(-\infty) + \delta \leqslant -f_2(x,t) \leqslant p(+\infty) - \delta, \quad (x,t) \in \Omega,$$

где $p(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} p(u)$, *а в случае невозрастания* p *– неравенству*

$$p(+\infty) + \delta \leqslant -f_2(x,t) \leqslant p(-\infty) - \delta, \quad (x,t) \in \Omega,$$

то каждая из задач (1), (2) и (1), (3) имеет такое решение $u \in H_2(\Omega) \bigcap C^1(\Omega)$, *что* $u_{xx} \in \in C(\Omega)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/4.6).

Литература. 1. Yamaguchi M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications // Funkc. Ekv. 1995. V. 38. P. 519–538. 2. Ji S. Periodic solutions for one dimensional wave equation with bounded nonlinearity // J. Differ. Equat. 2018. V. 264. № 9. P. 5527–5540. 3. Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки // Изв. РАН. Сер. математическая. 2015. Т. 79. № 5. С. 215–238. 4. Рудаков И.А. О периодических решениях одного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 691–700.

В. В. Амелькин (Минск), **В. Ю. Тыщенко** (Гродно) “О существовании изолированных интегральных торов дифференциальных систем” (29 ноября 2019 г.).

В работе [1] получен дивергентный критерий существования предельных циклов автономной обыкновенной дифференциальной системы второго порядка, в котором содержится обращение признака Бендиксона–Дюлака [2, 3] для кольцевой области. В докладе изучаются аналогичные вопросы для интегральных торов вполне разрешимой [4, с. 21] автономной системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx = F(x)\,dt, \quad x = (x_1,\ldots,x_{m+1}), \quad t = (t_1,\ldots,t_s) \quad (1 \leqslant s \leqslant m), \tag{1}$$

заданной на области $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$, где $F \in C^2(G, \mathbb{R}^{s\times(m+1)})$ – матричная функция, а векторные поля $F_j = (F_{j1},\ldots,F_{j,m+1})$ (как и операторы $\mathfrak{F}_j = \sum_{i=1}^{m+1} F_{ji}(x)\partial/\partial x_i$), $j = \overline{1,s}$, линейно не связаны [5, с. 113; 6] (при $s > 1$).

Пусть $x = \varphi(t,c)$ – семейство решений данной системы, определяющее её p-мерный интегральный тор T^p, где $s < p \leqslant m$, а $c = (c_1,\ldots,c_{p-s})$ – семейство произвольных постоянных, причём ранг матрицы Якоби семейства φ равен p для всех $(t,c) \in \mathbb{R}^p$. Тогда в силу п. 5 из [7, с. 160] оно задаёт бесконечнолистное универсальное накрытие тора T^p пространством $\mathbb{R}^p$, поэтому определяет Ω-периодическую функцию на $\mathbb{R}^p$, где Ω – дискретная подгруппа ранга p аддитивной векторной группы $\mathbb{R}^p$ с системой образующих Δ_j, $j = \overline{1,p}$.

Сначала рассмотрим случай обыкновенной автономной дифференциальной системы.

Теорема 1. *Если при* $s = 1$ *система (1) имеет интегральный тор* $T^p \subset G$, *то для некоторых* $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ *и* $\mu_1 \in C^2(G, \mathbb{R}_+)$ *равенство*

$$\operatorname{div}(\mu_1(x)F_1(x)) = \lambda_1 \tag{2}$$

задаёт многообразие – тор T^p.

Замечание 1. По аналитическому заданию многообразия (2) не всегда легко получить аналитическое задание интегрального тора T^p. Но в силу гладкости матрицы F можно получить и дополнительное многообразие, на котором расположен интегральный тор T^p. Многообразие (2) является интегральным для обыкновенной системы (1), поэтому многообразие

$$\mathfrak{F}_1(\operatorname{div}(\mu_1(x)F_1(x))) = 0 \tag{3}$$

также является частным интегралом системы (1) [8, с. 254]. Аналитические задания многообразий (2) и (3) существенно облегчают получение аналитического задания тора T^p.

Интегральный тор T^m обыкновенной системы (1) назовём *изолированным*, если он в каждой из двух определяемых им полуокрестностей локально притягивает или отталкивает траектории.

Теорема 2. *При $s = 1$ система (1) имеет изолированный интегральный тор $T^m \subset \subset G$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и $\mu_1 \in C^2(G, \mathbb{R}_+)$ равенство (2) задаёт многообразие – тор T^m и, если $\lambda_1 = 0$, существуют его внешняя и внутренняя полуокрестности, в каждой из которых левая часть равенства (2) знакоопределена.*

Замечание 2. Как и в случае теоремы 1, для получения аналитического задания тора T^m наряду с соотношением (2) можно также использовать соотношение (3).

Рассмотрим теперь систему (1) в случае $s > 1$.

Теорема 3. *Если вполне разрешимая система в полных дифференциалах (1) имеет интегральный тор $T^p \subset G$, то для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ и $\mu_1, \ldots, \mu_s \in C^2(G, \mathbb{R}_+)$ равенства*

$$\operatorname{div}(\mu_j(x)F_j(x)) = \lambda_j, \quad j = \overline{1, s}, \tag{4}$$

задают многообразие – тор T^p.

Интегральный тор T^m вполне разрешимой автономной системы в полных дифференциалах (1) назовём *изолированным*, если при каждом $j = \overline{1, s}$ он изолирован для обыкновенной системы (1), определяемой векторным полем F_j.

Теорема 4. *Вполне разрешимая система в полных дифференциалах (1) имеет изолированный интегральный тор $T^m \subset G$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ и $\mu_1 \ldots, \mu_s \in C^2(G, \mathbb{R}_+)$ при каждом $j = \overline{1, s}$ соответствующее равенство (4) задаёт многообразие – тор T^m и, если $\lambda_j = 0$, существуют его внешняя и внутренняя полуокрестности, в каждой из которых левая часть соответствующего равенства (4) знакоопределена.*

Замечание 3. Как и в случае теорем 1 и 2, для получения аналитического задания торов T^p и T^m наряду с соотношениями (4) можно использовать соотношения

$$\mathfrak{F}_j(\operatorname{div}(\mu_j(x)F_j(x))) = 0, \quad j = \overline{1, s}.$$

Литература. 1. Амелькин В.В. Об условиях существования предельных циклов двумерных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 2070–2072. 2. Bendixon J. Sur les courbes defines par des equations differentielles // Acta Math. 1901. V. 24. № 1. P. 1–88. 3. Dulac H. Recherche des cycles limites // C. R. Acad. Sci. Ser. I. Mathematics. 1937. V. 204. № 23. P. 1703–1706. 4. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983. 5. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. 6. Амелькин В.В., Тыщенко В.Ю. О существовании изолированных интегральных торов дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 761–768. 7. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М., 1977. 8. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. М., 1971.

Т. А. Корчёмкина (Москва) “Об асимптотическом поведении ограниченных решений уравнения второго порядка со степенной нелинейностью общего вида” (6 декабря 2019 г.).

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = p(x, y, y')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}\operatorname{sgn}(yy'), \tag{1}$$

где $k_0, k_1 > 0$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам $0 < m \leqslant p(x, u, v) \leqslant M < \infty$.

В работе [1] получены достаточные условия существования решений с заданным асимптотическим поведением в частном случае $p = p(x)$, а в работах [2, 3] изучалось поведение решений уравнения (1) в общем случае. При $k_1 < 1$ положительное (отрицательное) решение может оказаться продолжаемым вправо (влево) не единственным образом, в связи с чем рассматриваются μ-решения уравнения [3, 4], которые описывает

Определение [4]. Решение y уравнения (1), определённое на промежутке (a, b), возможно бесконечном, назовём *μ-решением*, если выполнены два условия:

1) уравнение не имеет решений, совпадающих с y на некотором подынтервале промежутка (a, b), но отличных от y в некоторой точке промежутка (a, b);

2) для каждой граничной точки интервала (a, b) решение y либо не продолжается за неё, либо какие-то два его продолжения различаются в точках, сколь угодно близких к ней.

При $k_0, k_1 \geqslant 1$ для уравнения (1) выполняются условия теоремы единственности, а значит, множество μ-решений совпадает с множеством непродолжаемых решений.

Теорема 1 [5]. *Все нетривиальные μ-решения уравнения (1) строго монотонны.*

Известно [5], что все возрастающие при $k_1 \geqslant 2$ и убывающие при $0 < k_1 \leqslant 2$ μ-решения уравнения (1) неограничены (их асимптотическое поведение изучено в [6]), а убывающие при $0 < k_1 < 2$ и возрастающие при $k_1 > 2$ μ-решения ограничены.

Рассмотрим ограниченные μ-решения уравнения (1). Так как при замене $y(x)$ на $-y(-x)$ вид уравнения (1) не меняется, достаточно рассмотреть их поведение лишь вблизи правой границы области определения (вблизи левой оно будет аналогичным с точностью до знака).

Про правую границу $\tilde{x}$ области определения μ-решения y уравнения (1) известно [5], что если функция y возрастает и $k_1 > 2$, то $\tilde{x} < \infty$ и $\tilde{y} \equiv \lim\limits_{x \to \tilde{x}} y(x) < \infty$, а если убывает, то $\tilde{x} < \infty$ при $0 < k_1 < 1$, $\tilde{x} = \infty$ при $1 \leqslant k_1 < 2$ и $-\infty < \tilde{y} < 0$ при $0 < k_1 < 2$. Обозначим через p_{x_0,u_0} и p_{u_0} пределы функции $p(x, u, v)$ при $x \to x_0$, $u \to u_0$, $v \to \infty$ и $x \to \tilde{x}$, $u \to u_0$, $v \to 0$ соответственно и положим $C_0(p, y) = (p|y|^{k_0}|1 - k_1|)^{1/(1-k_1)}$.

Теорема 2. *Если $k_1 > 2$ и для любых x_0 и $u_0 > 0$ существует предел p_{x_0,u_0}, то для каждого возрастающего μ-решения $y(\cdot)$ уравнения (1) справедливо асимптотическое равенство*

$$y'(x) = C_0(p_{\tilde{x},\tilde{y}}, \tilde{y})(\tilde{x} - x)^{1/(1-k_1)}(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to \tilde{x} - 0.$$

Теорема 3. *Если $0 < k_1 < 1$ и для любого u_0 существует предел p_{u_0}, то для каждого убывающего μ-решения $y(\cdot)$ уравнения (1) справедливо асимптотическое равенство*

$$y'(x) = -C_0(p_{\tilde{y}}, \tilde{y})(\tilde{x} - x)^{1/(1-k_1)}(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to \tilde{x} - 0.$$

Теорема 4. *Если для любого u_0 существует предел p_{u_0}, то для каждого убывающего μ-решения $y(\cdot)$ уравнения (1), удовлетворяющего в некоторой точке x_0 условию $y(x_0) \leqslant 0$, при $k_1 = 1$ и при $1 < k_1 < 2$ справедливы соответственно асимптотические равенства –*

$$y'(x) = y'(x_0)e^{-p_{\tilde{y}}|\tilde{y}|^{k_0}(x-x_0)}(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to \infty,$$

$$y'(x) = -C_0(p_{\tilde{y}}, \tilde{y})(x - x_0)^{1/(1-k_1)}(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Литература. 1. Евтухов В.М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078. 2. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / Под ред. И.В. Асташовой. М., 2012. С. 22–290. 3. Astashova I. On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity // Math. Model. and Anal. 2016. V. 21(4). P. 502–521. 4. Astashova I. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differ. and Difference Equat. with Appl. V. 164 of Springer Proc. in Mathematics & Statistics. Springer, 2016. P. 191–204. 5. Korchemkina T. On the behavior of solutions to second-order differential equation with general power-law nonlinearity // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. 2018. V. 73. P. 101–111. 6. Корчёмкина Т.А. Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Т. 32. С. 239–256.