Асташова И.В.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций для студентов 2 курса
механико-математического факультета
МГУ им. М.В.Ломоносова
(2-й поток)

1 семестр 2012-2013 уч.год

Москва 2012

Содержание

1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений 1-го порядка.

1.1 Дифференциальное уравнение. Определение решения.

Определение 1.1. ***Дифференциальным уравнением*** *называется уравнение*

$$f(x,\ y,\ y', \dots,\ y^{(n)}) = 0,$$

где x — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, n — порядок уравнения.

Определение 1.2. ***Уравнением, разрешенным относительно старшей производной***, *называется уравнение*

$$y^{(n)} = F(x,\ y,\ y', \dots,\ y^{(n-1)}).$$

Будем рассматривать уравнения с $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ ($y \in \mathbb{R}^n$), $f \in \mathbb{R}$ ($f \in \mathbb{R}^m$).

Определение 1.3. ***Решением дифференциального уравнения*** *называется n раз дифференцируемая функция $\varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество.*

Предмет обыкновенных дифференциальных уравнений:

1. найти решение дифференциального уравнения, если это возможно;
2. доказать существование решения (в тех случаях, когда его нельзя найти аналитически);
3. определить область, в которой это решение существует;
4. выяснить, будет ли единственным решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям;
5. выяснить свойства решения, если его не удается найти аналитически:
   (a) ограниченность;
   (b) убывание, возрастание (монотонность);
   (c) поведение на бесконечности, если оно там определено;
   (d) поведение вблизи границ области определения;
   (e) существование нулей, в том числе, количество нулей на заданном интервале;

и т.д.

1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1.4. ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$f(x,\ y,\ y') = 0 \tag{1.1}$$

или

$$y' = F(x,\ y). \tag{1.2}$$

Определение 1.5. ***Решением дифференциального уравнения первого порядка*** *называется функция $y = \varphi(x)$, один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.*

Пример 1.1. *Решить уравнение*

$$y' = x.$$

Р е ш е н и е. Решением уравнения является функция $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, где C — произвольная действительная постоянная.

Определение 1.6. ***Общим решением дифференциального уравнения*** *называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Таким образом, если решение дифференциального уравнения задается формулой $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$, то она задает общее решение, если

1. при каждом фиксированном $C = C_0$ эта функция определяет решение;

2. любое решение может быть найдено из этой формулы при некотором $C = C_0$.

Определение 1.7. ***Частным решением дифференциального уравнения*** *называется решение, полученное из формулы (формул) общего решения при некотором значении $C = C_0$.*

В примере 1.1 формула $y = \frac{x^2}{2} + C$ задает общее решение, а, например, решения $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$ — частные решения.

Найти решение дифференциального уравнения — значит выразить решение в квадратурах — через элементарные функции и их неопределенные интегралы.

Геометрический смысл дифференциального уравнения $\mathbf{y' = F(x,\ y)}$.

Данное уравнение в любой точке плоскости, где $F(x,\ y)$ существует, определяет направление, угол наклона α к оси Ox которого задается равенством $\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = F(x_0,\ y_0)$. Если каждой точке плоскости таким образом сопоставить направление, то получим поле направлений (направление изображается отрезком с центром в точке $(x_0,\ y_0)$).

Определение 1.8. ***Интегральной кривой (интегральной кривой поля направлений)*** *называется кривая, касающаяся в любой своей точке поля направлений.*

Определение 1.9. ***Изоклинами*** *называются кривые, вдоль которых направление поля постоянно.*

Пример 1.2. *Построить интегральные кривые, определяемые уравнением $y' = y - x^2$.*

Р е ш е н и е. Уравнение изоклин

$$y' = C$$

$$y - x^2 = C$$

$$y = x^2 + C$$

$$C = 0 \ \Rightarrow\ y = x^2 \ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg}\alpha = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = 0,$$

$$C = 1 \ \Rightarrow\ y = x^2 + 1 \ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg}\alpha = 1 \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$C = 2 \ \Rightarrow\ y = x^2 + 2 \ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg}\alpha = 2 \ \Rightarrow\ \alpha = \operatorname{arctg} 2,$$

$$C = -1 \ \Rightarrow\ y = x^2 - 1 \ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg}\alpha = -1 \ \Rightarrow\ \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что при $y - x^2 > 0$ получаем $y' > 0$, то есть $y(x)$ возрастает. Аналогично при $y - x^2 < 0$ получаем, что $y(x)$ убывает, поэтому кривая $y = x^2$ — линия экстремумов.

Замечание 1.1. Отметим, что интегральные кривые касаются поля направлений в каждой своей точке.

Пример 1.3. *Построить интегральные кривые, определяемые уравнением $y' = -\frac{x}{y}$.*

Р е ш е н и е. Уравнение изоклин $-\frac{x}{y} = C \ \Rightarrow\ y = -\frac{x}{C}$.

$$C = 1 \ \Rightarrow\ y = -x \ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg}\alpha = 1 \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$C = -1 \ \Rightarrow\ y = x \ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg}\alpha = -1 \ \Rightarrow\ \alpha = -\frac{\pi}{4},$$

$$C = 2 \ \Rightarrow\ y = -\frac{x}{2} \ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg}\alpha = 2 \ \Rightarrow\ \alpha = \operatorname{arctg} 2.$$

Можно отметить, что уравнение обладает симметрией: замена $x \to -x$, $y \to -y$ не меняет уравнения. Можно также заметить, что если $\operatorname{tg}\alpha = k_1$ — угловой коэффициент поля направлений, то $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ — угловой коэффициент изоклины, то есть поле направлений ортогонально изоклинам. Интегральные кривые — окружности.

Связь между понятиями «решение дифференциального уравнения» и «интегральная кривая»: для уравнения (1.2) решение — это интегральная кривая, так как уравнение (1.2) в любой точке задает направление, касательное к $y(x)$: $y'(x_0) = f(x_0,\ y_0)$. Но, (см., например, пример 1.3, интегральные кривые могут не являться функциями (каждому значению x соответствует не единственное значение y), поэтому не всякую интегральную кривую можно назвать решением, если его понимать в смысле нашего определения.

Замечание 1.2. Иногда наряду с уравнением $y' = f(x,\ y)$ удобно рассматривать уравнение $x' = \frac{1}{f(x,\ y)}$. Тогда совокупность решений этих уравнений будет задавать все интегральные кривые.

1.2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.10. ***Уравнениями с разделяющимися переменными*** *называются уравнения вида*

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.3}$$

или

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

Метод разделения переменных (формальный).

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Умножив уравнение на $\frac{dx}{g(y)}$, получим

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{g(y)} & = & f(x)dx, \\ g(y) & \neq & 0, \end{array}\right. \\ g(y) = 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow\ y(x) \text{ — делаем проверку, подставляя в уравнение.}$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде $y = \varphi(x,\ C)$ или $\psi(x,\ y,\ C) = 0$.

Замечание 1.3. Общее решение может не задаваться одной формулой. Иногда форма его записи зависит от способа записи постоянной или от метода интегрирования.

Пример 1.4. *Решить уравнение* $y' = xy^2$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{y^2} & = & xdx, \\ y & \neq & 0, \end{array}\right. \\ y = 0. \end{array}\right.$$

$y \equiv 0$ — решение, проверяется подстановкой в уравнение.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Отметим, что решение $y(x) \equiv 0$ не получается из этой формулы ни при каком значении C, поэтому общее решение определяется их совокупностью.

Замечание 1.4. При решении этого уравнения мы получили, что если $y \equiv 0$, то оно является решением. Может ли оказаться, что $y(x) = 0$ в некоторой точке x_0, но $y(x)$ не тождественно равно нулю?

Ответ на этот вопрос можно дать с использованием теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

1.2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка: найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.4}$$

то есть задача

$$\begin{cases} y' &= F(x,\ y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Определение 1.11. *Будем говорить, что задача Коши (1.5)* ***имеет единственное решение****, если существует такое $h > 0$, что в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ определено $y = \varphi(x)$, являющееся решением задачи (1.5), и не существует решения, определенного в том же интервале, и не совпадающего с решением $y = \varphi(x)$ хотя бы в одной точке этого интервала, отличной от точки x_0.*

Теорема 1.1. *Пусть функция $F(x,\ y)$*
1) определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике $\Pi = \{(x\,y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$. Тогда существует решение задачи Коши, определенное на $V_h(x_0) = \{x_0 - h,\ x_0 + h\}$, где $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max_\Pi F(x,y)$;
2) если, в добавление к первому условию, производная $F'_y(x,\ y)$ определена и непрерывна в Π, то решение задачи Коши единственно в $V_h(x_0)$.

Доказательство будет приведено позже.

Замечание 1.5. Теорема носит локальный характер, то есть утверждается существование и единственность решения лишь в некоторой окрестности точки x_0.

Замечание 1.6. Теорема дает лишь достаточные условия существования и единственности, которые можно ослабить, заменив, например, второе условие условием Липшица.

Определение 1.12. ***Функция F(x, y) удовлетворяет условию Липшица по*** y ***в*** Π*, если существует такое $L > 0$, что для всех $(x,\ y_1),\ (x,\ y_2) \in \Pi$ имеем $|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.*

Теперь можно дать ответ на ранее поставленный вопрос (замечание 1.4). В примере 1.4 функция $y(x) \equiv 0$ является решением, которое удовлетворяет условию $y(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$, поэтому в силу теоремы существования и единственности это уравнение не может иметь других решений, обращающихся в ноль в некоторой точке x_0.

1.2.3 Обоснование метода разделения переменных.

1) Рассмотрим уравнение вида $y' = f(x)$.

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $(a,\ b)$, тогда из курса математического анализа имеем

$$y = \int f(x)dx + C, \tag{1.6}$$

где под выражением $\int f(x)dx$ мы будем понимать первую первообразную. Придавая константе C произвольные значения, получим все решения данного уравнения, то есть формула (1.6) задает общее решение. Запишем решение в виде

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C,\ x_0 \text{ — произвольное значение из интервала.}$$

Отсюда $y(x_0) = C$. Таким образом, придавая функции $y(x)$ значение y_0 в точке x_0, получим частное решение, однозначно определяемое через x_0 и y_0.

2) Рассмотрим уравнение вида $y' = f(y)$, где $f(y)$ — непрерывная на $(a,\ b)$ функция.

Предположим, что для функции, задающей решение, $y(x) = \varphi(x)$, существует обратная функция $x = \psi(y)$. Тогда для нее имеем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)},\ \text{если } f(y) \neq 0.$$

Значит, на интервале $(\alpha,\ \beta) \subset (a,\ b):\ f(y) \neq 0$ при $x \in (\alpha,\ \beta)$, получим

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{1.7}$$

Если $x(y_0) = x_0$, то $x(y) = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}$. Данная формула, как и формула (1.7), допускает обратную функцию, так как на $(\alpha,\ \beta)$ $f(y) \neq 0$, а значит, $f(y)$ сохраняет знак. Тогда $x - x_0$ — монотонная функция от y, а непрерывная и монотонная (не постоянная ни в каком интервале) функция имеет непрерывную и однозначную обратную. Очевидно, что эта обратная функция удовлетворяет уравнению.

Отметим, что функции $y \equiv y_0$, определяемые из уравнения $f(y) = 0$, являются решениями.

3) Рассмотрим уравнение вида $y' = f(x)g(y)$.

Формально разделим переменные:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Из равенства дифференциалов следует, что их неопределенные интегралы различаются на константу:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{1.8}$$

Выясним, при каких условиях формула (1.8) определяет y как функцию от x в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$. Если $y(x)$ — решение, то запишем уравнение (1.3) в виде

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

умножим обе части на dx и проинтегрируем от x_0 до x

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

откуда, с учетом условия $y(x_0) = y_0$, делая в первом интеграле замену переменных, получим

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Обозначим

$$\psi(x,\ y,\ x_0,\ y_0) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} - \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

По теореме о неявной функции из этого равенства можно выразить y как функцию x, x_0, y_0: очевидно, что $\psi(x_0,\ y_0,\ x_0,\ y_0) = 0$; далее, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x=x_0,\ y=y_0} = \frac{1}{f(y)} \neq 0$, и имеет смысл при $f(y_0) \neq 0$.

1.2.4 Критерий единственности решения для уравнения $y' = f(y)$ (необходимый и достаточный признак особых решений).

Определение 1.13. ***Особым решением*** *дифференциального уравнения (1.3) называется такое решение, которое во всех своих точках не удовлетворяет условию единственности, то есть решение, через каждую точку которого проходит еще одно решение, не совпадающее с ним ни в какой окрестности этой точки.*

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(y), \tag{1.9}$$

где $f(y)$ — непрерывная функция. Если $f(y_0) \neq 0$, то начальное условие определяет единственное решение, как это было показано ранее. Если же существует такая c, что $f(c) = 0$, то $y \equiv c$ — решение указанного уравнения. Исследуем, при каких условиях нарушается единственность в точках $y = c$, а при каких она сохраняется.

Зададим начальное условие $(x_0,\ y_0)$. Пусть (без ограничения общности рассуждений) $y_0 < c$. Допустим, что $f(y) > 0$, $y_0 < y < c$. Случай $y_0 > c$ приводится к рассматриваемому заменой y на $-y$, а случай $f(y) < 0$ — заменой x на $-x$. Исследуем единственность решения $y = c$.

Разделяя переменные в уравнении (1.9) и интегрируя полученное равенство от x_0 до x, получим для решения, проходящего через точку $(x_0,\ y_0)$, формулу:

$$x - x_0 = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}.$$

При $y \to c$ интеграл в правой части стремится к несобственному интегралу $\int\limits_{y_0}^{c} \frac{dy}{f(y)}$.

1) Если $\int\limits_{y_0}^{c} \frac{dy}{f(y)} < \infty$, то $x - x_0 < \infty$, значит, $x < \infty$, то есть интегральная кривая $y(x)$ пересечет прямую $y = c$ при некотором конечном значении x, причем параллельным переносом этой интегральной кривой можно добиться пересечения соответствующим решением прямой $y = c$ в любой точке x, то есть единственность решения $y = c$ в каждой его точке нарушается.

2) Если $\int\limits_{y_0}^{c} \frac{dy}{f(y)} = \infty$, то $x = \infty$, значит, за конечное время интегральная кривая не пересечет прямую $y = c$, то есть единственность решения сохраняется. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1.2. *Решение $y = c$, такое что $f(c) = 0$, уравнения $y' = f(y)$ является особым решением тогда и только тогда, когда $\int\limits_{y_0}^{c} \frac{dy}{f(y)} < \infty$.*

Пример 1.5. *Найти особые решения уравнения $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.*

Р е ш е н и е. Заметим, что второе условие теоремы существования и единственности не выполняется, так как $f'_y(y) = y^{-\frac{1}{3}}$ разрывна при $y = 0$. Функция $y \equiv 0$ — решение уравнения. Вычислим

$$\int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = y_0^{\frac{1}{3}} < \infty.$$

Таким образом, $y \equiv 0$ — особое решение.

Пример 1.6. *Найти особые решения уравнения*

$$y' = \begin{cases} y \ln y, & y > 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как $f(y) = 0$ при $y = 0$ и $y = 1$, то необходимо рассмотреть два случая. Вычислим соответствующие интегралы:

$$y = 0: \int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{y \ln y} = \ln|\ln y| \Big|_{y_0}^{0} = \infty \ \Rightarrow y \equiv 0 \text{ не является особым решением.}$$

$$y = 1: \int\limits_{y_0}^{1} \frac{dy}{y \ln y} = \ln|\ln y| \Big|_{y_0}^{1} = \infty \ \Rightarrow y \equiv 1 \text{ не является особым решением.}$$

Пример 1.7. *Найти особые решения уравнения*

$$y' = \begin{cases} y \ln^2 y, & y > 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Аналогично предыдущему примеру рассматриваем два случая: $y = 0$ и $y = 1$.

$$y = 0: \int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{y\ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y}\bigg|_{y_0}^{0} = 0 + \frac{1}{\ln y_0} < \infty \ \Rightarrow y \equiv 0 \text{ является особым решением.}$$

$$y = 1: \int\limits_{y_0}^{1} \frac{dy}{y\ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y}\bigg|_{y_0}^{1} = \infty \ \Rightarrow y \equiv 1 \text{ не является особым решением.}$$

1.2.5 Однородные уравнения

Определение 1.14. ***Однородным дифференциальным уравнением*** *называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, если для любого k имеем*

$$F(kx, ky, y') \equiv k^p F(x, y, y'), \tag{1.10}$$

где p — какое-то число.

Это уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.11}$$

Однородное дифференциальное уравнение решается методом **замены переменных**. Именно, вместо неизвестной функции y введем неизвестную функцию z, положив $z = y/x$.

Подставляя в уравнение (1.11) $y = zx$, с учетом того, что по правилу дифференцирования произведения $y' = z'x + zx' = z'x + z$, для новой неизвестной функции z получим дифференциальное уравнение

$$z'x + z = f(z),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ приводится к однородному с помощью замены $x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta$, где ξ, η — новые переменные, (α, β) — точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$. Если эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$; следовательно, уравнение имеет вид $y' = f(ax + by)$, которое рассматривалось в предыдущем пункте.

Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^m$. Чтобы найти число m, надо в уравнении сделать замену $y = z^m$. После замены найдем m, при котором выполняется условие (1.10). Если такого числа m не существует, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

Пример 1.8. *Найти решение уравнения*

$$x(x^2 + y^2)\,dy = y(y^2 - xy + x^2)\,dx,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 1.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение — однородное. Полагаем $z = y/x$, $y = xz$. Тогда $dy = x\,dz + z\,dx$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$x(x^2 + x^2z^2)(x\,dz + z\,dx) = xz(x^2z^2 - x^2z + x^2)\,dx; \quad (1 + z^2)x\,dz = -z^2dx.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на xz^3 и проинтегрируем:

$$\frac{1 + z^2}{z^2}dz = -\frac{dx}{x}; \quad z - \frac{1}{z} = -\ln|x| + C.$$

Заметим, что при делении могли быть потеряны решения $z = 0$ и $x = 0$. Но ни одно из них не удовлетворяет начальному условию, так как $z(1) = 1$. Возвращаясь к переменной y, получим

$$y^2 - x^2 = -xy(\ln|x| - C).$$

Из начального условия имеем

$$1 - 1 = -\ln 1 + C,$$

откуда $C = 0$.

О т в е т: $y^2 - x^2 = -xy\ln|x|$.

1.2.6 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли

Определение 1.15. ***Линейным дифференциальным уравнением первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.12}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — заданные непрерывные функции.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (1.12) называется **линейным однородным дифференциальным уравнением**, иначе **линейным неоднородным дифференциальным уравнением**.

Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0. \tag{1.13}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Заметим, что $y = 0$ является решением этого уравнения. Проинтегрировав правую и левую части, получим

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + ln|C|,$$

где $\ln|C|$ — постоянная величина. Преобразуем выражение, используя свойства логарифма и, варьируя константу C, опустим модуль. Тогда имеем

$$\ln\frac{y}{C} = -\int p(x)dx.$$

Выражая y, получим общее решение уравнения (1.13):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

причем решение $y = 0$ получается из общего решения при $C = 0$.

Можно записать решение в виде

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

Тогда, полагая, $y_0 = y(x_0)$, определим константу C:

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} p(x)dx} \Rightarrow C = y_0.$$

Таким образом, получаем частное решение линейного неоднородного уравнения

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

1. Если $y(x)$ — решение уравнения (1.13), то для любой постоянной C функция $z(x) = Cy(x)$ также является решением этого уравнения.

   Действительно, подставим $z(x)$ в уравнение:

   $$(Cy(x))' + p(x)Cy(x) = C(y'(x) + p(x)y(x)) = 0,$$

   так как $y(x)$ — это решение.

2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — некоторые частные решения уравнения (1.13), то функция $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ тоже является решением этого уравнения.

   Действительно, подставим $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ в уравнение:

   $$(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))' + p(x)(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = \\ = \alpha_1(y_1'(x) + p(x)y_1(x)) + \alpha_2(y_2'(x) + p(x)y_2(x)) = 0,$$

   так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения (1.13).

3. Если $y_1(x)$ — некоторое частное решение уравнения (1.13), то $y(x) = Cy_1(x)$ есть общее решение уравнения (1.13).

4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — некоторые частные решения уравнения (1.13), то общее решение можно записать в виде
$$y(x) = y_1(x) + C(y_2(x) - y_1(x)).$$
Действительно, согласно свойству 2, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ тоже является решением уравнения (1.13). Следовательно, $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ — частное решение уравнения (1.13). По свойству 2 функция $y_1(x) + Cz(x)$ — тоже решение.

5.

   Теорема 1.3. *Решения линейного однородного дифференциального уравнения образуют линейное пространство.*

Теорема 1.4. *Если y_1 — частное решение неоднородного уравнения* (1.12)*, то общее решение этого уравнения дается формулой*
$$y = y_1 + z,$$
где z — общее решение соответствующего однородного уравнения (1.13).

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ — частное решение линейного неоднородного уравнения. Общее решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде: $y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ — неизвестная функция. Подставим это выражение в (1.12) и получим
$$(y_1(x) + z(x))' + p(x)(y_1(x) + z(x)) = q(x),$$
$$y_1'(x) + p(x)y_1(x) + z'(x) + p(x)z(x) = q(x).$$
Так как $y_1(x)$ — частное решение линейного неоднородного уравнения, то получим
$$q(x) + z'(x) + p(x)z(x) = q(x),$$
откуда имеем $z'(x) + p(x)z(x) = 0$. Следовательно, $z(x)$ — решение линейного однородного дифференциального уравнения. □

Методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений.
1) Метод вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (1.12). Сначала найдем общее решение однородного уравнения (1.13). В этом решении заменим произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$.
$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.14}$$
В таком виде будем искать общее решение неоднородного уравнения (1.12) Выражение (1.14) подставим в уравнение (1.12) для определения функции $C(x)$.
$$(C(x)e^{-\int p(x)dx})' + p(x)(C(x)e^{-\int p(x)dx}) = q(x),$$
$$C'(x)e^{-\int p(x)}dx + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx} + p(x)(C(x)e^{-\int p(x)dx}) = q(x),$$
$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$
Откуда
$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$
Подставим $C(x)$ в решение (1.14):
$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx} = C_1e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где $C_1 e^{-\int p(x)dx}$ — общее решение однородного уравнения (1.13), а $e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ — частное решение неоднородного уравнения (1.12).

2) Метод Бернулли.

Решение уравнения (1.12) будем искать в виде

$$y(x) = u(x)v(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — неизвестные функции. Подставим это выражение в (1.12) и получим

$$(uv)' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{1.15}$$

Выберем функцию v так, чтобы чтобы выполнялось следующее условие:

$$v' + p(x)v = 0. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение имеет вид

$$v = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Для определенности будем считать $C = 1$. Подставим v в (1.15), тогда

$$u'e^{-\int p(x)dx} + u \cdot 0 = q(x),$$

$$u' = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения (1.12) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) = e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где $Ce^{-\int p(x)dx}$ — общее решение однородного уравнения (1.13), а $e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ — частное решение неоднородного уравнения (1.12).

Пример 1.9. *Решить уравнение*

$$y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \tag{1.17}$$

методом вариации произвольной постоянной.

Р е ш е н и е. Сначала решим однородное уравнение $y' + y\operatorname{tg} x = 0$. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = -y\operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx\operatorname{tg} x.$$

Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получим $\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C$. Выразим y: $y = C\cos x$.

Решение неоднородного уравнения (1.17) будем искать в виде $y = C(x)\cos x$. Подставим эту функцию и ее производную $y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$ в уравнение (1.17). Получим

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C_1.$$

Осталось подставить найденную функцию $C(x)$ в решение.

О т в е т: $y = (\operatorname{tg} x + C_1)\cos x$.

Пример 1.10. *Решить уравнение*

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

методом Бернулли.

Р е ш е н и е. Будем искать решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Получим уравнение

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}. \tag{1.18}$$

За функцию v примем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + 2xv = 0. \tag{1.19}$$

При таком выборе v второе и третье слагаемые в левой части (1.18) исчезают. Для функции u имеем дифференциальное уравнение:

$$u'v = 2xe^{-x^2}. \tag{1.20}$$

Уравнение (1.19) является уравнением с разделяющимися переменными и его интеграл равен

$$\ln|v| + x^2 = C_1.$$

Здесь можно положить $C_1 = 0$ и взять частное решение $v = e^{-x^2}$. Далее подставляем найденное $v(x)$ в уравнение (1.20): $u' = 2x$, и находим $u = x^2 + C$. Производя обратную подстановку, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

О т в е т: $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$.

Уравнение Бернулли.

Обобщением линейного дифференциального уравнения (1.12) является **уравнение Бернулли**:

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (m \neq 1). \tag{1.21}$$

Чтобы решить уравнение (1.21), необходимо обе его части разделить на y^m

$$\frac{y'}{y^m} + p(x)\frac{y}{y^m} = q(x),$$

и сделать замену $z = y^{1-m}$. Так как $z' = (1-m)y^{-m}y'$, то уравнение (1.21) приводится к уравнению

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$$

или

$$z' + p(x)(1-m)z = q(x)(1-m).$$

Обозначив $p_1(x) = p(x)(1-m)$, $q_1(x) = q(x)(1-m)$, получим линейное неоднородное уравнение вида (1.12) относительно $z(x)$. Решая это уравнение, находим $z(x)$, и подставляя его в формулу для $y(x)$:

$$z = y^{1-m} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-m}},$$

получим решение уравнения Бернулли.

Замечание 1.7. Для решения уравнения Бернулли можно использовать также метод Бернулли.

Пример 1.11. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$y' + 2y = y^2e^x. \tag{1.22}$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли. Поделим обе части уравнения на y^2 и сделаем замену $z = 1/y$. Тогда получим следующее уравнение:

$$-z' + 2z = e^x. \tag{1.23}$$

Решим это уравнение методом вариации произвольной постоянной. Сначала решим однородное уравнение $-z' + 2z = 0$, являющееся уравнением с разделяющимися переменными. Его решение —

$z = Ce^{2x}$. Будем искать решение уравнения (1.23) в виде: $z = C(x)e^{2x}$. Подставим это выражение в уравнение (1.23):

$$-C'(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = e^x,$$

откуда $C(x) = e^{-x} + C_1$. Таким образом, общее решение уравнения (1.23) есть

$$z = e^x + C_1 e^{2x}.$$

Возвращаясь к переменной y, получим решение исходного уравнения:

$$y \cdot (e^x + C_1 e^{2x}) = 1.$$

Кроме того, функция $y = 0$ также является решением исходного уравнения.

О т в е т: $y \cdot (e^x + C_1 e^{2x}) = 1, \quad y = 0.$

1.2.7 Уравнения в полных дифференциалах

Определение 1.16. *Уравнение*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{1.24}$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах****, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$.*

Это имеет место в односвязной области D, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка и выполняется следующее условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Определение 1.17. ***Интегралом уравнения*** *(1.24) называется функция $U(x,y)$ обращающаяся в константу на любом решении уравнения (1.24), и не равная тождественно константе ни в какой части области D. Таким образом $U(x,\phi(x)) = c$ для любого решения $y = \phi(x)$. Равенство $U(x,y) = c$ называется* ***общим интегралом уравнения****.*

Чтобы решить уравнение (1.24), надо найти функцию $U(x,y)$, полный дифференциал от которой

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

равен левой части уравнения (1.24). Из этого уравнения получаем, что $dU = 0$, поэтому первый интеграл уравнения (1.24) можно записать в виде

$$U(x,y) = C, \quad \text{где } C \text{ — произвольная постоянная.}$$

Восстановим функцию по ее полному дифференциалу. Так как

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

можно найти $U(x,y)$ из решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим $U(x,y)$, предполагая, что x — постоянная[1]:

$$U(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial U}{\partial y}dy + f(x) = \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + f(x). \tag{1.25}$$

[1] Здесь (x_0, y_0) — произвольная точка, принадлежащая области непрерывности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частных производных. При решении конкретных примеров можно использовать неопределенные интегралы.

Продифференцируем полученное равенство по x и подставим в первое уравнение системы:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy\right) + f'(x) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dy + f'(x) = P(x,y).$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, получим

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy + f'(x) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dy + f'(x) = P(x,y).$$

Таким образом, для определения $f(x)$ имеем уравнение

$$P(x,y)\Big|_{y_0}^{y} + f'(x) = P(x,y).$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = P(x,y_0), \qquad f(x) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx.$$

Найденную функцию $f(x)$ подставим в (1.25):

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

Примечание 1.1. Можно начать со второго уравнения системы:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial U}{\partial x}dx + \varphi(y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y).$$

Дальше действовать аналогично.

Пример 1.12. *Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения*

$$2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy = 0$$

выбрать ту, которая проходит через точку $(1,0)$.

Р е ш е н и е. Здесь $P(x,y) = 2x\cos^2 y$, $Q(x,y) = 2y - x^2\sin 2y$ и заданное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах вида:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

так как

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2x\sin 2y.$$

Из равенства частных производных следует, что существует такая функция $U(x,y)$, что

$$dU(x,y) = 2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy.$$

Так как $U'_y = Q(x,\,y)$, можем найти $U(x,y)$ с точностью до произвольной функции $f(x)$:

$$U(x,y) = \int Q(x,\,y)\,dy = y^2 + \frac{x^2\cos 2y}{2} + f(x).$$

Чтобы найти $f(x)$, продифференцируем найденную функцию $U(x,y)$ по x: $U'_x = x\cos 2y + f'(x)$ и приравняем к известному значению $U'_x = 2x\cos^2 y$. Получим $2x\cos^2 y = x\cos 2y + f'(x)$, то есть $2x\cos^2 y = x(2\cos^2 y - 1) + f'(x)$. Отсюда $f'(x) = x$. Проинтегрировав, найдем $f(x) = x^2/2 + c_1$. Таким образом,

$$U(x,y) = y^2 + \frac{x^2\cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Уравнение семейства интегральных кривых имеет вид

$$y^2 + \frac{x^2\cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} = c.$$

Из этого семейства кривых выделим ту, которая проходит через начало координат. Полагая $x = 1$, $y = 0$, получим $c = 1$.

Уравнение искомой кривой имеет вид

$$2y^2 + x^2 \cos 2y + x^2 = 2 \quad \text{или} \quad y^2 + x^2 \cos^2 y = 1.$$

О т в е т: $y^2 + x^2 \cos^2 y = 1$.

Метод интегрирующего множителя.

Определение 1.18. *Если левая часть уравнения (1.24) не является полным дифференциалом, но удается подобрать такую функцию $\mu(x, y)$, что после умножения на нее уравнения (1.24) получаем уравнение в полных дифференциалах, то есть уравнение*

$$\mu(x, y)P(x, y)\, dx + \mu(x, y)Q(x, y)\, dy = 0$$

удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu(x, y)P(x, y))}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu(x, y)Q(x, y))}{\partial x},$$

то такая функция называется ***интегрирующим множителем.***

Некоторые частные случаи нахождения интегрирующего множителя.

1. Интегрирующий множитель зависит только от x.

   Пусть существует такой множитель $\mu(x, y) = \mu(x)$. Тогда уравнение

   $$\mu(x)P(x, y)\, dx + \mu(x)Q(x, y)\, dy = 0$$

   является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие

   $$\frac{\partial(\mu(x)P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x)Q(x, y))}{\partial x}.$$

   Откуда

   $$\mu(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \mu'(x)Q(x, y) + \mu(x)\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

   $$\mu'(x)Q(x, y) = \mu(x)\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right),$$

   $$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right)}{Q(x, y)}.$$

   Так как левая часть последнего равенства зависит только от x, то для существования интегрирующего множителя $\mu(x)$ необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от x:

   $$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)} = \Psi(x),$$

   следовательно,

   $$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \Psi(x).$$

   Решим это уравнение и получим

   $$\mu(x) = Ce^{\int \Psi(x) dx}.$$

2. Интегрирующий множитель зависит только от y: $\mu(x, y) = \mu(y)$.

   Пусть существует такой множитель $\mu(x, y) = \mu(y)$. Тогда уравнение

   $$\mu(y)P(x, y)\, dx + \mu(y)Q(x, y)\, dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие
$$\frac{\partial(\mu(y)P(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(y)Q(x,y))}{\partial x}.$$

Откуда
$$\mu'(y)P(x,y) + \mu(y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \mu(y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$
$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)}{P(x,y)}.$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от y, то для существования интегрирующего множителя $\mu(y)$ необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от y:
$$\frac{\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)}{P(x,y)} = \Psi(y),$$

следовательно,
$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \Psi(y).$$

Решим это уравнение и получим
$$\mu(y) = Ce^{\int \Psi(y)dy}.$$

3. Интегрирующий множитель зависит от $\omega(x,y)$: $\mu(x,y) = \mu(\omega(x,y))$.

   Пусть существует такой множитель $\mu(x,y) = \mu(\omega(x,y))$. Тогда уравнение
$$\mu(\omega(x,y))P(x,y)\,dx + \mu(\omega(x,y))Q(x,y)\,dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие
$$\frac{\partial(\mu(\omega(x,y))P(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(\omega(x,y))Q(x,y))}{\partial x}.$$

Откуда
$$\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}P(x,y) + \mu(\omega(x,y))\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}Q(x,y) + \mu(\omega(x,y))\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial\omega}{\partial y}P(x,y)\right) = \mu(\omega(x,y))\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\omega}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial\omega}{\partial y}P(x,y)}.$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от ω, то для существования интегрирующего множителя $\mu(y)$ необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от ω:
$$\frac{\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\omega}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial\omega}{\partial y}P(x,y)} = \Psi(\omega(x,y)).$$

Проверяем последнее равенство, выбирая в качестве $\omega(x,y)$ некоторые функции, например, $x+y$, xy, $\frac{x}{y}$, x^2+y^2 и т. д. И, решая уравнение
$$\frac{d\mu}{\mu} = \Psi(\omega(x,y))d\omega,$$

получаем
$$\mu = Ce^{\int \Psi(\omega(x,y))d\omega}.$$

Пример 1.13. *Решить дифференциальное уравнение:*

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0. \tag{1.26}$$

Р е ш е н и е. Уравнение (1.26) не является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0.$$

Но в данном случае можно подобрать интегрирующий множитель, так как

$$\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} = 2,$$

то есть интегрирующий множитель можно искать как в виде $\mu(x)$, так и в виде $\mu(y)$. Будем искать интегрирующий множитель как функцию от x:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = 2.$$

Решением этого уравнения будет $\mu(x) = e^{2x}$. При умножении уравнения (1.26) на $\mu(x)$ получим уравнение в полных дифференциалах:

$$(x^2 + y^2 + x)e^{2x}dx + ye^{2x}dy = 0.$$

Решив его, получим

О т в е т:

$$\frac{x^2 + y^2}{2}e^{2x} = c.$$

Замечание 1.8. 1. Если $\mu(x,y)$ — интегрирующий множитель, то $C\mu(x,y)$ — также интегрирующий множитель, где C — постоянная.

2. Если μ_0 — интегрирующий множитель и $U_0(x,y)$ — соответствующий ему интеграл, то $\mu = \mu_0\varphi(U_0)$ — также интегрирующий множитель, где $\varphi \in C^1$.

Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$d(xy) = ydx + xdy,$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$
$$d(y^2) = 2ydy,$$
$$d(\ln y) = \frac{dy}{y}.$$

Пример 1.14. *Решить уравнение*

$$ydx + xdy = 0$$

Р е ш е н и е. Так как $ydx + xdy = d(xy)$, то $d(xy) = 0$. Следовательно, $xy = C$.

О т в е т: $xy = C$.

Интегрирующий множитель и особое решение.

Пусть существует такое $\mu(x,y)$, что

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = du$$

или

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{1}{\mu(x,y)}du = 0,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} du = 0, \\ \frac{1}{\mu(x,y)} = 0, \end{array}\right.$$

таким образом, особое решение может содержаться среди функций, удовлетворяющих условию

$$\mu(x,y) = \infty.$$

Теорема 1.5 (Теорема о существовании интегрирующего множителя)**.** *Если уравнение имеет общий интеграл*

$$U(x, y) = C, \tag{1.27}$$

то оно имеет и интегрирующий множитель.

Доказательство. Так как (1.27) - общий интеграл уравнения, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \\ P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \end{cases}$$

Откуда, так как система относительно dx, dy имеет ненулевое решение, имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$$

или

$$Q\frac{\partial u}{\partial x} - P\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$Q\frac{\partial u}{\partial x} = P\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определим

$$\mu = \frac{1}{P}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Значит

$$P\frac{1}{P}\frac{\partial u}{\partial x}dx + Q\frac{1}{Q}\frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du.$$

Теорема доказана. □

Теорема 1.6. *Если μ_0 – интегрирующий множитель и $U_0(x, y)$ соответствующий ему интеграл, то $\mu_1 = \mu_0\varphi(U_0(x, y))$, где φ непрерывно дифференцируемая и не тождественно равная нулю функция, тоже интегрирующий множитель.*

Доказательство.

$$\mu_1 Pdx + \mu_1 Qdy = \mu_0\varphi(U_0)Pdx + \mu_0\varphi(U_0)Qdy =$$
$$= \varphi(U_0)(\mu_0 Pdx + \mu_0 Qdy) = \varphi(U_0)dU_0 = d\left(\int \varphi(U_0)\, dU_0\right).$$

Теорема доказана. □

Теорема 1.7. *Любые два интегрирующих множителя связаны соотношением*

$$\mu_1 = \mu_0\varphi(U_0),$$

где φ – непрерывно дифференцируемая и не тождественно равная нулю функция.

Доказательство. Пусть U_1 – интеграл, соответствующий μ_1, U_0 – интеграл, соответствующий μ_0. Тогда

$$\begin{cases} \mu_0(pdx + Qdy) = U_0 \\ \mu_1(pdx + Qdy) = U_1. \end{cases}$$

Так как $U_1 = \Phi(U_0)$, то

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0} = \frac{d\Phi(U_0)}{dU_0} = \frac{\Phi(U_0)'dU_0}{dU_0} = \Phi(U_0)' = \varphi(U_0).$$

Производная $\Phi'(U_0)$ существует и непрерывна, и U_0, U_1 имеют непрерывные частные производные, так как являются решениями уравнения.

Теорема доказана. □

Следствие 1.1. *Если* μ_1, μ_2 *– два различных интегрирующих множителя, то есть* $\frac{\mu_1}{\mu_2} \not\equiv \text{const}$, *то*

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = C$$

это общий интеграл уравнения.

Доказательство.

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \varphi(U_0) = C.$$

общий интеграл уравнения.

Следствие доказано. □

Еще один способ нахождения интегрирующего множителя.

$$\underbrace{(M_1dx + N_1dy)}_{1} + \underbrace{(M_2dx + N_2dy)}_{2} = 0.$$

Пусть μ_1 – интегрирующий множитель для уравнения $M_1dx + N_1dy = 0$, U_1 – его интеграл. Пусть μ_2 – интегрирующий множитель для уравнения $M_2dx + N_2dy = 0$, U_2 – его интеграл.

Предположим, что существует μ общий для (1) и (2), тогда $\mu = \mu_1\varphi(U_1)$, $\varphi \in C^1$, и $\mu = \mu_2\psi(U_2)$, $\psi \in C^1$. Если подобрать функции φ и ψ так, чтобы $\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\varphi(U_2)$ и положить $\mu = \mu_1\varphi(U_1)$, то это μ и будет интегрирующим множителем исходного уравнения.

Пример 1.15.

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0,$$

$$\left(\frac{y}{x}dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy\right) = 0.$$

$$\mu_1 = x,\ \ U_1 = xy;\ \ \mu_2 = y,\ \ U_2 = x^3y \Rightarrow$$

$$x\varphi(xy) = y\psi(x^3y),\ \ \varphi(t) = t^2,\ \ \psi(t) = t,$$

$$\mu = x^3y^2;\quad \frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3y)^2}{2} = C.$$

1.3 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Пример 1.16. *Уравнение радиоактивного распада.*

Р е ш е н и е. Пусть $x(t)$ — количество радиоактивного вещества. Известно, что скорость распада пропорциональна количеству вещества:

$$\dot{x}(t) = -kx(t), k > 0.$$

Определим период полураспада, если в начальный момент времени t_0 количество вещества составляет $x(t_0) = x_0$.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t),$$

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -kdt,$$

$$\ln|x(t)| = -kt + \ln c,$$

$$x(t) = ce^{-kt},$$

$$x_0 = x(t_0) = ce^{-kt_0},$$

$$c = x_0e^{kt_0},$$

$$x(t) = x_0e^{-k(t-t_0)}.$$

Определим, при каком T имеем $x(T) = \frac{x_0}{2}$.

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k(T-t_0)},$$

$$k(T - t_0) = \ln 2,$$

$$T = t_0 + \frac{1}{k}\ln 2 \ \text{ – период полураспада не зависит от начального количества вещества.}$$

Пример 1.17. *Уравнение движения материальной точки под действием силы, приложенной вдоль прямой, получается из второго закона Ньютона:*

$$m\ddot{x} = f(x,\ t).$$

Пример 1.18. *Скорость распространения бактерий.*

Р е ш е н и е. Известно, что скорость распространения бактерий пропорциональна их количеству:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) &= & kN(t), \\ N(0) &= & N_0. \end{cases}$$

$$\frac{dN}{N} = kdt,$$

$$\ln|N| = kt + \ln c,$$

$$N = ce^{kt},$$

$$N_0 = N(0) = c,$$

$$N = N_0 e^{kt} \ \text{ – численность популяции растет экспоненциально.}$$

Пример 1.19. *Движение материальной точки под действием силы тяжести по вертикальной прямой.*

Р е ш е н и е. Пусть известны скорость и положение точки в начальный момент времени, то есть выполняются условия $x(t_0) = x_0$ и $\dot{x}(t_0) = v_0$. В силу второго закона Ньютона имеем

$$\ddot{x}(t) = g,$$

$$\dot{x}(t) = gt + c_1,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2,$$

$$v_0 = \dot{x}(t_0) = gt_0 + c_1 \ \Rightarrow \ c_1 = v_0 - gt_0,$$

$$x_0 = x(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2 + (v_0 - gt_0)t_0 + c_2 \ \Rightarrow \ c_2 = x_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 - v_0 t_0,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + (v_0 - gt_0)t + x_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 - v_0 t_0.$$

Пример 1.20. *Малые колебания математического маятника.*

Р е ш е н и е. Шарик массы m закреплен на конце невесомой нерастяжимой нити. Отклонение нити от положения равновесия задачтся переменной x. На шарик действует сила тяжести $F = -mg$ и сила натяжения нити. Закон движения в проекции на касательную:

$$m\frac{d^2(lx)}{dt^2} = -mg\sin x,$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}\sin x.$$

Если колебания малые, то $\sin x \sim x$, и уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x.$$

Пример 1.21. *Уравнение семейства окружностей.*

Р е ш е н и е. Окружность с центром в точке $(x_0,\ y_0)$ радиуса R задается уравнением

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Трижды продифференцируем данное уравнение по x, считая y функцией от x:

$$2(x-x_0)+2(y-y_0)y'=0,$$

$$1+(y')^2+(y-y_0)y''=0 \ \Rightarrow\ y-y_0=-\frac{1+(y')^2}{y''}$$

$$2y'y''+y'y''+(y-y_0)y'''=0 \ \Rightarrow\ 3y'(y'')^2-\left(1+(y')^2\right)y'''=0.$$

2 Существование и единственность решения задачи Коши. Продолжение решений. Непрерывная зависимость решения от начальных условий, правой части и параметра.

2.1 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(x,\ y), \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1 (Пикара (существования и единственности решения))**.** *Пусть функция $f(x,\ y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по y в прямоугольнике $\Pi\ =\ \{(x\,y)\ :\ |x-x_0|\ \le\ a,\ \ |y-y_0|\ \le\ b\}$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (2.1), определенное на $U_h(x_0)\ =\ \{x_0\ -\ h,\ \ x_0\ +\ h\}$, где $h\ =\ \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M=\max_\Pi f(x,y)$;*

Доказательство. I. Существование.

Запишем интегральное уравнение:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s)\,ds. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. ***Решением*** *уравнения* (2.2) *называется непрерывная функция, обращающая это уравнение в тождество.*

Лемма 2.1 (Об интегральном уравнении)**.** *Функция $y(x)$ является решением уравнения* (2.2) *тогда и только тогда, когда она является решением задачи (2.1)*

Доказательство утверждения. Пусть $y(x)$ — решение задачи (2.1), тогда оно удовлетворяет тождеству

$$y'=f(x,y(x)).$$

Проинтегрируем:

$$y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(s,y(s)\,ds.$$

Функция $y(x)$ непрерывна. Учитывая начальное условие задачи (2.1), получаем, что $y(x)$ — решение уравнения (2.2).

Пусть $y(x)$ — решение уравнения (2.2). Функция $f(x,y)$ непрерывна по условию, функция $y(x)$ — по определению решения. Продифференцируем (2.2):

$$y'=f(x,y(x)).$$

Кроме того, $y(x_0)=y_0$.

Утверждение доказано. □

Далее будем рассматривать решение интегрального уравнения (2.2). **Метод последовательных приближений** Пусть

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds, \qquad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, ds.$$

По индукции определим последовательность функций

$$y_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{m-1}(s))\, ds.$$

Предположим, что эта последовательность сходится к $\overline{y}(x)$, и разрешен предельный переход под знаком интеграла и функции f. Тогда при $m \to \infty$ получим

$$\overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{y}(s))\, ds, \tag{2.3}$$

то есть $\overline{y}$ — решение уравнения (2.2), а, следовательно, и задачи Коши (2.1). Непрерывность функции $\overline{y}(x)$ будет доказана позже.

1) Докажем, что все функции последовательности $y_m(x)$ определены и непрерывны в $U_h(x_0)$ и не выходят за Π, то есть $|y_k(x) - y_0| \le b, k = 1, 2, \ldots$ при $|x - x_0| < h$, где $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \sup_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$. (Для всех точек $(x, y) \in \Pi$ выполняется $f(x, y) \in C(\Pi)$, и, так как Π — замкнуто и ограничено, то M — конечно.)

Докажем это по индукции. Основание индукции $k = 1$: Рассмотрим функцию $y_1(x)$. Она непрерывна при $|x - x_0| \le a$, так как $f(x, y)$ непрерывна, а интеграл с переменным верхним пределом - непрерывная функция на том же отрезке. Если точка $(x, y) \in \Pi$, то для нее выполняются условия

$$|y_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds| \le |\int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|\, ds| \le M|x - x_0| \le b$$

при условии, что $|x - x_0| < h$.

Далее, пусть это утверждение справедливо для $y_{n-1}(x)$, то есть выполняется

$|y_{n-1}(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le b$.

Для функции $y_n(x)$ получим

$$|y_n(x) - y_0| \le |\int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))|\, ds|.$$

Так как $(s, y_{n-1}(s)) \in \Pi$, то $|f(s, y_{n-1}(s))| \le M$, поэтому

$$|y_n(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le b. \tag{2.4}$$

2) Докажем, что последовательность функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $\overline{y}(x)$ ($y_n(x) \rightrightarrows \overline{y}(x)$) на отрезке $|x - x_0| \le h$.

Построим такой ряд, чтобы последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являлась последовательностью его частичных сумм:

$$y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \cdots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \ldots. \tag{2.5}$$

Докажем равномерную сходимость этого ряда, используя признак Вейерштрасса. Для этого докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}|x - x_0|^n/n! \le ML^{n-1}h^n/n!.$$

Доказательство будем проводить методом индукции.

Пусть $n = 1$. Тогда, согласно (2.4),

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le M|x - x_0|.$$

Пусть для $n = k$ неравенство доказано. Докажем его для $n = k + 1$:

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))|\, ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(s) - y_{k-1}(s)|\, ds\right| \le$$

$$\le L\int_{x_0}^{x} \frac{ML^{k-1}|x - x_0|^k}{k!} = \frac{ML^k|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Из того, что $|x-x_0| \le h$, получаем требуемое неравенство: $|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}h^n/n!$. Ряд $\sum L^{n-1}h^n/n!$ сходится (признак Даламбера). Таким образом, по признаку Вейерштрасса ряд (2.5) сходится равномерно, и его сумма $\overline{y}(x)$ является непрерывной функцией.

3) Докажем, что функция $\overline{y}(x)$ — решение задачи Коши (2.1). Для этого сначала докажем, что эта функция является решением интегрального уравнения (2.3).

Используя условие Липшица и равномерную сходимость последовательности $\{y_n(x)\}$ к $\overline{y}(x)$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \ge N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\, ds - \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{y}(s))\, ds\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(s, y_n(s)) - f(s, \overline{y}(s))|\; ds \le$$
$$\le L\int_{x_0}^{x} |y_n(s) - \overline{y}(s)|\; ds \le L\varepsilon\, |x-x_0| \le L\varepsilon h.$$

Таким образом, мы обосновали законность предельного перехода под знаком интеграла, откуда следует, что $\overline{y}(x)$ — решение интегрального уравнения (2.3), а следовательно, и задачи Коши 2.1.

II. Единственность.

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения задачи Коши (2.1), тогда они могут быть записаны в следующем виде:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, ds, \qquad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))\, ds.$$

Получим оценку для их разности:

$$0 \le |y_1(x) - y_2(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)| ds\right| \le$$
$$\le Lh \sup_{|x-x_0|\le h} |y_1(x) - y_2(x)| \le Lh^2M \to 0,$$

откуда следует, что

$$(1-Lh)\sup_{|x-x_0|\le h} |y_1(x) - y_2(x)| \le 0$$

и, выбирая h так, чтобы $h < \frac{1}{L}$, получим

$$\sup_{|x-x_0|\le h} |y_1(x) - y_2(x)| \le 0.$$

Таким образом, $y_1(x) \equiv y_2(x)$.

□

2.1.1 Лемма Гронуолла.

Лемма 2.2 (Гронуолла)**.** *Пусть функция* $u(x)$ *определена на* $x \in [x_0, \alpha)$, $\alpha \le \infty$, $u(x) \in C[x_0, \alpha)$, $u(x) \ge 0$. *Пусть* $a \ge 0$, $b(x) \in C[x_0, \alpha)$, $b(x) \ge 0$*, такие, что выполнено неравенство*

$$u(x) \le a + \int\limits_{x_0}^{x} b(t)u(t)dt.$$

Тогда

$$u(x) \le a e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(t)dt}.$$

Доказательство. 1. Пусть $a > 0$. Обозначим через $v(x) = a + \int\limits_{x_0}^{x} b(t)u(t)dt$. Тогда $v(x_0) = a,\ v(x) > 0$.

Очевидно, что

$$v'(x) = b(x)u(x) \le b(x)v(x).$$

Разделим обе части неравенства на $v(x)$, имеем

$$\frac{v'(x)}{v(x)} \le b(x).$$

Проинтегрируем неравенство на $[x_0, x]$. Получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{v'(t)}{v(t)} dt \le \int\limits_{x_0}^{x} b(t) dt,$$

$$\ln|v(x)| - \ln|v(x_0)| \le \int\limits_{x_0}^{x} b(t) dt.$$

Тогда

$$u(x) \le v(x) \le a e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(t) dt}.$$

2. Пусть $a = 0$. Для любого $a_1 > a$ лемма доказана, то есть выполнено

$$u(x) \le a_1 e^{\int\limits_{x_0}^{x} b_1(t) dt}$$

для любого $a_1 > 0$ и для любого $x \in [x_0, \alpha)$. Таким образом, при фиксированном $x \in [x_0, \alpha)$, выбирая a_1 сколь угодно малыми, получим $u(x) \le 0$, но $u(x) \ge 0$ по условию леммы, следовательно, $u(x) = 0$, следовательно,

$$u(x) \le \int\limits_{x_0}^{x} b(t) u(t) dt.$$

Поэтому $u(x) \equiv 0$. Лемма доказана. □

Предъявим второе доказательство единственности решения задачи Коши.

Доказательство. Если предположим, что существуют два решения $y(x)$ и $z(x)$, рассмотрим модуль их разности

$$|y(x) - z(x)| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \right| \le \left| L \int\limits_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)| dt \right|.$$

Таким образом, для функции $u(x) = |y(x) - z(x)|$ выполнено условие леммы Гроноулла (в нашем случае $a = 0,\ b(x) = L$). Следовательно, $u(x) \equiv 0$, то есть $y(x) = z(x)$.

Единственность доказана. □

Замечание 2.1. В этом доказательстве единственности достаточно, чтобы существовала положительная непрерывная функция $b(x)$, такая, что

$$|f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \le b(x) |y(x) - z(x)|.$$

Замечание 2.2. Для $y'(x) = b(x)y + a(x)$ при условии непрерывности $a(x), b(x)$ выполняются условия теоремы существования и единственности в области непрерывности коэффициентов уравнения. Таким образом, решение задачи Коши для линейного уравнения

$$y'(x) + p(x)y = q(x),\ y(x_0) = y_0,$$

где функции $p(x),\ q(x)$ непрерывны, единственно.

Замечание 2.3. В лемме Гроноулла можно заменить интервал $[x_0, \alpha)$ интервалом $(\beta, x_0]$, где $\beta \ge -\infty$. Объединяя утверждения для этих случаев, получим лемму для $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ для любого $h \ge 0$.

Замечание 2.4. Отметим, что выполнение условий этой теоремы на всей числовой прямой не гарантирует продолжаемости решения на всю прямую ($y' = y^2 - 2y + 1$).

2.2 Теорема о продолжении решения задачи Коши.

Теорема 2.2. *Пусть*
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$
причем $f(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \in C(G), \quad G \subset \mathbb{R}^2$. *Тогда решение задачи Коши можно продолжить так, что оно подойдет сколь угодно близко к границе* ∂G *или уйдет сколько угодно далеко от начала координат* (x_0, y_0).

Определение 2.2. *Функция* $\tilde{y}(x)$ *называется продолжением решения* $y(x)$*, определенного на интервале* (α, β)*, на интервал* $(\alpha_1, \beta_1) \supset (\alpha, \beta)$*, если* $\tilde{y}(x)$ *– решение задачи Коши, и* $\tilde{y}(x) = y(x)$ *на* (α, β).

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.3. *Пусть* G_1 *– область с границей* ∂G_1*,* G_2 *– область с границей* ∂G_2*. Тогда* $\partial(G_1 \cap G_2) \subset \partial G_1 \cup \partial G_2$.

Доказательство леммы. Если $x \in \partial(G_1 \cap G_2)$, то существуют последовательности $\{x_n\},\ \{y_n\}$ такие, что
$$\begin{cases} x_n \to x,\ x_n \in G_1 \cap G_2 \\ y_n \to y,\ y_n \notin G_1 \cap G_2. \end{cases}$$
Таким образом,
$$\begin{cases} x_n \in G_1 \\ x_n \in G_2, \end{cases}$$
и $y_n \notin G_1$ или $y_n \notin G_2$. В первом случае существует бесконечное число $y_n \notin G_1$, во втором – бесконечное число $y_n \notin G_2$. Переходим к подпоследовательности и получаем, что в одном случае существуют $\{x_n\} \in G_1,\ \{y_n\} \notin G_1$ такие, что $x_n \to x,\ y_n \to x$, поэтому $x \in \partial G_1$, в другом случае существуют последовательности $\{x_n\} \in G_2,\ \{y_n\} \notin G_2$, что $x_n \to x,\ y_n \to x$. Следовательно, $x \in \partial G_2$. Итак, $x \in \partial G_1 \cup \partial G_2$.

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы о продолжении. Рассмотрим три случая:

1. Область G ограничена и замкнута.

Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in G$. По локальной теореме существования и единственности существует такое число h_0, что решение задачи Коши существует и единственно на интервале $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$. Выберем $h_0 = \frac{r_0}{\sqrt{M^2+1}}$, где $r_0 = \rho\left((x_0, y_0), \partial G\right), \quad M = \max\limits_G |f(x,y)|$.

Далее возьмем точку x_1 так, чтобы $x_0 < x_1 < x_0 + h_0$ (например, $x_1 = x_0 + \frac{99}{100}h_0$). Тогда в силу локальной теоремы существования и единственности решения, решение задачи Коши, проходящее через точку x_1, существует и единственно на интервале $(x_1 - h_1, x_1 + h_1)$, где $h_1 = \frac{r_1}{\sqrt{M^2+1}},\ r_1 = \rho\left((x_1, y(x_1)), \partial G\right)$, причем эти решения совпадают на общей области определения. Далее берем точку $x_2 = x_1 + \theta h_1,\ 0 < \theta < 1$, тогда существует решение, проходящее через точку x_2, определенное на $[x_2 - h_2, x_2 + h_2]$, где $h_2 = \frac{r_2}{\sqrt{M^2+1}},\ r_2 = \rho\left((x_2, y(x_2)), \partial G\right)$.

Таким образом, построили последовательность точек $x_{k+1} = x_k + d_k, d_k = \frac{r_k}{\sqrt{M^2+1}}, r_k = \rho\left((x_k, y_k), \partial G\right)$. Так как G ограничена, то x_k ограничена и монотонно возрастает, значит, существует $\lim_{\to\infty} x_k = b$. При этом решение продолжалось на каждый отрезок $[x_k, x_{k+1}]$, а следовательно и на их объединение $\bigcup [x_k, x_{k+1}] = [x_0, b)$.

Так как $f(x,y)$ ограничена и $|y'| = |f(x,y)|$, то $y(x)$ удовлетворяет условию Липшица, где $L = \max\limits_G |y'| = \max\limits_G f(x,y) = M$. Таким образом, к последовательности $y(x_n + h_n)$ применим критерий Коши сходимости последовательности $\lim_{x \to b-0} y(x) = y*$. Тогда так как $y(x)$ непрерывна на $[x_0, b]$ и $p_k(x_k, y_k) \to p*(b, y(b))$. Так как $x_{k+1} = x_k + d_1 + \ldots + d_k \to b, k \to \infty$, то ряд $\sum d_k$ сходится, а значит, $d_k \to 0, k \to \infty$, откуда $r_k \to 0$. Если предположим, что $p^* \notin \partial G$, то существует $\varepsilon > 0$, что $\rho(p^*, \partial G) > 2\varepsilon$, но т.к. $p^* = \lim\limits_{k \to \infty} p_k$, то $\exists N > 0 : \forall n > N p_k \in U_\varepsilon(p^*)$ – противоречие. Таким образом, $p^* \in \partial G$.

2. Пусть G произвольная область, $f(x,y)$ ограничена в G. Тогда сначала возьмем $h_0 = \frac{r_0}{\sqrt{M^2+1}}$, и в силу локальной теоремы существования и единственности решение существует и единственно

на $[x_0-h_0,x_0+h_0]$, далее берем точку $x_1=x_0+\theta h_0$, тогда существует единственное решение, проходящее через точку x_1 и определенное на $[x_1-h_1,x_1+h_1]$, где $h_1=\frac{r_1}{\sqrt{M^2+1}}$ и т.д.

Тогда либо решение пересечет границу ∂G, либо уйдет сколь угодно далеко от начала координат (пройдет сколь угодно близко к границе).

3. Пусть G произвольная область, условие ограниченности на $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ не требуем. Тогда рассмотрим круг K с центром в точке (x_0,y_0) радиуса $2R$ и отступим от границы области G внутрь на ε, получим $\partial G_\varepsilon\cup\partial K$. Рассмотрим область $G\cap K$. Тогда по лемме $\partial(G\cap K)\subset\partial G\cup\partial K$. $G\cap K$ – замкнутая ограниченная область. Тогда по доказанному решение подойдет сколь угодно близко к границе области $G\cap K$, т.е. оно либо подойдет сколь угодно близко к ∂K и тогда удовлетворяет условию $|y(x)|\geq R$ (т.к. R можно выбрать произвольно, то это означает, что в этом случае решение уйдет сколь угодно далеко от начала координат (x_0,y_0)), либо подойдет сколь угодно близко к ∂G (внутри K), т. е. сколь угодно близко к границе области G (можно доказать, что $h_n\to 0, n\to\infty$, следовательно, $r_n\to 0, n\to\infty$, т.е. $(x_n+h_n, y(x_n+h_n))$ подойдет сколь угодно близко к границе области G).

Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Если $f(x,y)$ определена и непрерывна вместе с $\frac{\partial f}{\partial y}$ в полосе $\{|x-x_0|\leq a,\ -\infty<y<+\infty\}$, то решение задачи Коши с начальными данными $y(x_0)=y_0$ либо пересечет прямые, $x=x_0+a,\ x=x_0-a$, либо уйдет на бесконечность на (x_0,x_0+a) (x_0-a,x_0).*

Замечание 2.5. При доказательстве теоремы о продолжении решения мы изучали продолжение на отрезок $[x_0,x_0+h]$, т.е. вправо. Продолжаемость влево доказывается аналогично.

Пример 2.1 (уравнения, все решения которого непродолжаемые)**.**

$$y'=y^2+1$$

$$\frac{dy}{y^2+1}=dx$$

$$\operatorname{arctg} y=x+C$$

$$y=\operatorname{tg}(x+C).$$

Любое решение уравнения продолжаемо лишь на интервал длины π.

Пример 2.2. *Рассмотрим уравнение*

$$y'=x^3-y^3$$

Р е ш е н и е. $y'=0\Leftrightarrow x=y$, $y'>0$ при $y<x$, решение возрастает,
$y'<0$ при $y>x$, решение убывает.
Если решение начинается в точке x_0 выше прямой $y=x$, то оно обязательно пересечет эту прямую и войдет в область $y<x$. Рассмотрим любую точку этой области $(x',y(x'))$ и область $(x',y(x'))<y<x$. Тогда в силу поля направлений решение не пересекает границу области, следовательно, оно определено при сколь угодно больших x.

2.2.1 Достаточные условия продолжаемости решения на весь интервал

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0,\ x_0\in(\alpha,\beta), -\infty\leq\alpha<\beta\leq+\infty \end{cases}$$

Теорема 2.3. *Пусть*

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & (x,y)\in\Pi_{\alpha,\beta}, \\ y(x_0)=y_0, & x_0\in(\alpha,\beta), \end{cases}$$

где $f(x,y)\in C(\Pi_{\alpha,\beta})\cap Lip_y(\Pi_{\alpha,\beta})$, $\Pi_{\alpha,\beta}=\{-\infty\leq l<x<\beta\leq+\infty, y\in\ \mathbb{R}\}$ (можно считать, что $f_y'\in C(\Pi_{\alpha,\beta})$),

$$|f(x,y)|\leq a(x)|y|+b(x), \tag{2.6}$$

где $a(x),\ b(x)$ – непрерывные функции на (α,β).
Тогда решение $y(x)$ задачи Коши продолжается на весь интервал (α,β).

Докажем, что для любого отрезка $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta), x_0 \in [\alpha_1, \beta_1]$, решение может быть продолжено на $[\alpha_1, \beta_1]$. На этом отрезке $a(x),\ b(x)$ – непрерывны, следовательно существуют такие k и m, что $|a(x)| \leq k, |b(x)| \leq m$.

Для доказательства используется следующая

Лемма 2.4 (Лемма о дифференциальном неравенстве.)**.** *Пусть $z(x)$ удовлетворяет условию на $(\alpha, \beta), -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$:*

$$|z'(x)| \leq k|z(x)| + m,$$

где $k \geq 0,\ m > 0,$ и пусть $|z(x)| \leq r_0$.
Тогда, если $k = 0$, то $|z(x)| \leq r_0 + m|x - x_0|$. Если $k > 0$, то $|z(x)| \leq r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|x-x_0|} - 1)$.

Доказательство леммы. Если $k = 0$, то $|z'(x)| \leq m$. Справедливо $z(x) = z(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} z'(t)dt$. Поэтому имеем

$$|z(x)| \leq |z(x_0)| + |\int\limits_{x_0}^{x} |z'(t)|dt|,$$

$$|z(x)| \leq r_0 + m|x - x_0|.$$

Пусть $k \geq 0$.

$$|z|^2 = z \cdot z.$$

Заметим, что для дифференцируемости $|z|$ надо требовать $|z| \neq 0$. Рассмотрим точку $x_1 > x_0$ такую, что $z(x_1) \neq 0$. Положим $x^* = x_0$, если $z(x) \neq 0$ на (x_0, x_1).
Если существует точка $\bar{x} \in (x_0, x_1)$ такая, что $z(\bar{x}) = 0$. то возьмем в качестве точки $x^* = \sup\{\bar{x} : \bar{x} \in (x_0, x_1),\ z(\bar{x}) = 0\}$. Тогда $z(x^*) = 0$, более того, $|z(x^*)| \leq r_0$. Тогда на (x^*, x_1) существует $|z|'$. Продифференцируем

$$|z|^2 = z \cdot z,$$

тогда

$$2|z||z|' = 2zz' \leq 2|z||z'|,$$

откуда, так как $|z| \neq 0$ на (x^*, x_1), получим $|z|' \leq |z'|$.

Обозначим $|z(x)| = r(x)$. Тогда из условия леммы $|z|' \leq |z'| \leq k|z| + m$, то есть $r'(x) \leq kr(x) + m$.

Рассмотрим $\varphi(x) = e^{-kx}\left(r(x) + \frac{m}{k}\right)$. Докажем, что $\varphi(x)$ монотонно не возрастает на (x^*, x_1). Действительно,

$$\varphi^{'}(x) = -ke^{-kx}\left(r(x) + \frac{m}{k}\right) + e^{-kx}r'(x) \leq -ke^{-kx}\left(r(x) + \frac{m}{k}\right) + e^{-kx}\left(kr(x) + m\right) = 0.$$

Следовательно, $\varphi'(x) \leq 0$ и $\varphi(x_1) \leq \varphi(x^*)$. Таким образом,

$$e^{-kx_1}\left(r(x_1) + \frac{m}{k}\right) \leq e^{-kx^*}\left(r(x^*) + \frac{m}{k}\right),$$

$$r(x_1) \leq e^{k(x_1 - x^*)}\left(r(x^*) + \frac{m}{k}\right) - \frac{m}{k}.$$

Заметим, что $x_1 - x^* \leq x_1 - x_0$ и

$$r(x^*) = |z(x^*)| \leq r_0 \leq e^{k(x_1 - x_0)}\left(r_0 + \frac{m}{k}\right) - \frac{m}{k}.$$

Тогда это неравенство выполнено в произвольной точке $x_1 > x_0$. Можно записать

$$r(x) \leq e^{k(x-x_0)}\left(r_0 + \frac{m}{k}\right) - \frac{m}{k}, \quad x > x_0.$$

Заменой $x \to -x, \quad x_0 \to -x_0$ можно получить аналогичную оценку для $x < x_0$. Следовательно,

$$r(x) = |z(x)| \leq e^{k|x-x_0|}\left(r_0 + \frac{m}{k}\right) = r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k}\left(e^{k|x-x_0|} - 1\right).$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Возьмем $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$. Тогда существуют $m \geq 0,\ k \geq 0$ такие, что

$$|\alpha(x)| \leq k,\ |b(x)| \leq m.$$

Пусть $|y(x_0)| = d$, обозначим $R = \max(r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|x-x_0|} - 1))$. Тогда из (2.6) следует, что $|y'(x)| = |f(x,y)| \leq k|y| + m$ на $[\alpha_1, \beta_1]$. Поэтому $|y(x)| \leq r_0 e^{k|x-x_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|x-x_0|} - 1) \leq R$.

Рассмотрим полосу $|y| \leq R+1$, т. е. $-(R+1) \leq y \leq R+1$. Получим замкнутый прямоугольник

$$\Pi_{\alpha_1,\beta_1,R} = \{(x,y) :\ x \in [\alpha_1, \beta_1],\ -(R+1) \leq y \leq R+1\}.$$

Таким образом, по теореме о продолжении решения в замкнутой ограниченной области решение выйдет на границу $\Pi_{\alpha_1,\beta_1,R}$. При этом решение не может выйти на верхнее и нижнее основания $y = \pm(R+1)$, так как $|y(x)| \leq R$, следовательно, решение пересекает прямые $x = \alpha_1,\ x = \beta_1$. Берем последовательности $\{\alpha_n\},\ \{\beta_n\} :\ \alpha_n \to \alpha,\ \beta_n \to \beta,\ n \to \infty$. Тогда решение может быть продолжено на любой отрезок $[\alpha_n, \beta_n]$, а, следовательно, на их объединение, то есть на (α, β).

Теорема доказана. □

2.3 Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части уравнения.

Теорема 2.4. *Пусть задача Коши*

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y_0 &= y(x_0) \end{cases}$$

имеет решение $\phi(x)$, определенное на интервале $x_0 \in [\alpha, \beta]$, и $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, причем функции $f(x,y)$ и $f_{y'}(x,y)$ непрерывны в некоторой замкнутой окресности U графика $y = \phi(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ что, для всех решений $z(x)$ другой задачи

$$\begin{cases} z' &= g(x,z) \\ z_0 &= z(x_0) \end{cases}$$

такой что $g(x,z), g'_z(x,z) \in C(U)$ ($g(x,z)$ - непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по z) и

$$|g(x,z) - f(x,z)| \leq \delta \tag{2.7}$$

и $|z_0 - y_0| \leq \delta$, имеем $|z(x) - \phi(x)| < \varepsilon$, причем $z(x)$ продолжается на $[\alpha, \beta]$. (Малое изменение правой части и начальных условий приводит к малым изменениям решения)

Доказательство. Возьмем $U = \{(x,y) : x_0, x \in [\alpha, \beta], |y - \phi(x)| \leq \rho\}$.

Из условия Липшица и условия (2.7) имеем,

$$|z'-y'| = |f(x,y)-g(x,z)| = |f(x,y)-f(x,z)+f(x,z)-g(x,z)| \leq |f(x,y)-f(x,z)|+|f(x,z)-g(x,z)| \leq L|y-z|+\delta.$$

Обозначим через $u(x) = z(x) - \phi(x)$, тогда $|u'(x)| \leq L|u(x)| + \delta$ на $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$. С использованием дифференциального неравенства получим (так как $|z_0 - y_0| \leq \delta$, то есть $|u(x_0)| \leq \delta$) $|u'(x)| \leq L|u(x)| + \delta, L \geq 0$,

Тогда

$$\begin{cases} |u(x)| &\leq \delta + \delta|x - x_0|, \quad L = 0 \\ |u(x)| &\leq \delta e^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|x-x_0|} - 1\right)|, \quad L > 0, \end{cases}$$

пока $z(x)$ лежит в U.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\varepsilon_1 = min(\varepsilon, \rho)$ тогда выберем δ таким образом, что

$$\begin{cases} \delta + \delta|x - x_0| & < \varepsilon_1, \quad L = 0 \\ \delta e^{L|x-x_0|} + \dfrac{\delta}{L}\left(e^{L|x-x_0|} - 1\right) & < \varepsilon_1, \quad L > 0. \end{cases}$$

Можно записать, что
$$\begin{cases} \delta+\delta s & <\varepsilon_1, \quad L=0 \\ \delta e^{Ls}+\dfrac{\delta}{L}(e^{Ls}-1) & <\varepsilon_1, \quad L>0, \end{cases}$$
где $s = min(|x_1 - x_0|, |x_0 - x_2|)$.

Тогда $u(x)$ может быть продолжена до границы области $U_1 = \{(x,y) : x \in [\alpha', \beta'], |y - \phi(x)| \leq \rho\}$. При этом решение не может выйти через верхнюю и нижнюю границы U_1, (так как на них $|u(x)| = \varepsilon_1$, а $|u(x)| < \varepsilon_1$), а значит пересекает прямые $x = \alpha', x = \beta'$, и решение $u(x)$ (а значит и $z(x)$) может быть продолжено за $[\alpha', \beta']$.

Эти рассуждения можно повторить для всех $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$. Таким образом, получим что $u(x)$(и $z(x)$) может быть продолжено на весь отрезок $[\alpha, \beta]$.

При этом $|u(x)| = |z(x) - \phi(x)| < \varepsilon$ □

2.3.1 Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.

Рассмотрим задачу Коши, зависящую от параметра μ.

$$\begin{cases} y' & = f(x,y,\mu) \\ y(x_0) & = a(\mu). \end{cases} \tag{2.8}$$

Теорема 2.5. *Пусть при $\mu = \mu_0$ решение $\phi(x, \mu_0)$ задачи (2.8) существует на отрезке $[x_1, x_2]$. Пусть функции $f(x, y, \mu), f_y(x, y, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных на множестве $V = \{(x, y, \mu) : x \in [x_1, x_2], |y - \phi(x, \mu_0)| \leq \rho, \mu : |\mu - \mu_0| \leq \eta_1\}$, $a(\mu)$ непрерывна в U.*

Тогда существует такое $\eta > 0$, что решение $y(x, \mu)$ задачи (2.8) непрерывно по $\mu, |\mu - \mu_0| < \eta$.

3 Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно первой производной.

Уравнением, не разрешенным относительно первой производной, называется уравнение вида

$$f(x, y, y') = 0.$$

Пример 3.1. *Уравнение $(y')^2 - 9x^2 = 0$ можно свести к двум уравнениям: $y' = 3x$ и $y' = -3x$.*

Р е ш е н и е. Их решения
$$y = \frac{3}{2}x^2 + c \text{ и } y = c - \frac{3}{2}x^2.$$
Через каждую точку плоскости x, y проходит не менее двух решений: по одному из каждого семейства решений.

Теорема 3.1 (существования и единственности для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно первой производной)**.** *Рассмотрим уравнение*

$$f(x, y, y') = 0. \tag{3.1}$$

Пусть $f \in C^1$ в области D и в точке $(x_0, y_0, y_0') \in D$ имеем $f = 0$, $\partial f / \partial y' \neq 0$.

Тогда на любом достаточно малом отрезке $[x_0 - d, x_0 + d]$ существует единственное решение уравнения (3.1)*, удовлетворяющее условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{3.2}$$

Доказательство. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0) существует единственная непрерывная функция $g(x, y)$, удовлетворяющая условиям

$$f(x, y, g(x, y)) \equiv 0, \quad g(x_0, y_0) = y_0', \tag{3.3}$$

при этом $g \in C_1$. По теореме существования и единственности уравнение $y' = g(x, y)$ на некотором отрезке $[x_0 - d_1, x_0 + d_1]$, $d_1 > 0$, имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Так как $y'(x) \equiv g(x, y(x))$, то из (3.3) следует

$$f(x, y, y') \equiv 0, \quad y'(x_0) = g(x_0, y_0) = y'_0,$$

то есть $y(x)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и условиям (3.2).

$\square$

Дискриминантная кривая.

Если для уравнения (3.1), где $f \in C^1$, в точке (x_0, y_0) нарушается единственность, то при некотором y'_0 выполняются два условия

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} = 0. \tag{3.4}$$

Так как y'_0 заранее не известно, то для отыскания точки (x_0, y_0) надо из уравнений (3.4) исключить y'_0. Получим уравнение $\varphi(x_0, y_0) = 0$, определяющее некоторое множество на плоскости x, y. Это множество называется **дискриминантной кривой**. Дискриминантная кривая содержит все точки нарушения единственности, но может содержать и некоторые другие точки.

Пример 3.2 (см. [10])**.** *Найдем дискриминантную кривую для уравнения*

$$(y')^2 - 4y^3(1 - y) = 0.$$

Р е ш е н и е. Пишем два уравнения вида (3.4):

$$f = (y')^2 - 4y^3(1 - y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} \equiv 2y' = 0.$$

Из второго уравнения имеем $y' = 0$. Подставляя в первое, находим дискриминантную кривую $4y^3(1-y) = 0$. Получаем две ветви: $y = 0$ и $y = 1$. В данном случае они обе являются решениями данного дифференциального уравнения.

Чтобы выяснить, где нарушается единственность, найдем другие решения. Из данного уравнения имеем $y' = \pm 2y\sqrt{y(1 - y)}$. Решая эти уравнения с разделяющимися переменными, получаем:

$$y = \frac{1}{(x + c)^2 + 1}, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

На прямой $y = 0$ не нарушается единственность, а на прямой $y = 1$ нарушается.

Метод интегрирования уравнений первого порядка, не разрешенных относительно первой производной Рассмотрим уравнение

$$f(x, y, y') = 0.$$

Допустим, что из этого уравнения можно выразить y, то есть $y = \varphi(x, y')$. Тогда вводим параметр $p = y'$ или $p = \frac{dy}{dx}$, $dy = pdx$. Таким образом, функция y будет иметь вид

$$y = \varphi(x, p). \tag{3.5}$$

Найдем полный дифференциал данной функции

$$dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp,$$

$$pdx = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} dp = \left(p - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx. \tag{3.6}$$

Если это уравнение интегрируется в квадратурах, то находим решение в виде $x = \varphi_1(p)$. Подставляя это решение в уравнение (3.5), находим y как функцию от p. И, таким образом, получаем решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi_1(p), \\ y = \varphi_2(p). \end{cases}$$

Далее, если это возможно, исключаем из этих уравнений параметр p.

Примечание 3.1. Если из исходного уравнения можно выразить x, то уравнение решается тем же методом.

Для следующих двух типов уравнений соответствующее уравнение (3.6) всегда интегрируется в квадратурах.

Уравнение Лагранжа.

Определение 3.1. ***Уравнением Лагранжа*** *называется дифференциальное уравнение первого порядка, которое является линейным относительно x и y. Это уравнение всегда можно записать в виде*

$$y = x\Phi(y') + \Psi(y'). \tag{3.7}$$

Чтобы найти решение этого уравнения, заменим p на y' и, подставив в уравнение (3.7), получим

$$y = x\Phi(p) + \Psi(p). \tag{3.8}$$

Находим дифференциал от левой и правой частей уравнения (3.8). В силу замены имеем $dy = pdx$ и получаем

$$dy = pdx = \Phi(p)dx + x\Phi'(p)dp + \Psi'(p)dp,$$

$$(p - \Phi(p))\, dx = (x\Phi'(p) + \Psi'(p))\, dp.$$

Разделим полученное равенство на $(p - \Phi(p))dp$ и получим систему уравнений

$$\left[\begin{array}{l} p - \Phi(p) = 0, \\ \dfrac{dx}{dp} = x\dfrac{\Phi'(p)}{p - \Phi(p)} + \dfrac{\Psi'(p)}{p - \Phi(p)}. \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения системы p_0 находится непосредственно. А так как второе уравнение системы является линейным неоднородным уравнением относительно x, то его можно решить, например, с помощью метода вариации произвольной постоянной. Получаем решение уравнения Лагранжа

$$\left[\begin{array}{l} y = x\Phi(p_0) + \Psi(p_0), \\ \left\{\begin{array}{l} x = x(p, C), \\ y = x(p, C)\Phi(p) + \Psi(p). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Уравнение Клеро.

Определение 3.2. ***Уравнением Клеро*** *называется уравнение вида*

$$y = xy' + \Psi(y'), \tag{3.9}$$

которое является частным случаем уравнения Лагранжа.

Аналогично решению уравнения Лагранжа вводим замену $p = y'$, получаем

$$y = xp + \Psi(p).$$

Находим дифференциал от левой и правой частей этого уравнения:

$$dy = pdx = pdx + xdp + \Psi'(p)dp.$$

Сокращая на pdx, получаем

$$xdp + \Psi'(p)dp = 0$$

или

$$(x + \Psi'(p))\, dp = 0 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \Psi'(p) = 0, \\ dp = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\Psi'(p), \\ p = C. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = xC + \Psi(C), \\ \left\{\begin{array}{l} x = -\Psi'(p), \\ y = -\Psi'(p)p + \Psi(p). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример 3.3. *Решить уравнение*

$$y = 2xy' - (y')^3.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Лагранжа. После замены $y' = p$ уравнение примет вид

$$y = 2xp - p^3. \tag{$*$}$$

Находим дифференциал от левой и правой частей этого уравнения:

$$dy = 2pdx + 2xdp - 3p^2dp.$$

Учитывая, что $dy = pdx$, приводим полученное уравнение к линейному относительно x:

$$x' = -\frac{2x}{p} + 3p.$$

Решив его методом вариации произвольной постоянной, получим решение линейного уравнения

$$x = \frac{\frac{3}{4}p^4 + c}{p^2}.$$

Подставив эту функцию в уравнение (*), получим выражение y тоже через параметр p:

$$y = \frac{p^3}{2} + \frac{2c}{p}.$$

О т в е т:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{3}{4}p^4 + c}{p^2}, \\ y = \dfrac{p^3}{2} + \dfrac{2c}{p}. \end{cases}$$

4 Уравнения высших порядков.

4.1 Уравнения высших порядков

$$f\left(x, y, y', .., y^n\right) = 0 \tag{4.1}$$

или

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', .., y^{(n-1)}\right) \tag{4.2}$$

Определение 4.1. *Решением уравнения называется функция $y = \phi(x), n$ раз дифференцируемая и обращающая уравнение в тождество.*

Определение 4.2 (Задача Коши)**.** *Найти решение уравнения, удовлетворяющее следующим условиям*

$$\begin{cases} y(x_0) & = y_0^0 \\ y'(x_0) & = y_1^0 \\ \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1}^0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Теорема 4.1 (Теорема существования и единственности решения задачи Коши)**.** *Пусть функция $F(x, y_0, \cdots, y_{n-1})$ непрерывна на множестве $N = \{(x, y_0, \cdots, y_{n-1}) : |x - x_0| \leq a, |y_0 - y_0^0| \leq b, \cdots, |y_{n-1} - y_{n-1}^0| \leq b\}$. Тогда решение задачи (4.2)-(4.3) существует в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x_0)$. Если $f'y_0, \cdots, fy_{n-1}$ непрерывны в N (или выполняется более слабое условие), тогда F удовлетворяет условию Липшица по $y_0, \cdots, y_{n-1}N$, то решение задачи Коши (4.2)-(4.3) единственно в $U_\varepsilon(x_0)$, где $\varepsilon = min(a, \frac{b}{max(M_0, \cdots, M_{n-1})}), M_i = \max_n |F'_{y_i}|$.*

4.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Метод решения уравнений, допускающих понижение порядка, состоит в том, что в исходном уравнении делается такая замена $z(x)$ или $p(y)$, относительно которой получается уравнение более низкого порядка.

При нахождении частного решения $y(x)$ исходного уравнения порядка $n \geq 2$ с заданными начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, удобно константы интегрирования c_1, c_2, $\ldots$, c_n, возникающие в процессе нахождения сначала $z(x)$ (или $p(y)$), затем $y(x)$, определять при помощи начальных условий не из общего решения, а по мере их появления.

Укажем несколько наиболее распространенных случаев:

1. В уравнение не входит искомая функция y, т.е. уравнение имеет вид

   $$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

   Тогда порядок уравнения можно понизить с помощью замены $y^{(k)} = z(x)$.

2. В уравнение не входит независимая переменная x, т.е. уравнение имеет вид

   $$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

   Тогда порядок уравнения понижается с помощью замены $y' = p(y)$.

3. Уравнение однородно относительно y и его производных, т.е.

   $$F(x, ky, ky', ky'', \ldots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

   Тогда порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где z — новая неизвестная функция.

4. Уравнение однородно относительно x и y в обобщенном смысле, т.е.

$$F(kx, k^m y, k^{m-1}y', k^{m-2}y'', \dots, k^{m-n}y^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Для этого уравнения делается замена $x = e^t$, $y = ze^{mt}$, где $z = z(t)$ — новая неизвестная функция, а t — новая независимая переменная. Данная замена приводит к уравнению, не содержащему независимую переменную t. Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

Пример 4.1. *Решить уравнение*

$$xy'' = (y')^2.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение не содержит y, поэтому порядок можно понизить заменой $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$x^2 z' = z^2. \qquad (*)$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}, \qquad z = \frac{x}{1 - c_1 x}.$$

Подставим $y' = x/(1 - c_1 x)$ в уравнение (*) и получим решение

$$y = -\frac{1}{c_1}x - \frac{1}{c_1^2}\ln|1 - c_1 x| + c_2.$$

При разделении переменных в уравнении (*) могли быть потеряны решения $z = 0$ и $x = 0$. Функция $z = 0$ является решением этого уравнения, а $x = 0$ — нет. Таким образом, исходное уравнение имеет решение $y' = 0$, то есть $y = c$.

О т в е т:

$$y = -\frac{1}{c_1}x - \frac{1}{c_1^2}\ln|1 - c_1 x| + c_2, \qquad y = c.$$

Пример 4.2. *Решить уравнение*

$$y^4 - y^3 y'' = 1 \quad \textit{при условии} \quad y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Р е ш е н и е. Пусть $y' = p(y)$, $y'' = \dfrac{dp}{dy}y' = \dfrac{dp}{dy}p$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^4 - y^3 p\frac{dp}{dy} = 1, \quad p(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$\int p\,dp = \int \frac{y^4 - 1}{y^3}\,dy, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + c_1, \quad c_1 = 0.$$

Итак,

$$p^2 = y^2 + \frac{1}{y^2}, \quad p = \pm\frac{\sqrt{y^4 + 1}}{y}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y^4 + 1}}{y}; \quad \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^4 + 1}} = \pm\int dx; \quad \frac{1}{2}\ln(y^2 + \sqrt{y^4 + 1}) = \pm x + c_2.$$

$$c_2 = \ln(\sqrt{2 + \sqrt{5}}).$$

О т в е т: $\ln(y^2 + \sqrt{y^4 + 1}) = \pm 2x + \ln(2 + \sqrt{5})$.

Пример 4.3. *Решить уравнение*

$$2yy'' = y^2 + (y')^2.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение является однородным относительно y и его производных, поэтому порядок уравнения может быть понижен подстановкой $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$. Получим уравнение первого порядка $2y^2(z' + z^2) = y^2(1 + z^2)$, которое эквивалентно системе

$$\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ 2z' = 1 - z^2. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Второе уравнение — это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим

$$\frac{1+z}{1-z} = ce^x, \qquad z = 1 - \frac{2}{1 + ce^x}, \quad \text{то есть } y' = y\Big(1 - \frac{2}{1 + ce^x}\Big).$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\ln y = \ln e^x - \ln(c^2 e^{2x}) + \ln(1 + ce^x) + \ln c^*, \quad \text{то есть } y = c_1(1 \pm \operatorname{ch}(x + c_2)).$$

При разделении переменных могли быть потеряны решения $1 - z^2 = 0$. Проверим, являются ли функции $z = \pm 1$ решениями. Получим уравнения $y' = \pm y$, решения которых имеют вид $y = ce^{\pm x}$. Подставив эти функции в исходное уравнение, получим тождества, следовательно, они являются решениями. Решение $y = 0$ из системы (*) является частным случаем этих решений при $c = 0$.

О т в е т: $y = c_1(1 \pm \operatorname{ch}(x + c_2))$, $y = ce^{\pm x}$.

5 Линейные уравнения высших порядков.

5.1 Общая теория линейных дифференциальных уравнений высших порядков

Линейное неоднородное уравнение с произвольными коэффициентами порядка n имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{5.1}$$

где $a_j(x)(j = 0, \dots, n)$, $f(x)$ — непрерывные на интервале (a, b) функции. Тогда для любого x_0 из интервала (a, b) и любых значений $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Пусть L — линейный оператор, определяемый формулой

$$Ly = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

тогда уравнение (5.1) можно записать в виде

$$Ly = f(x). \tag{5.2}$$

Будем также рассматривать однородное уравнение

$$Ly = 0. \tag{5.3}$$

Свойства линейного оператора L.

1. $L(\alpha y) = \alpha Ly$, при любом $\alpha \in \mathcal{R}$ $(\alpha \in \mathcal{C})$;

2. $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ при любых y_1 и y_2, удовлетворяющих (5.3).

Свойства уравнений (5.2) и (5.3).

1. Уравнения остаются линейными при любой непрерывно дифференцируемой n раз замене независимой переменной $x = \varphi(t)$.

2. Уравнения остаются линейными при линейной замене неизвестной функции $y(x) = a(x)z(x) + b(x)$, где $a(x)$, $z(x)$, $b(x)$ — непрерывно дифференцируемые n раз функции.

Специальная замена вида $y(x) = e^{-\frac{1}{n}\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} z(x)$ сводит дифференциальные уравнения (5.2) и (5.3) к уравнениям, не содержащим $(n-1)$-й производной.

Свойства решений уравнения (5.3).

1. Если $y(x)$ — решение уравнения (5.3), то для любого $\alpha \in \mathcal{R}$ $(\alpha \in \mathcal{C})$ функция $y_1(x) = \alpha y(x)$ также является решением этого уравнения.

2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (5.3), то функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ также является решением этого уравнения.

3. Если $y_1(x), \dots y_n(x)$ — решения уравнения (5.3), то функция $y(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ также является решением этого уравнения.

5.1.1 Понятие о линейной зависимости и линейной независимости функций

Определение 5.1. *Функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = 0$ только в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.*

Определение 5.2. *Функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ называются линейно зависимыми, если существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что линейная комбинация $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = 0$.*

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций.

Функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда одна из этих функций линейно выражается через остальные, то есть существуют такие постоянные $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$, что

$$f_i(x) = \sum_{k=1\ (k \neq i)}^{n} \alpha_k f_k(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ имеют производные до $(n-1)$-го порядка. Тогда определитель

$$W(y_1 \ldots y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского**.

Теорема 5.1. *Если система функций линейно зависима, то их определитель Вронского равен нулю.*

Доказательство. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы. Тогда существуют такие постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Без ограничений общности рассуждений можем считать, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x).$$

Вычислим $y_n'(x), \ldots, y_n^{(n-1)}(x)$ и подставим полученные значения в определитель Вронского вместо последнего столбца. При этом получится определитель, у которого последний столбец есть линейная комбинация предыдущих $(n-1)$ столбцов. А такой определитель равен нулю. ☐

Примечание 5.1. Сформулированное условие линейной зависимости функций является необходимым, но не является достаточным условием. Для доказательства этого факта приведем пример функций, определитель Вронского которых равен нулю, но не являющихся линейно зависимыми.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$$

$$W(y_1, y_2) = W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix}, & x \geq 0, \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, определитель Вронского $W(x) \equiv 0$. Но функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не являются линейно зависимыми. Действительно,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \begin{cases} \infty, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Лемма 5.1. *Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения $Ly = 0$, то определитель Вронского $W(y_1, \ldots, y_n)$ не обращается в нуль ни в одной точке области существования решений уравнения. (Если $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in (a, b)$, то $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ ни при каком $x_0 \in (a, b)$).*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть существует $x_0 \in (a,b)$ такой, что $W(x_0) = 0$, то есть

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим функцию $y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$. По свойству решений уравнения (5.3), если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ есть решения уравнения $Ly = 0$, то и их линейная комбинация также является решением этого уравнения. Следовательно, $y(x)$ — решение уравнения $Ly = 0$. Вычислим производные этой функции до $(n-1)$-го порядка:

$$\begin{aligned} &y'(x) = C_1 y_1'(x) + \ldots + C_n y_n'(x), \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(x) = C_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Вычислим значение функции $y(x)$ и ее производных в точке x_0. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \ldots C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Это линейная однородная система уравнений, главный определитель которой есть определитель Вронского с неизвестными $C_1, \ldots, C_n$. Так как главный определитель системы по предположению равен нулю, то существует ненулевое решение этой системы: $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, $\ldots$ $C_n = C_n^0$.

Подставив эти $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ вместо $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в функцию $y(x)$ и (5.4), получим

$$\begin{aligned} &y(x) = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x), \\ &y'(x) = C_1^0 y_1'(x) + \ldots + C_n^0 y_n'(x), \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(x) = C_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n^0 y_n^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

В точке x_0 из системы (5.5) имеем

$$\begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

В частности, этими данными Коши обладает нулевое решение. А по теореме существования и единственности, которая выполняется в силу предположения леммы, любое решение, имеющее тот же набор данных Коши, должно с ним совпадать. Отсюда имеем $y(x) \equiv 0$. Таким образом, получили, что существуют такие константы $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, не все равные нулю, что

$$C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x) = 0,$$

то есть решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы. □

Теорема 5.2. *Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решения линейного однородного дифференциального уравнения $Ly = 0$. Эти функции являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда определитель Вронского $W(y_1, \ldots, y_n)$ равен нулю.*

Доказательство. 1) Если решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы, то определитель Вронского равен нулю в силу теоремы о равенстве нулю определителя Вронского для любой системы линейно зависимых функций (необязательно решений уравнения).

2) Если определитель Вронского равен нулю, то в силу леммы 5.1 решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы. □

Лемма 5.2 (Формула Лиувилля).

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx},$$

где $a_1(x)$ — коэффициент при $y^{(n-1)}$ в уравнении $Ly = 0$.

Доказательство. Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения $Ly = 0$. Запишем определитель Вронского для этих функций

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Вычислим $W'(x)$:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

В этом выражении все определители, кроме последнего, равны нулю, так как содержат одинаковые строки. Прибавим к последней строке ненулевого определителя линейную комбинацию всех остальных строк:

$$y_i^{(n)}(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-2)}(x) + \ldots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_i(x),$$

где $i = \overline{1, n}$ — номер столбца. Так как $y_i(x)$ — это решения уравнения $Ly = 0$, получаем, что

$$y_i^{(n)}(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-2)}(x) + \ldots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_i(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-1)}(x).$$

Таким образом,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

Следовательно, получено дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

Решим его и найдем $W(x)$.

$$\frac{dW}{W} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx,$$

$$\ln |W| \Big|_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx,$$

$$W(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}.$$

Найдем C:

$$W(x_0) = Ce^0, \qquad C = W(x_0).$$

Таким образом, получаем формулу Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

□

Теорема 5.3. *Если существует такое значение $x_0 \in (a, b)$, что $W(x_0) = 0$, тогда $W(x) = 0$ для любого $x \in (a, b)$.*

Теорема является элементарным следствием доказанной леммы.

5.1.2 Понятие о фундаментальной системе решения

Определение 5.3. *Система n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n называется* ***фундаментальной системой решения****.*

Из доказанных ранее теорем следует, что система n решений данного линейного однородного дифференциального уравнения порядка n является фундаментальной тогда и только тогда, когда ее определитель Вронского не равен нулю.

Любое решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка n есть линейная комбинация его фундаментальных решений.

Утверждение 5.1. *Линейное однородное дифференциальное уравнения порядка n не может иметь более чем n линейно независимых частных решений.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ — частные решения этого уравнения. Рассмотрим первые n решений.

1) Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — линейно зависимые, тогда существуют такие постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, что $\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Добавим к этой сумме слагаемое $0 \cdot y_{n+1}(x)$. Получим $\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) + 0 \cdot y_{n+1}(x) = 0$. Так как не все α_i равны нулю, а линейная комбинация обращается в нуль, следовательно, $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ – линейно зависимы.

2) Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — линейно независимые, тогда $y_1(x), \dots, y_n(x)$ являются фундаментальной системой решений. А так как $y_{n+1}(x)$ — также решение, то его можно представить в виде линейной комбинации

$$y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Следовательно, $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ — линейно зависимые. Тем самым доказали, что любые $(n+1)$ решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n являются линейно зависимыми. □

Построение решения линейного однородного дифференциального уравнения. Для построения требуется найти n линейно независимых частных решений, а затем взять их линейную комбинацию.

5.1.3 Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Пусть $y_1(x)$ — частное решение этого уравнения. Будем понижать порядок уравнения с помощью замены

$$y(x) = y_1(x) \int u(x)dx,$$

где $u(x) = \left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)'$. Вычислим производные новой функции до n-го порядка:

$$y'(x) = y_1'(x)\int u(x)dx + y_1(x)u(x),$$

$$y''(x) = y_1''(x)\int u(x)dx + 2y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x),$$

$$y'''(x) = y_1'''(x)\int u(x)dx + 3y_1''(x)u(x) + 3y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x),$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}(x) = y_1^{(n-1)}(x)\int u(x)dx + (n-1)y_1^{(n-2)}(x)u(x) + \ldots + y_1(x)u^{(n-2)}(x),$$

$$y^{(n)}(x) = y_1^{(n)}(x)\int u(x)dx + ny_1^{(n-1)}(x)u(x) + \ldots + y_1(x)u^{(n-1)}(x).$$

Подставим новую функцию с ее производными в уравнение $Ly = 0$, сгруппируем подобные слагаемые и получим

$$\Big(a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1\Big)\cdot\int u(x)dx + B_1(x)u(x) + B_2(x)u'(x) + \ldots B_n(x)u^{(n-1)}(x) = 0,$$

где $B_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ — новые коэффициенты. Так как $y_1(x)$ — частное решение уравнения $Ly = 0$, то

$$a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1 = 0.$$

Следовательно, получили уравнение $(n-1)$-го порядка относительно функции $u(x)$

$$B_1(x)u(x) + B_2(x)u'(x) + \ldots B_n(x)u^{(n-1)}(x) = 0.$$

Пусть его решения $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ — линейно независимые, тогда решения исходного уравнения имеют вид

$$y_1(x), \quad y_1(x)\int u_1(x)dx, \quad y_1(x)\int u_2(x)dx, \ldots, \quad y_1(x)\int u_{n-1}(x)dx.$$

5.1.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Теорема 5.4. *Если y_1 — частное решение линейного неоднородного уравнения, то общее решение этого уравнения дается формулой*

$$y = y_1 + z,$$

где z — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения.

Доказательство аналогично случаю линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

Теорема 5.5. *Если правую часть уравнения можно представить в виде*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение имеет вид

$$y = y^{(1)} + y^{(2)},$$

где $y^{(1)}$ — частное решение уравнения $Ly = f_1(x)$, а $y^{(2)}$ — частное решение уравнения $Ly = f_2(x)$.

Доказывается непосредственно подстановкой в уравнение $Ly = f(x)$.

Метод нахождения решений линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Для нахождения решений линейного неоднородного дифференциального уравнения $Ly = f(x)$ используется метод вариации произвольных постоянных. Для этого сначала находим решение однородного уравнения $Ly = 0$. Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений этого уравнения, тогда решение общего однородного уравнения можно записать в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

В этом решении заменим произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ на неизвестные функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$, то есть

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x).$$

Функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ определим, подставив $y(x)$ в уравнение $Ly = f(x)$. При этом получим только одно условие, связывающее функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Но так как для определения этих функций нам необходимо n условий, остальные $(n-1)$ условие положим произвольно. Вычислим производные

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + \ldots + C_n(x) y_n'(x) + C_1'(x) y_1(x) + \ldots + C_n'(x) y_n(x).$$

Пусть в этом выражении $C_1'(x) y_1(x) + \ldots + C_n'(x) y_n(x) = 0$, тогда

$$y''(x) = C_1(x) y_1''(x) + \ldots + C_n(x) y_n''(x) + C_1'(x) y_1'(x) + \ldots + C_n'(x) y_n'(x).$$

А в этом выражении пусть $C_1'(x) y_1'(x) + \ldots + C_n'(x) y_n'(x)$. И так далее,

$$y^{(n)}(x) = C_1(x) y_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x) y_n^{(n)}(x) + C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x).$$

Подставим полученные выражения в уравнение $Ly = f(x)$, получим

$$C_1(x) L y_1 + \ldots + C_n(x) L y_n + a_0(x) \left(C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) \right) = f(x).$$

Поскольку $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями уравнения $Ly = 0$, то $Ly_1 = 0, \ldots, Ly_n = 0$, следовательно

$$a_0(x) \left(C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) \right) = f(x).$$

Таким образом, для определения функций $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + \ldots + C_n'(x) y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + \ldots + C_n'(x) y_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Выразив из данной системы $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$, вычислим функции

$$C_1(x) = \int C_1'(x) dx, \ldots, C_n(x) = \int C_n'(x) dx$$

и, подставив их в выражение

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x),$$

получим решение уравнения $Ly = f(x)$.

5.2 Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

5.2.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами порядка n имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad \text{где } a_j = \text{const}, \ (j = 0, \ldots, n). \tag{5.6}$$

Чтобы его решить, необходимо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{5.7}$$

и найти все его корни: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (5.6) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_j e^{\lambda_j x}$ для каждого простого корня λ_j уравнения (5.7) и слагаемых вида

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$$

для каждого кратного корня λ кратности k уравнения (5.7). Здесь все C_j — произвольные постоянные.

Если все коэффициенты a_j уравнения (5.6) вещественные, то слагаемые, отвечающие комплексным корням $\lambda = \alpha \pm i\beta$ уравнения (5.7), можно записать в вещественной форме:

$$C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и

$$P_{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1}, Q_{k-1} — многочлены от x степени $k-1$. Их коэффициенты — произвольные постоянные.

Пример 5.1. *Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' + 5y' = 0$, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 13$.*

Р е ш е н и е. Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Общее решение дифференциального уравнения

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} \cos x + c_3 e^{2x} \sin x.$$

Для того, чтобы воспользоваться начальными условиями, найдем y' и y'':

$$y' = 2c_2 e^{2x} \cos x - c_2 e^{2x} \sin x + 2c_3 e^{2x} \sin x + c_3 e^{2x} \cos x,$$

$$y'' = 3c_2 e^{2x} \cos x - 4c_2 e^{2x} \sin x + 3c_3 e^{2x} \sin x + 4c_3 e^{2x} \cos x.$$

Подставим в общее решение y, в y' и в y'' начальные условия и решим полученную систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5, \\ 2c_2 + c_3 = 7, \\ 3c_2 + 4c_3 = 13. \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 3, \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

Подставив в общее решение полученные значения постоянных, получим частное решение

$$y = 2 + 3e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x.$$

О т в е т: $y = 2 + 3e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x$.

5.2.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad \text{где } a_j = \text{const}, \ (j = 0, \ldots, n). \tag{5.8}$$

Если правая часть $f(x)$ состоит из сумм и произведений функций вида $b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, e^{ax}, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, частное решение можно искать *методом неопределенных коэффициентов.*

Для уравнений с правой частью $f(x) = P_m(x) e^{ax}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, существует частное решение вида

$$y_1 = x^r Q_m(x) e^{ax}, \tag{5.9}$$

где $Q_m(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени m. Число $r = 0$, если a — не корень характеристического уравнения (5.7), а если a — корень, то r равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (5.9) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят $\cos bx$ и $\sin bx$, то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера. Если же коэффициенты a_j левой части уравнения (5.8) вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx) \tag{5.10}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^r e^{ax}(R_l(x) \cos bx + T_l(x) \sin bx), \tag{5.11}$$

где $r = 0$, если $a + ib$ не корень характеристического уравнения, и r равно кратности корня $a + ib$ в противном случае, а R_l и T_l — многочлены степени l, равной наибольшей из степеней m и n многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_l и T_l, надо подставить решение (5.11) в уравнение (5.8) и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида (5.10), то частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + f_2 + \cdots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Пример 5.2. *Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения*

$$y'' - 5y' + 6y = 5xe^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения y есть сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения y_1 и частного решения неоднородного уравнения y_2:

$$y = y_1 + y_2.$$

Найдем y_1. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_2 = x^r (Ax + B) e^{2x}.$$

Здесь $r = 1$, так как $a = \lambda_1 = 2$ — корень характеристического уравнения кратности 1. Для нахождения неизвестных коэффициентов A и B подставим выражение функции y_2 и ее производных в уравнение и, сократив на e^{2x}, сравним коэффициенты при одинаковых степенях x левой и правой частей. Получим

$$\begin{array}{r|l} 6 & y_2 = (Ax^2+Bx)e^{2x} \\ -5 & y_2' = 2(Ax^2+Bx)e^{2x} + (2Ax+B)e^{2x} \\ 1 & y_2'' = 4(Ax^2+Bx)e^{2x} + 4(2Ax+B)e^{2x} + 2Ae^{2x}. \end{array}$$

$$(6A-10A+4A)x^2 + (6B-10B-10A+4B+8A)x + (-5B+4B+2A) = 5x = 0x^2+5x+0,$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & (6A-10A+4A) = 0 \\ x & (6B-10B-10A+4B+8A) = 5 \\ x^0 & (-5B+4B+2A) = 0. \end{array}$$

Откуда находим $A = -\frac{5}{2}$; $B = -5$, т.е. $y = x\left(-\frac{5}{2}x - 5\right)e^{2x}$.

О т в е т: Общее решение неоднородного уравнения $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + x\left(-\frac{5}{2}x-5\right)e^{2x}$.

Пример 5.3. *Решить уравнение*

$$y'' + y = 4\sin x.$$

Р е ш е н и е. Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2+1=0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_1 = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения с правой частью

$$f(x) = 4\sin x = e^{0x}(0\cdot\cos x + 4\cdot\sin x).$$

Имеем $a=0$, $b=1$, тогда $r=1$, так как $a\pm bi = 0\pm i$ — корни характеристического уравнения кратности 1; $n=0$, $m=0$, тогда $l=0$, $R_l(x)=A$, $T_l(x)=B$.

Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_2 = e^{0x}\cdot x^1\cdot(A\cos x + B\sin x) = Ax\cos x + Bx\sin x.$$

Для нахождения коэффициентов A и B, подставим y_2 и его производные в исходное уравнение:

$$\begin{array}{r|l} 1 & y_2 = Ax\cos x + Bx\sin x, \\ 0 & y_2' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x, \\ 1 & y_2'' = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x. \end{array}$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{array}{r|l} \sin x & Bx - 2A - Bx = 4, \\ \cos x & Ax - Ax + 2B = 0, \end{array}$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнений системы, находим $A=-2$, $B=0$, и, подставляя в формулу для $y_2(x)$, получим $y_2(x) = -2x\cos x$, откуда

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x.$$

О т в е т: Общее решение уравнения: $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x$.

5.2.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью произвольного вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (5.8) с непрерывной правой частью $f(x)$ произвольного вида решается *методом вариации произвольных постоянных.* Пусть найдено общее решение

$$y = C_1 y_1 + \dots C_n y_n$$

соответствующего линейного однородного уравнения. Тогда решение уравнения (5.8) ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n.$$

Функции $C_k(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0}, \end{cases}$$

где a_0 — коэффициент при старшей производной в уравнении (5.8).

Пример 5.4. *Решить дифференциальное уравнение*

$$y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + y'' = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению, есть

$$y_1 = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x.$$

Ищем общее решение исходного уравнения в виде:

$$y = C_1(x) + C_2(x) x + (C_3(x) + C_4(x) x) e^x. \qquad (5.12)$$

Для нахождения неизвестных функций C_k запишем систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) x + (C_3'(x) + C_4'(x) x) e^x &= 0, \\ C_2'(x) + (C_3'(x) + C_4'(x)(x+1)) e^x &= 0, \\ (C_3'(x) + C_4'(x)(x+2)) e^x &= 0, \\ (C_3'(x) + C_4'(x)(x+3)) e^x &= \dfrac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$C_4'(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5} e^{-x}, \quad C_3'(x) = -\frac{2x^3 + 16x^2 + 48x + 48}{x^5} e^{-x},$$

$$C_2'(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}, \quad C_1'(x) = \frac{-2x^3 - 8x^2 + 48}{x^5}.$$

Интегрируя эти выражения, получим:

$$C_1(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^4} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C_2,$$

$$C_3(x) = \left(\frac{12}{x^4} + \frac{12}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right) e^{-x} + C_3, \quad C_4(x) = \left(-\frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-x} + C_4.$$

Подставляя эти выражения в (5.12), получим общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + 1/x.$$

О т в е т: $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + 1/x$.

Список литературы

[1] В.И.Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[2] И.В. Асташова, В.А. Никишкин. Практикум по курсу "Дифференциальные уравнения". М.: МЭСИ, 2010.

[3] А.И.Буфетов, Н.Б.Гончарук, Ю.С.Ильяшенко. Конспект курса ЭОбыкновенные дифференциальные уравнения. Часть I. М., Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2012.

[4] Н.М. Матвеев. "Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений". Л.: Издательство ЛГУ, 1963.

[5] И.Г. Петровский. "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений". М.: Издательство МГУ, 1984.

[6] Л.С. Понтрягин. "Обыкновенные дифференциальные уравнения". М.: "Наука", 1974.

[7] А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. "Дифференциальные уравнения: примеры и задачи". Учеб. пособие. М.: "Высшая школа", 1989.

[8] В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений (8-е изд.). М.: ГИФМЛ, 1959.

[9] А.Ф. Филиппов. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям". Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.

[10] А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. УРСС, 2004.

[11] Л.Е. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения М.:Изд-во ЛКИ, 2008.