Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям

третий поток II курса, весенний семестр 2019/20

И. А. Богаевский

Краткое содержание лекций 1–4

1. Ряды в конечномерном линейном пространстве. Экспонента оператора. Свойства: экспонента скалярной матрицы, экспонента блочной матрицы, экспонента сопряжённой матрицы CAC^{-1}, экспонента суммы коммутирующих матриц, производная $\exp tA$.

   Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Выражение непродолжаемого решения задачи Коши через экспоненту. Существование фазового потока. Пространство решений, его размерность. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица. Выражение фазового потока через фундаментальную матрицу.

   Вычисление $\exp tA$ в жордановом базисе. Экспонента нильпотентной жордановой клетки. Задача: пусть ξ — корневой вектор высоты k с собственным числом λ, т. е. $P^k\xi = 0$ и $P^{k-1}\xi \neq 0$, где $P = A - \lambda E$; тогда

$$g^t\xi = e^{\lambda t}\left(\xi + tP\xi + \frac{t^2}{2!}P^2\xi \ldots + \frac{t^{k-1}}{k!}P^{k-1}\xi\right).$$

   В частности, если ξ — собственный вектор, т. е. $P\xi = 0$, то $g^t\xi = e^{\lambda t}\xi$.

2. Комплексификация и овеществление. Формулы

   - $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$;
   - $\exp {}^{\mathbb{C}}A = {}^{\mathbb{C}}\exp A$, $\operatorname{tr} {}^{\mathbb{C}}A = \operatorname{tr} A$, $\det {}^{\mathbb{C}}A = \det A$;
   - $\exp {}^{\mathbb{R}}A = {}^{\mathbb{R}}\exp A$, $\operatorname{tr} {}^{\mathbb{R}}A = 2\operatorname{Re}\operatorname{tr} A$, $\det {}^{\mathbb{R}}A = |\det A|^2$.

   Пусть $\xi - i\eta$, где $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, — собственный вектор с собственным числом $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда

$$g^t\xi = e^{\alpha t}(\xi\cos\beta t + \eta\sin\beta t), \quad g^t\eta = e^{\alpha t}(-\xi\sin\beta t + \eta\cos\beta t).$$

   Конструкция доказательства: $\langle\xi, \eta\rangle_{\mathbb{R}}$ — плоскость, инвариантная относительно оператора A, ограничение которого на эту плоскость является комплексификацией умножения на $\alpha + i\beta$.

   Классификация невырожденных систем на плоскости (узел, вырожденный узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

3. Системы линейных уравнений с переменными непрерывными коэффициентами. Теорема о продолжении решений на весь интервал определения коэффициентов без доказательства. Пространство решений, его изоморфизм B_{t_0} с фазовым пространством. Фундаментальная система решений, фундаментальная матрица.

   Определитель Вронского системы вектор-функций. Формула Лиувилля–Остроградского для решений системы линейных уравнений с доказательством. Линейное преобразование $g_{t_0}^t = B_t B_{t_0}^{-1}$ фазового пространства за время от t_0 до t.

   Линейное уравнение порядка n с переменными непрерывными коэффициентами. Сведéние к системе. Определитель Вронского системы функций. Формула Лиувилля–Остроградского для решений линейного уравнения.

4. Понятие устойчивости решения. Определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости, неустойчивости. Возможны три варианта: решение устойчиво асимптотически; устойчиво, но не асимптотически; неустойчиво. У линейной системы (с переменными коэффициентами) либо все решения асимптотически устойчивы; либо все устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически; либо все решения неустойчивы.

   Невырожденные линейные системы с постоянными коэффициентами на плоскости: устойчивые фокусы и узлы (обычные, вырожденные и дикритические) устойчивы асимптотически; центр устойчив по Ляпунову, но не асимптотически; сёдла, неустойчивые фокусы и узлы неустойчивы.

   Различные формулировки критерия устойчивости линейной системы по Ляпунову: а) все решения ограничены на $[t_0, +\infty)$; б) любая фундаментальная система состоит из ограниченных на $[t_0, +\infty)$ решений; в) любая фундаментальная матрица ограничена на $[t_0, +\infty)$ по (стандартной евклидовой) норме; г) существует фундаментальная система, состоящая из ограниченных на $[t_0, +\infty)$ решений; д) существует фундаментальная матрица, ограниченная на $[t_0, +\infty)$ по (стандартной евклидовой) норме.

   Различные формулировки критерия асимптотической устойчивости линейной системы: а) все решения стремятся к нулю при $t \to +\infty$; б) любая фундаментальная система состоит из решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$; в) любая фундаментальная матрица стремится к нулю при $t \to +\infty$ по (стандартной евклидовой) норме; г) некоторая фундаментальная система состоит из решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$; д) некоторая фундаментальная матрица стремится к нулю при $t \to +\infty$ по (стандартной евклидовой) норме.

   Доказательство критерия устойчивости линейной системы по Ляпунову. Доказательство критерия асимптотической устойчивости линейной системы провести самостоятельно. Следствие: устойчивость линейной системы не зависит от начального значения t_0. (Для произвольной системы она тоже не зависит от t_0, но это мы пока не обсуждаем.)

   Оператор монодромии линейной системы с периодическими коэффициентами. Мультипликаторы и их независимость от начального значения t_0. Хорошие и неплохие мультипликаторы — эта терминология не общеупотребительная!

   Теоремы об устойчивости линейной системы с периодическими коэффициентами:

- система устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда все её мультипликаторы — неплохие;
- система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все её мультипликаторы — хорошие.

Пример: мультипликаторы невырожденных линейных систем с постоянными коэффициентами на плоскости (считаем, что период $T = 1$).

Лекция 5

1. Доказательство критерия устойчивости периодической системы

Теорема 1. *Линейная система с периодическими коэффициентами устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда все её мультипликаторы — неплохие. Линейная система с периодическими коэффициентами асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все её мультипликаторы — хорошие.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится леммы 1 и 2. (Лемма 1 использовалась в лекции 4.)

Лемма 1. *Для линейной системы с T-периодическими коэффициентами $g_{t_1+T}^{t_2+T} = g_{t_1}^{t_2}$.*

Доказательство. Пусть $g_{t_1}^{t_2} : \mathrm{x}_1 \mapsto \mathrm{x}_2$. Это значит, что существует решение φ такое, что $\varphi(t_1) = \mathrm{x}_1$, $\varphi(t_2) = \mathrm{x}_2$. Наша система инвариантна относительно сдвига $t \mapsto t + T$. Значит, $\psi(t) = \varphi(t - T)$ — тоже решение и $g_{t_1+T}^{t_2+T} : \psi(t_1 + T) \mapsto \psi(t_2 + T)$. Но $\psi(t_1 + T) = \varphi(t_1) = \mathrm{x}_1$ и $\psi(t_2 + T) = \varphi(t_2) = \mathrm{x}_2$. Итак, $g_{t_1+T}^{t_2+T} : \mathrm{x}_1 \mapsto \mathrm{x}_2$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $M = g_0^T$ — оператор монодромии линейной системы с T-периодическими коэффициентами, $T > 0$. Тогда*

- *последовательность $\|M^m\|$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, ограничена тогда и только тогда, когда все мультипликаторы — неплохие;*
- *последовательность $\|M^m\|$ стремится к нулю при $m \to +\infty$ тогда и только тогда, когда все мультипликаторы — хорошие.*

Доказательство. Пусть $M = J$, где J — жорданова клетка J размера k с собственным числом μ, т. е. $J = \mu E + N$, где N — нильпотентная матрица с единицами над главной диагональю и нулями на остальных местах, $N^k = 0$ и $N^{k-1} \neq 0$. (Полагаем, что $N^0 = E$.) Тогда

$$J^m = \sum_{\ell=0}^{k-1} C_m^\ell \mu^{m-\ell} N^\ell.$$

Элементы этой матрицы имеют вид $\mu^{m-\ell} C_m^\ell$, $\ell = 0, 1, \ldots, k-1$. Поэтому:

- если $|\mu| < 1$, то все элементы матрицы J^m стремятся к нулю при $m \to +\infty$;
- если $|\mu| = 1$ и $k = 1$, то единственный элемент матрицы J^m ограничен, но не стремится к нулю при $m \to +\infty$;

- если $|\mu| = 1$ и $k \geqslant 2$, то все элементы матрицы J^m, лежащие над главной диагональю, не ограничены при $m \to +\infty$;
- если $|\mu| > 1$, то все элементы матрицы J^m, лежащие на главной диагонали и выше, не ограничены при $m \to +\infty$.

Пусть $M = J$, где J — любая жорданова матрица. Тогда из предыдущего следует, что все элементы матрицы J^m

- ограничены при $m \to +\infty$, если и только если все мультипликаторы — неплохие;
- стремятся к нулю при $m \to +\infty$, если и только если все мультипликаторы — хорошие.

Из курса алгебры известно, что любую матрицу можно привести к жордановой форме над полем комплексных чисел: $M = CJC^{-1}$. Тогда $M^m = CJ^mC^{-1}$ и $J^m = C^{-1}M^mC$. Поэтому все элементы матрицы M^m

- ограничены при $m \to +\infty$, если и только если все мультипликаторы — неплохие;
- стремятся к нулю при $m \to +\infty$, если и только если все мультипликаторы — хорошие;

так как элементы каждой из матриц M^m и J^m — линейные комбинации элементов другой. Но из задачи 18 списка теоретических вопросов следуют утверждения:

- последовательность $\|M^m\|$ ограничена при $m \to +\infty$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы M^m ограничены;
- последовательность $\|M^m\|$ стремится к нулю при $m \to +\infty$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы M^m стремятся к нулю.

Объединяя эти утверждения с предыдущими, получаем утверждения леммы. □

Докажем теорему 1. Рассмотрим оператор g_0^t, где $t \geqslant 0$. Пусть $t = mT + \tau$, где $\tau \in [0, T)$. Тогда
$$g_0^t = g_{mT}^{mT+\tau} \circ g_{(m-1)T}^{mT} \circ \ldots \circ g_T^{2T} \circ g_0^T = g_0^\tau \circ \left(g_0^T\right)^m = g_0^\tau \circ M^m,$$
поскольку $g_{t_1+T}^{t_2+T} = g_{t_1}^{t_2}$ согласно лемме 1. Значит, $\|g_0^t\| \leqslant \|g_0^\tau\| \cdot \|M^m\|$. Но непрерывная функция $\|g_0^\tau\|$ ограничена, поскольку $\tau \in [0, T]$. Поэтому $\|g_0^t\| \leqslant C\|M^m\|$ и из ограниченности (стремления к нулю) последовательности $\|M^m\|$ следует ограниченность (стремление к нулю) функции $\|g_0^t\|$.

Верно и обратное: ограниченность (стремление к нулю) последовательности $\|M^m\|$ следует из ограниченности (стремления к нулю) функции $\|g_0^t\|$, поскольку $\|M^m\| = \|g_0^{mT}\|$.

Применяя теперь лемму 2 и общий критерий устойчивости системы с переменными коэффициентами, получаем утверждения теоремы 1.

2. Качели

Эта часть основана на § 28 учебника В. И. Арнольда.

Рассмотрим уравнение осциллятора $\ddot{x} + \omega^2\big(1 + \varepsilon a(t)\big)\, x = 0$ где $\omega = \mathrm{const} > 0$ и a — фиксированная периодическая функция с *минимальным* периодом $T = 2\pi$, например, $a(t) = \cos t$.

Сведём это уравнение к системе:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -\omega^2\big(1+\varepsilon a(t)\big)\,x \end{array} \right. . \tag{1}$$

При каких значениях ω и ε эта система устойчива, а при каких нет?

Данная система — это идеализированная модель качелей. Человек, сидящий или стоящий на качелях пытается на них раскачаться, совершая периодические движения и тем самым изменяя плечо, а с ним и частоту малых колебаний математического маятника. Успешное раскачивание состоит в том, что при малых начальных условиях получаются колебания с большой амплитудой. Другими словами, успех раскачивания означает, что наша система — неустойчива. Разумеется, данная модель сильно идеализирована: человек на качелях ближе к физическому, а не к математическому маятнику, совершают они отнюдь не малые колебания, кроме того в качелях есть трение, которое мы не учитываем.

Наша система зависит от двух параметров — частоты ω собственных колебаний качелей с неподвижным человеком и амплитуды ε периодических движений человека на них. Значения этих параметров, при которых наша система неустойчива, образуют на плоскости (ω,ε) область неустойчивости. Попадание конкретных значений параметров в эту область называется *параметрическим резонансом.*

Уравнение границы области неустойчивости можно выразить в терминах оператора монодромии $M = g_0^{2\pi}$ системы (1).

Лемма 3. $\det M = 1$.

Доказательство. Рассмотрим определитель Вронского $W(t) = \det g_0^t$. По формуле Лиувилля–Остроградского $W(t) = \mathrm{const}$, поскольку $\operatorname{tr} A = 0$. Но $W(0) = \det g_0^0 = 1$, поэтому $W(t) = 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. В частности, $\det M = W(2\pi) = 1$. □

Теорема 2. *Если $|\operatorname{tr} M| > 2$, то система (1) неустойчива; если $|\operatorname{tr} M| < 2$, то система (1) устойчива по Ляпунову, но не асимптотически.*

Доказательство. Согласно лемме 3 мультипликаторы системы удовлетворяют квадратному уравнению

$$\mu^2 - \mu \operatorname{tr} M + 1 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $(\operatorname{tr} M)^2 - 4$.

При $|\operatorname{tr} M| > 2$ его корни μ_1, μ_2 вещественны и различны. Значит, один из них по модулю больше 1, поскольку $\mu_1\mu_2 = 1$. Следовательно, система неустойчива.

При $|\operatorname{tr} M| < 2$ корни $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ комплексно сопряжены и различны. Значит, оба они по модулю равны 1, поскольку $\mu_1\mu_2 = (\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta) = \alpha^2+\beta^2 = 1$, а оператор монодромии приводится к диагональному виду. Следовательно, система устойчива по Ляпунову, но не асимптотически. □

Замечание. Если $|\operatorname{tr} M| = 2$, то возможен любой из двух вариантов! В самом деле, тогда $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ и всё зависит от того, является ли оператор монодромии скалярным (устойчивость по Ляпунову) или нет (неустойчивость).

Итак, уравнение линии $\operatorname{tr} M = 2$ делит плоскость параметров на область неустойчивости $\operatorname{tr} M > 2$ и область устойчивости $\operatorname{tr} M < 2$. Конечно, вычислить $\operatorname{tr} M$ — нетривиальная задача. Но он просто вычисляется при $\varepsilon = 0$ — в этом случае $\operatorname{tr} M = 2\cos 2\pi\omega$. (См. задачу 26 списка теоретических вопросов.)

Следствие. *Если $\omega \neq k/2$, где $k \in \mathbb{Z}$, то при достаточно малых ε система устойчива по Ляпунову.*

Доказательство. Если $\omega \neq k/2$ и $\varepsilon = 0$, то $|\operatorname{tr} M| = |2\cos 2\pi\omega| < 2$. Значит и при достаточно малых ε $|\operatorname{tr} M| < 2$. Применяя теорему 2, получаем требуемое. $\square$

Неформально говоря, если ω не близко к $k/2$, то малыми усилиями раскачать качели нельзя.

Замечание. В нашей модели частота ν движений человека была принята равной 1. В общем случае нужно рассмотреть уравнение

$$\ddot{x} + \Omega^2\bigl(1 + \varepsilon a(\nu t)\bigr)\, x = 0,$$

где Ω — частота собственных колебаний качелей с неподвижным человеком, а a — по-прежнему периодическая функция с минимальным периодом $T = 2\pi$. Переходя к новой независимой переменной $\tau = \nu t$, получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\Omega^2}{\nu^2}\bigl(1 + \varepsilon a(t)\bigr)\, x = 0,$$

которое совпадает с рассмотренным, если положить $\omega = \Omega/\nu$. Таким образом, раскачать качели малыми усилиями можно только, если Ω/ν близко к $k/2$, — результат, всем известный из эксперимента.

Лекция 6

Теория Штурма

Эта часть курса изложена в пункте 7 § 27 учебника В. И. Арнольда. Точнее, в его части от начала до абзаца «Исследование собственных колебаний сплошных сред (закреплённой струны)...».

Лекция 7

1. Линейные неоднородные системы

Линейная неоднородная система — это система линейных неоднородных уравнений:

$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x} + \mathrm{b}(t), \quad A : I \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \quad \mathrm{b} : I \to \mathbb{R}^n, \quad A, \mathrm{b} \in C^0(I),$$

где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал (конечный или бесконечный).

Вариация постоянных. Если известно общее решение однородной системы $\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x}$, то общее решение неоднородной системы $\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x} + \mathrm{b}(t)$ находится методом вариации постоянных, который заключается в замене неизвестными функциями постоянных, входящих в общее решение однородной системы.

Будем искать решение в виде $\mathrm{x} = \Phi(t)\mathrm{C}(t)$, где Φ — фундаментальная матрица однородной системы: $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, а $\mathrm{C} : I \to \mathbb{R}^n$ — неизвестная дифференцируемая вектор-функция. Подставляя в неоднородную систему, получим равносильное уравнение:

$$\dot{\Phi}(t)\mathrm{C}(t) + \Phi(t)\dot{\mathrm{C}}(t) = A(t)\Phi(t)\mathrm{C}(t) + \mathrm{b}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathrm{C}}(t) = \Phi^{-1}(t)\mathrm{b}(t),$$

из которого неизвестная вектор-функция C находится интегрированием.

Устойчивость. Устойчивость (по Ляпунову) любого решения неоднородной системы эквивалентна устойчивости (по Ляпунову) нулевого решения однородной системы с той же матрицей. Как и ранее, интервал определения коэффициентов предполагается бесконечным справа и $t_0 \in I$.

В самом деле, пусть некоторое выделенное решение φ неоднородной системы устойчиво по Ляпунову. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \ \Rightarrow\ \|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0$, где ψ — произвольное решение неоднородной системы. Пусть $\psi = \varphi + \theta$, где θ — любое решение однородной системы. Получим $\|\theta(t_0)\| < \delta \ \Rightarrow\ \|\theta(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0$. Поэтому нулевое решение однородной системы устойчиво.

Наоборот, пусть нулевое решение однородной системы устойчиво по Ляпунову. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|\theta(t_0)\| < \delta \ \Rightarrow\ \|\theta(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0$, где θ — произвольное решение неоднородной системы. Пусть $\theta = \psi - \varphi$, где ψ — любое решение неоднородной системы. Получим $\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \ \Rightarrow\ \|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0$. Поэтому выделенное решение φ неоднородной системы устойчиво.

Аналогичное утверждение для асимптотической устойчивости также верно — см. теоретический вопрос 27 из списка ниже.

Оператор монодромии. Рассмотрим неоднородную систему с периодическими коэффициентами: $I = \mathbb{R}$ и для некоторого $T > 0$: $A(t+T) = A(t)$, $\mathrm{b}(t+T) = \mathrm{b}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и определим для неё оператор монодромии $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по формуле $M(\mathrm{x}_0) = \psi(T)$, где $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ — единственное непродолжаемое решение с начальным условием $\psi(0) = \mathrm{x}_0$.

Для исследования устойчивости неоднородной системы этот оператор не нужен ввиду предыдущего пункта. Зато он полезен в вопросе существования у системы T-периодических решений. А именно, непродолжаемое решение $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ T-периодично тогда и только тогда, когда его начальное условие $\mathrm{x}_0 = \psi(0)$ — неподвижная точка оператора монодромии, т. е. $M(\mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_0$.

В одну сторону это утверждение очевидно, докажем в другую. В самом деле, пусть $M(\mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_0$. Рассмотрим решение ψ с начальным условием $\psi(0) = \mathrm{x}_0$. Поскольку система инвариантна относительно сдвигов на $\pm T$, функция $\tilde{\psi}(t) = \psi(t+T)$ — тоже решение. Из равенства $M(\mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_0$ получаем, что $\psi(T) = \psi(0)$, откуда следует, что $\tilde{\psi}(0) = \psi(T) = \psi(0)$. Значит, решения $\tilde{\psi}$ и ψ совпадают по теореме единственности и поэтому $\psi(t+T) = \psi(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. ψ — T-периодическое решение.

Для оператора монодромии линейной неоднородной системы справедлива формула: $M(\mathrm{x}_0) = M^0(\mathrm{x}_0) + \varphi(T)$, где M^0 — оператор монодромии линейной однородной системы с той же матрицей, а φ — решение исходной неоднородной системы с начальным условием $\varphi(0) = 0$. В самом деле, пусть $\psi = \varphi + \theta$, где θ — решение однородной системы с начальным условием $\theta(0) = \mathrm{x}_0$. Тогда $\psi(0) = \varphi(0) + \theta(0) = \mathrm{x}_0$ и $M(\mathrm{x}_0) = \psi(T) = \varphi(T) + \theta(T) = \varphi(T) + M^0(\mathrm{x}_0)$.

Из формулы $M(\mathrm{x}_0) = M^0(\mathrm{x}_0) + \varphi(T)$ для оператора монодромии неоднородной системы с T-периодическими коэффициентами следует критерий наличия у неё единственного T-периодического решения, доказать который предложено в задаче 30.

2. Зависимость решений от параметра

Пусть $\mathrm{x} = \chi(t, \varepsilon)$ — непродолжаемое решение задачи Коши, правые части которой зависят от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} & = & \mathrm{v}(t, \mathrm{x}, \varepsilon) \\ \chi(t_0, \varepsilon) & = & \mathrm{x}_0(\varepsilon) \end{cases}. \tag{2}$$

Здесь $(t, \mathrm{x}) \in U$, $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ — область в расширенном фазовом пространстве, $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^k$ — область изменения параметра, $\mathrm{v} : U \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n$ — зависящая от параметра правая часть системы дифференциальных уравнений, $t_0 \in \mathbb{R}$ — фиксированный начальный момент времени, $\mathrm{x}_0 : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n$ — зависимость начального условия от параметра, причём подразумевается, что $\big(t_0, \mathrm{x}_0(\varepsilon)\big) \in U$ при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Замечание. Параметром может являться само начальное условие. В этом случае v не зависит от ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{x}_0(\varepsilon) = \varepsilon$.

Решение $\chi(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ нашей задачи Коши — вектор-функция с некоторым множеством определения $D(\chi)$. Пусть вектор-функция v непрерывна в $U \times \mathcal{E}$ и удовлетворяет условию Липшица по зависимым переменным x. Тогда из теоремы существования и единственности следует, что $(t, \varepsilon) \in D(\chi)$, если $t \in I_\varepsilon$, где I_ε — интервал, содержащий начальный момент времени и зависящий от параметра ε.

Теорема 3. *Пусть вектор-функция* v *непрерывна в* $U \times \mathcal{E}$ *и удовлетворяет условию Липшица по зависимым переменным* x, *а вектор-функция* x_0 *— непрерывна в* $\mathcal{E}$. *Тогда множество определения* $D(\chi)$ *открыто и вектор-функция* χ *непрерывна в* $D(\chi)$.

Эту теорема доказана в конце курса в ослабленной формулировке с требованием условия Липшица по параметру — см. теорему 19.

Теорема 4. *Пусть вектор-функция* v *и все её производные по зависимым переменным* x *до порядка* $r \geqslant 1$ *включительно непрерывны в* $U \times \mathcal{E}$, *а вектор-функция* x_0 *и все её производные по параметру* ε *до порядка* $r \geqslant 1$ *включительно непрерывны в* $\mathcal{E}$. *Тогда вектор-функция* χ *и все её производные по параметру* ε *до порядка* $r \geqslant 1$ *включительно непрерывны в* $D(\chi)$.

Эту теорему доказывать в курсе не планируется.

3. Уравнение в вариациях

Уравнение в вариациях по параметру. Пусть $k = 1$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Выделим какое-нибудь значение параметра $\varepsilon_* \in \mathbb{R}$ и рассмотрим соответствующее ему решение исходной задачи Коши (2):

$$\varphi(t) = \chi(t, \varepsilon_*),$$

матрицу, состоящую из частных производных компонент правой части исходной системы по зависимым переменным вдоль решения φ:

$$A(t) = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\big(t, \varphi(t), \varepsilon_*\big) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\ell}\big(t, \varphi(t), \varepsilon_*\big)\right),$$

где $k = 1, \ldots, n$ — номер строки, $\ell = 1, \ldots, n$ — номер столбца, $\mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, а также столбец, состоящий из частных производных компонент правой части исходной системы по параметру вдоль решения φ:

$$\mathrm{b}(t) = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \varepsilon}\bigl(t, \varphi(t), \varepsilon_*\bigr) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial \varepsilon}\bigl(t, \varphi(t), \varepsilon_*\bigr)\right).$$

Определение. Система линейных неоднородных уравнений

$$\dot{\mathrm{w}} = A(t)\,\mathrm{w} + \mathrm{b}(t), \qquad \mathrm{w} = (w_1, \ldots, w_n) \tag{3}$$

называется *системой уравнений (или просто уравнением) в вариациях по параметру вдоль решения* φ.

Рассмотрим теперь производные решения и начального условия по параметру при его выделенном значении:

$$\psi(t) = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon_*), \qquad \mathrm{w}_0 = \mathrm{x}_0'(\varepsilon_*).$$

Теорема 5. *Вектор-функция* $\mathrm{w} = \psi(t)$ *удовлетворяет системе уравнений (3) в вариациях по параметру вдоль решения* φ *и начальному условию* $\psi(t_0) = \mathrm{w}_0$.

Доказательство. По условию вектор-функция χ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t}(t, \varepsilon) = v_k\bigl(t, \chi(t, \varepsilon), \varepsilon\bigr) \quad \forall\, \varepsilon \in \mathcal{E}.$$

Согласно теореме 4 это уравнение можно продифференцировать по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \chi_k}{\partial t}(t, \varepsilon) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\bigl(t, \chi(t, \varepsilon), \varepsilon\bigr)\frac{\partial \chi_\ell}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \frac{\partial v_k}{\partial \varepsilon}\bigl(t, \chi(t, \varepsilon), \varepsilon\bigr),$$

а затем слева изменить порядок дифференцирования и подставить $\varepsilon = \varepsilon_*$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \chi_k}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon_*) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\bigl(t, \chi(t, \varepsilon_*), \varepsilon_*\bigr)\frac{\partial \chi_\ell}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon_*) + \frac{\partial v_k}{\partial \varepsilon}\bigl(t, \chi(t, \varepsilon_*), \varepsilon_*\bigr).$$

Используя введённые обозначения, получаем:

$$\psi_k'(t) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\bigl(t, \varphi(t), \varepsilon_*\bigr)\psi_\ell(t) + \frac{\partial v_k}{\partial \varepsilon}\bigl(t, \varphi(t), \varepsilon_*\bigr).$$

Это и есть подробно расписанное уравнение в вариациях.

Кроме того, вектор-функция χ удовлетворяет начальному условию:

$$\chi(t_0, \varepsilon) = \mathrm{x}_0(\varepsilon).$$

После дифференцирования по параметру получаем и подстановки его выделенного значения получаем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon}(t_0, \varepsilon) = \mathrm{x}_0'(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon}(t_0, \varepsilon_*) = \mathrm{x}_0'(\varepsilon_*).$$

Т. е. в ведённых обозначениях: $\psi(t_0) = \mathrm{w}_0$. $\square$

Уравнение в вариациях по начальному условию. В частном случае, когда правая часть v не зависит от параметра и начальное условие линейно зависит от параметра:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mathrm{x}} & = & \mathrm{v}(t,\mathrm{x}) \\ \chi(t_0,\varepsilon) & = & \mathrm{x}_* + \mathrm{w}_0\varepsilon \end{array}\right., \tag{4}$$

выделим нулевое значение параметра $\varepsilon_* = 0$ и рассмотрим соответствующее ему решение исходной задачи Коши:

$$\varphi(t) = \chi(t,0),$$

матрицу, состоящую из частных производных компонент правой части исходной системы по зависимым переменным вдоль решения φ:

$$A(t) = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\big(t,\varphi(t)\big) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\ell}\big(t,\varphi(t)\big)\right),$$

где $k = 1,\dots,n$ — номер строки, $\ell = 1,\dots,n$ — номер столбца, $\mathrm{v} = (v_1,\dots,v_n)$, $\mathrm{x} = (x_1,\dots,x_n)$.

Определение. Система линейных однородных уравнений

$$\dot{\mathrm{w}} = A(t)\,\mathrm{w}, \quad \mathrm{w} = (w_1,\dots,w_n) \tag{5}$$

называется *системой уравнений (или просто уравнением) в вариациях по начальному условию вдоль решения* φ.

Рассмотрим теперь производную решения по ε при $\varepsilon = 0$:

$$\psi(t) = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon}(t,0).$$

Теорема 6. *Вектор-функция* $\mathrm{w} = \psi(t)$ *удовлетворяет системе уравнений (5) в вариациях по начальному условию вдоль решения* φ, *причём* $\psi(t_0) = \mathrm{w}_0$.

Доказательство. Это непосредственное следствие теоремы 5. □

Лекция 8

Устойчивость положений равновесия[1]

Пусть автономная система $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{v}(\mathrm{x})$ имеет положение равновесия x_*, т. е. $\mathrm{v}(\mathrm{x}_*) = 0$. Другими словами, x_* — особая точка векторного поля v.

Особая точка x_* называется устойчивой, если стационарное решение $\mathrm{x} \equiv \mathrm{x}_*$ — устойчиво. Грубо говоря, особая точка устойчива, если решение с близким к ней начальным условием остаётся все время в малой окрестности этой точки.

Определение. Особая точка x_* векторного поля v называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что всякое непродолжаемое решение

[1] Этот параграф основан на конспектах лекций В. М. Закалюкина:
http://tds.math.msu.su/wiki/index.php/2009:%D0%9E%D0%94%D0%A3

$\mathrm{x} = \psi(t)$ автономной системы $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{v}(\mathrm{x})$ с начальным условием из δ-окрестности особой точки определено при всех $t \geqslant 0$ и остаётся в её ε-окрестности:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|\psi(0) - \mathrm{x}_*\| < \delta \ \Rightarrow \ \|\psi(t) - \mathrm{x}_*\| < \varepsilon \ \forall t \geqslant 0.$$

Особая точка называется *асимптотически устойчивой*, если она устойчива по Ляпунову и любое решение с начальным условием из её некоторой окрестности к ней и стремится:

$$\exists \delta > 0 : \|\psi(0) - \mathrm{x}_*\| < \delta \ \Rightarrow \ \lim_{t \to +\infty} \psi(t) = 0.$$

Определение. Особая точка x_* векторного поля v называется *неустойчивой*, если найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует непродолжаемое решение $\mathrm{x} = \varphi(t)$ автономной системы $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{v}(\mathrm{x})$ с начальным условием из δ-окрестности особой точки, выходящие при некотором $t \geqslant 0$ из её ε-окрестности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists \varphi : \|\varphi(0) - \mathrm{x}_*\| < \delta, \ \exists t \geqslant 0 : \ \|\varphi(t) - \mathrm{x}_*\| \geqslant \varepsilon.$$

Определение. Непрерывно дифференцируемая функция $W : U \to \mathbb{R}$, определённая в окрестности особой точки $\mathrm{x}_* \in U$ векторного поля v, называется *функцией Ляпунова*, если $W(\mathrm{x}) > 0$ при $\mathrm{x} \neq \mathrm{x}_*$, $W(\mathrm{x}_*) = 0$ и производная Ли функции W вдоль векторного поля не положительна: $L_{\mathrm{v}} W \leqslant 0$.

Теорема 7. (Теорема Ляпунова об устойчивости.) *1. Если в некоторой окрестности особой точки непрерывного векторного поля существует функция Ляпунова, то эта точка устойчива по Ляпунову.*

2. Если производная Ли этой функции Ляпунова отрицательна в проколотой окрестности особой точки, то эта точка асимптотически устойчива.

Доказательство. 1. Пусть x_* — особая точка и B_ε — замкнутый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в x_*, целиком лежащий в U, а $m > 0$ — минимальное значение функции W на его границе — сфере S_ε. (Это число существует и положительно, поскольку S_ε — компакт.) В силу непрерывности W существует такой шар B_δ с радиусом $\delta > 0$ и центром в x_* такой, что все значения W в точках B_δ не превосходят $m/2$. Этот шар лежит внутри сферы S_ε. Рассмотрим непродолжаемое решение $\mathrm{x} = \psi(t)$ с начальным условием x_0 из B_δ и ограничение $W(\psi(t))$ функции W на это решение. Поскольку производная $\frac{d}{dt}W(\psi(t)) = L_{\mathrm{v}} W(\psi(t))$ не положительна по условию, ограничение $W(\psi(t))$ не возрастает и остаётся не больше $m/2$. Поэтому решение $\mathrm{x} = \psi(t)$ не может пересечь сферу S_ε (где все значения не меньше m), а значит определено при всех $t \geqslant 0$ по теореме о продолжении, сформулированной в прошлом семестре (но пока не доказанной), и остаётся внутри сферы S_ε, что и требуется для устойчивости по Ляпунову.

2. Докажем второе утверждение теоремы. Предположим, что какое-то решение $\mathrm{x} = \psi(t)$ с начальным условием из шара B_δ, рассмотренного при доказательстве первого утверждения, не стремится к x_* при $t \to +\infty$. Тогда у него есть предельная точка $\mathrm{a} \neq \mathrm{x}_*$. Но $W(\mathrm{a}) > 0$. Поэтому для такого решения ограничение $W(\psi(t))$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$. Покажем, что на самом деле $W(\psi(t)) \to 0$. Полученное противоречие докажет теорему.

По условию, ограничение $W(\psi(t))$ не возрастает с течением времени и неотрицательно. Поэтому оно имеет предел $\ell \geqslant 0$ при $t \to \infty$. Пусть $\ell > 0$. Это означает, что $\psi(t)$ остаётся вне малого шара B с центром в x_*. На компактном замыкании шарового слоя $B_\varepsilon \setminus B$ функция $L_{\mathrm{v}}W$ строго отрицательна и непрерывна по условию, поэтому $L_{\mathrm{v}}W \leqslant -\beta_0 < 0$. Значит, $\frac{d}{dt}W(\psi(t)) \leqslant -\beta_0$. Интегрируя по t, получим $W(\psi(t)) < c-\beta_0 t$, то есть ограничение $W(\psi(t))$ должно стать отрицательным, что невозможно, так как $W(\psi(t)) \geqslant 0$ по условию. Таким образом, $\ell = 0$. $\square$

Одним из приложений теоремы Ляпунова служит следующая теорема (также принадлежащая Ляпунову) об устойчивости по линейному приближению.

Теорема 8. *Пусть* $\mathrm{v}(\mathrm{x}) = A\mathrm{x} + \mathrm{f}(\mathrm{x})$, *где* A *— постоянная матрица* ($A\mathrm{x}$ *называется линейной частью векторного поля* v), *и* f *— нелинейный остаток, состоящий из членов высших порядков, т. е.* $\|\mathrm{f}(\mathrm{x})\| = o\big(\|\mathrm{x}\|\big)$ *при* $\mathrm{x} \to 0$. *В этом случае начало координат — особая точка векторного поля* v *и верно следующее:*

1. Если все собственные значения матрицы A *имеют отрицательную вещественную часть, то начало координат асимптотически устойчиво.*

2. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то начало координат не устойчиво.

Доказательство второй части этой теоремы основано на теореме Четаева о неустойчивости, приведённой ниже.

Доказательство первой части по учебнику Л. С. Понтрягина. Рассмотрим следующую функцию W и докажем, что она является функцией Ляпунова.

Рассмотрим линейную часть системы $\dot{\mathrm{x}} = A\mathrm{x}$, и её решение $\mathrm{x} = e^{At}\mathrm{x}_0$ с начальным условием $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ при $t = 0$. Пусть

$$W(\mathrm{x}_0) = \int\limits_0^{+\infty} \left\|e^{At}\mathrm{x}_0\right\|^2 dt,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Функция W имеет следующие свойства:

1. Она определена для всех x_0. В самом деле, любая координата решения $\mathrm{x} = e^{At}\mathrm{x}_0$ представляет собой сумму элементарных квазимногочленов, показатели которых — собственные числа матрицы A. По условию все $\operatorname{Re}\lambda < -k < 0$, поэтому все координаты решения $\mathrm{x} = e^{At}\mathrm{x}_0$ стремятся при $t \to +\infty$ к нулю быстрее e^{-kt}. Значит, квадрат нормы решения $\mathrm{x} = e^{At}\mathrm{x}_0$ стремится к нулю быстрее e^{-2kt}. Следовательно, несобственный интеграл сходится при любом x_0.

2. Эта функция является квадратичной формой от x_0, поскольку под интегралом — квадратичная форма от x_0.

3. Эта форма положительно определена, поскольку обращается в нуль только при $\mathrm{x}_0 = 0$.

4. Производная Ли $L_{A\mathrm{x}}W$ функции W вдоль линейной части $A\mathrm{x}$ векторного поля v — отрицательно определённая квадратичная форма $-\|\mathrm{x}\|^2$. В самом деле,

$$W\left(e^{A\tau}\mathrm{x}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \left\|e^{At}e^{A\tau}\mathrm{x}\right\|^2 dt = \int\limits_0^{+\infty} W\left(e^{A\tau}\mathrm{x}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \left\|e^{A(t+\tau)}\mathrm{x}\right\|^2 dt = \int\limits_\tau^{+\infty} \left\|e^{At}\mathrm{x}\right\|^2 dt,$$

поэтому

$$L_{A\mathrm{x}}W(\mathrm{x}) = \frac{d}{d\tau}W\left(e^{A\tau}\mathrm{x}\right)\Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}\int\limits_{\tau}^{+\infty}\left\|e^{At}\mathrm{x}\right\|^2 dt\Big|_{\tau=0} = -\left\|\mathrm{x}\right\|^2.$$

5. Производная Ли функции W вдоль остатка f — бесконечно малая более высокого порядка: $L_{\mathrm{f}}W(\mathrm{x}) = o\big(\|\mathrm{x}\|^2\big)$. В самом деле,

$$\big|L_{\mathrm{f}}W(\mathrm{x})\big| = \big|\mathrm{f}(\mathrm{x})\cdot\operatorname{grad}W(\mathrm{x})\big| \leqslant \big\|\mathrm{f}(\mathrm{x})\big\|\cdot\big\|\operatorname{grad}W(\mathrm{x})\big\| = o\big(\|\mathrm{x}\|\big)O\big(\|\mathrm{x}\|\big) = o\big(\|\mathrm{x}\|^2\big),$$

поскольку $\operatorname{grad}W = O\big(\|\mathrm{x}\|\big)$ — линейная функция согласно пункту 2.

6. Производная Ли функции W вдоль векторного поля v отрицательна в проколотой окрестности начала координат, поскольку

$$L_{\mathrm{v}}W = L_{A\mathrm{x}}W + L_{\mathrm{f}}W = -\|\mathrm{x}\|^2 + o\big(\|\mathrm{x}\|^2\big).$$

Все условия теоремы Ляпунова выполнены, и начало координат асимптотически устойчиво.

Замечание. В случае, когда все собственные значения имеют неположительную вещественную часть, причём некоторые имеют нулевую, для нелинейных систем возможна как устойчивость так и неустойчивость. Теорема 8 не дает ответа в этом случае.

Замечание. Чтобы проверить, все ли собственные значения матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, не нужно искать эти собственные значения — нужны только коэффициенты характеристического многочлена матрицы A. Для этого есть различные методы, описанные, например, в задачнике Филиппова.

Определение. Непрерывно дифференцируемая функция $W : U \to \mathbb{R}$, определённая в окрестности особой точки $\mathrm{x}_* \in U$ векторного поля v, называется *функцией Четаева*, если для некоторого открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ выполнены следующие условия:

- особая точка принадлежит границе подмножества D:

$$\mathrm{x}_* \in \partial D;$$

- функция W равна нулю в точках границы подмножества D, лежащих внутри U:

$$W(\mathrm{x}) = 0 \quad \forall\, \mathrm{x} \in \partial D \cap U;$$

- функция W и её производная Ли $L_{\mathrm{v}}W$ положительны в точках подмножества D, лежащих внутри U:

$$W(\mathrm{x}) > 0,\ L_{\mathrm{v}}W(\mathrm{x}) > 0 \quad \forall\, \mathrm{x} \in D \cap U.$$

Теорема 9. (Теорема Четаева о неустойчивости.) *Если в некоторой окрестности особой точки непрерывного векторного поля существует функция Четаева, то эта точка неустойчива.*

Доказательство. Пусть x_* — особая точка и B — замкнутый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в x_*, целиком лежащий в U, а M — максимальное значение W на нём. Для любого $\delta > 0$ рассмотрим непродолжаемое решение $x = \varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(0) \in D \cap B$ таким, что $\|\varphi(0) - x_*\| < \delta$. (Это возможно, поскольку $x_* \in \partial D$.) Докажем, что это решение попадёт на границу B при некотором $t > 0$, — это и будет означать, что особая точка x_* неустойчива.

Предположим противное — решение $x = \varphi(t)$ остаётся внутри B при всех $t \geqslant 0$. Тогда оно остаётся внутри $D \cap B$. В самом деле, $W(\varphi(0)) > 0$ и пока $\varphi(t) \in D \cap B$ выполняется неравенство $W(\varphi(t)) \geqslant W(\varphi(0)) > 0$, поскольку производная $W(\varphi(t))$ положительна по условию. Значит, наше решение не может попасть на $\partial D \cap B$, поскольку там $W = 0$, и в противном случае функция $W(\varphi(t))$ испытала бы разрыв.

Поскольку наше решение остаётся в $D \cap B$, неравенство $W(\varphi(t)) \geqslant W(\varphi(0)) > 0$ выполняется при всех $t \geqslant 0$. Значит, наше решение при $t \geqslant 0$ принадлежит множеству K всех точек из $D \cap B$, в которых значения функции W не меньше, чем в начальной точке нашей траектории:

$$K = \big\{x \in D \cap B \mid W(x) \geqslant W(\varphi(0)) > 0\big\}.$$

Это множество замкнуто, поскольку не имеет предельных точек на границе D, а функция W непрерывна. Поэтому K — компакт. Функция $L_v W$ непрерывна и положительна на K. Обозначим через $\beta_0 > 0$ её наименьшее значение на K. Тогда $W(\varphi(t)) \geqslant W(\varphi(0)) + \beta_0 t$, то есть функция стремится к бесконечности и в некоторый момент превзойдет M, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что наше решение не может оставаться внутри B. □

Лекция 9

1. Особые точки нелинейных векторных полей на плоскости

Если фазовый портрет в окрестности изолированной особой точки нелинейного векторного поля похож на фазовый портрет невырожденного линейной векторного поля, то говорят, что они имеют один и тот же тип.

Вспомним все возможные типы: седло, устойчивый и неустойчивый (невырожденный) узел, устойчивый и неустойчивый вырожденный узел, устойчивый и неустойчивый дикритический узел, устойчивый и неустойчивый фокус, центр.

Теорема 10. *Если линейная часть особой точки нелинейного векторного поля является узлом, фокусом или седлом, то исходная особая точка имеет тот же тип.*

Замечание. Для центра это неверно!!! После прибавления нелинейных членов центр может стать как устойчивым, так и неустойчивым фокусом, а может остаться центром. Есть и другие возможности. Какие? (См. вопрос 39 ниже.)

Теорема 11. *Если линейная часть **асимптотически устойчивой** особой точки является **центром**, то исходная особая точка — **устойчивый фокус**.*

*Если линейная часть **неустойчивой** особой точки является **центром**, то исходная особая точка — **неустойчивый фокус**.*

При наличии первых интегралов ситуация несколько упрощается.

Теорема 12. *Если в окрестности особой точки есть первый интеграл, отличный от постоянной, то она не может быть ни асимптотически устойчивой, ни узлом, ни фокусом.*

Доказательство. Во всех перечисленных случаях окрестность особой точки содержится в объединении фазовых кривых, для каждой из которых особая точка является предельной. Но первый интеграл постоянен вдоль фазовых кривых, поэтому любое его значение в рассматриваемой окрестности совпадает со значением в особой точке. Значит, он является постоянной. □

Теорема 13. *Если линейная часть особой точки является* ***центром*** *и в её окрестности векторное поле имеет* ***первый интеграл с изолированной критической точкой****, то исходная особая точка —* ***центр****.*

Замечание. Доказательства теорем 10, 11 и 13, приведённых в этом параграфе, в настоящем курсе отсутствуют.

2. Теорема о продолжении для системы дифференциальных уравнений

Пусть $\mathrm{x} = \varphi(t)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{v}(t, \mathrm{x})$ с начальным условием $\varphi(t_0) = \mathrm{x}_0$. Здесь $(t, \mathrm{x}) \in U$, $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ — область в расширенном фазовом пространстве, $\mathrm{v} : U \to \mathbb{R}^n$ — правая часть системы дифференциальных уравнений, $(t_0, \mathrm{x}_0) \in U$, $t_0 \in I$.

Теорема 14. *Пусть вектор-функция* v *и её первые производные по зависимым переменным* x *непрерывны в* U, $K \subset U$ *— компакт,* $(t_0, \mathrm{x}_0) \in K$. *Тогда любое непродолжаемое решение* φ *с начальным условием* $\varphi(t_0) = \mathrm{x}_0$ *покидает* K *при некоторых* $t_- < t_0 < t_+$*:*

$$\big(t_-, \varphi(t_-)\big) \notin K, \quad \big(t_+, \varphi(t_+)\big) \notin K.$$

Замечание. Эквивалентная формулировка: любое решение задачи Коши с начальным условием из компакта в расширенном фазовом пространстве продолжается вперёд (назад) до внешности этого компакта.

Доказательство. Докажем существование $t_+ > t_0$ — предположим, что $\big(t, \varphi(t)\big) \in K$ при всех $t \geqslant t_0$, $t \in I$. Тогда интервал I ограничен справа, обозначим через t_* его точную верхнюю грань. Наше решение при всех $t < t_*$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\varphi(t) = \mathrm{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{v}\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, d\tau. \tag{6}$$

Функция под интегралом ограничена, поэтому интеграл имеет предел при $t \to t_*$. Доопределим наше решение φ в точке t_* по непрерывности. Тогда $\big(t_*, \varphi(t_*)\big) \in K \subset U$, поэтому функция под интегралом определена и непрерывна на всём отрезке $[t_0, t_*]$. Переходя в уравнении (6) к пределу при $t \to t_*$ и используя теорему о непрерывности интеграла по верхнему пределу, получим:

$$\varphi(t_*) = \mathrm{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_*} \mathrm{v}\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, d\tau.$$

Тем самым интегральное уравнение выполняется при всех $t \in [t_0, t_*]$.

Рассмотрим теперь решение $\mathrm{x} = \psi(t)$ с начальным условием $\psi(t_*) = \varphi(t_*)$, определённое в некоторой окрестности точки t_*. Оно удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\psi(t) = \varphi(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \mathrm{v}\big(\tau, \psi(\tau)\big)\, d\tau.$$

Рассмотрим функцию:

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \leqslant t_* \\ \psi(t) & t > t_* \end{cases}.$$

Эта функция непрерывна и удовлетворяет интегральному уравнению

$$\tilde{\varphi}(t) = \mathrm{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{v}\big(\tau, \tilde{\varphi}(\tau)\big)\, d\tau.$$

при всех $t \leqslant t_*$, поскольку тогда она совпадает с φ. При $t > t_*$:

$$\tilde{\varphi}(t) = \psi(t) = \varphi(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \mathrm{v}\big(\tau, \psi(\tau)\big)\, d\tau = \mathrm{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_*} \mathrm{v}\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, d\tau + \int\limits_{t_*}^{t} \mathrm{v}\big(\tau, \psi(\tau)\big)\, d\tau =$$

$$= \mathrm{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_*} \mathrm{v}\big(\tau, \tilde{\varphi}(\tau)\big)\, d\tau + \int\limits_{t_*}^{t} \mathrm{v}\big(\tau, \tilde{\varphi}(\tau)\big)\, d\tau = \mathrm{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{v}\big(\tau, \tilde{\varphi}(\tau)\big)\, d\tau.$$

Тем самым $\tilde{\varphi}$ — решение, которое является нетривиальным продолжением исходного решения φ. Поэтому последнее не может быть непродолжаемым. Полученное противоречие доказывает существование $t_+ > t_0$.

Существование $t_- < t_0$ доказывается аналогично. $\square$

Следствие. *В условиях теоремы 14 любое решение задачи Коши с начальным условием из внутренности компакта в расширенном фазовом пространстве продолжается вперёд (назад) до границы этого компакта.*

Доказательство. Чтобы решение покинуло компакт, оно должно попасть на его границу. $\square$

3. Теорема о продолжении для векторных полей

Теорема 15. *Пусть $\mathrm{v} : U' \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле, $K' \subset U'$ — компакт, $\mathrm{x}_0 \in K' \setminus \partial K'$ — начальное условие при $t = t_0$. Тогда любое непродолжаемое решение $\mathrm{x} = \varphi(t)$ автономной системы $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{v}(\mathrm{x})$ с начальным условием:*

- *либо при всех $t \geqslant t_0$ $\varphi(t)$ определено и $\varphi(t) \in K' \setminus \partial K'$, либо для некоторого $t_+ > t_0$ $\varphi(t_+) \in \partial K$;*
- *либо при всех $t \leqslant t_0$ $\varphi(t)$ определено и $\varphi(t) \in K' \setminus \partial K'$, либо $\varphi(t_-) \in \partial K$ для некоторого $t_- < t_0$;*

Замечание. Эквивалентная формулировка: любое решение задачи Коши с начальным условием из внутренности компакта в фазовом пространстве продолжается вперёд (назад) неограниченно по времени или до границы этого компакта.

Доказательство. Эта теорема следует из теоремы 14, её доказательство изложено в учебнике В. И. Арнольда — см. § 7, пункт 6, «Доказательство следствия 8». □

4. Решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений с непрерывными коэффициентами:

$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x}, \quad A : I \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \quad A \in C^0(I), \tag{7}$$

где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал (конечный или бесконечный).

Теорема 16. *Всякое решение системы (7) можно продолжить на весь интервал I определения её коэффициентов.*

Доказательство. Эта теорема следует из теоремы 14, её доказательство изложено в учебнике В. И. Арнольда — см. § 27, пункт 2.

Выкладки, которые пропущены в указанном доказательстве:

$$\frac{d}{d\tau}r^2 = \frac{d}{d\tau}\|\varphi(\tau)\|^2 = \frac{d}{d\tau}\big(\varphi(\tau),\varphi(\tau)\big) = 2\big(\dot\varphi(\tau),\varphi(\tau)\big) \leqslant 2\big\|\dot\varphi(\tau)\big\|\big\|\varphi(\tau)\big\| =$$
$$= 2\big\|A(\tau)\varphi(\tau)\big\|\big\|\varphi(\tau)\big\| \leqslant 2\big\|A(\tau)\big\|\big\|\varphi(\tau)\big\|^2 \leqslant 2C\big\|\varphi(\tau)\big\|^2 = 2Cr^2,$$

откуда получаем

$$\dot L = \frac{d}{d\tau}\ln r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\tau}r^2 \leqslant 2C.$$

□

Рассмотрим теперь систему линейных неоднородных уравнений с непрерывными коэффициентами:

$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x} + \mathrm{b}(t), \quad A : I \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \quad \mathrm{b} : I \to \mathbb{R}^n, \quad A, \mathrm{b} \in C^0(I), \tag{8}$$

где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал (конечный или бесконечный).

Следствие. *Всякое решение системы (8) можно продолжить на весь интервал I определения её коэффициентов.*

Доказательство. Согласно теореме (16) у однородной системы найдётся фундаментальная матрица $\Phi(t)$, определённая для всех $t \in I$. Применим теперь метод вариации постоянных. Любое решение системы уравнений $\dot{\mathrm{C}}(t) = \Phi^{-1}(t)\mathrm{b}(t)$ продолжается на весь интервал I. (Почему? См. задачу 28.) Значит, и любое решение $\mathrm{x} = \Phi(t)\mathrm{C}(t)$ неоднородной системы продолжается на весь интервал I. □

Лекция 11

1. Лемма Гронуолла–Беллмана[2]

Теорема 17. (Лемма Гронуолла–Беллмана.) *Пусть непрерывная числовая функция* $a : [t_0, \beta) \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ *удовлетворяет неравенству*

$$a(t) \leqslant a_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \big(ka(\tau) + b\big)\, d\tau \tag{9}$$

с некоторыми константами a_0, b *и* $k > 0$ *при всех* $t \in [t_0, \beta)$. *Тогда*

$$a(t) \leqslant \left(a_0 + \frac{b}{k}\right) e^{k(t-t_0)} - \frac{b}{k}.$$

Замечание. Правая часть неравенства $y(t) = \left(a_0 + \frac{b}{k}\right) e^{k(t-t_0)} - \frac{b}{k}$ является решением линейного уравнения $\dot{y} = ky + b$ с начальным условием $y(t_0) = a_0$, и поэтому

$$y(t) = a_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \big(ky(\tau) + b\big)\, d\tau. \tag{10}$$

Замечание. Если функция a является решением линейного дифференциального неравенства $\dot{a} \leqslant ka + b$ с начальным условием $a(t_0) = a_0$, то она удовлетворяет интегральному неравенству (9).

Замечание. С помощью леммы Гронуолла–Беллмана доказывается теорема о продолжении решений системы линейных неоднородных уравнений без привлечения метода вариации постоянной.

Доказательство. Вычтем равенство (10) из интегрального неравенства (9). Получим:

$$a(t) - y(t) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} k\big(a(\tau) - y(\tau)\big)\, d\tau$$

и $a(0) - y(0) = 0$. Докажем, что $a(t) - y(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Предположим, что это не так. Обозначим через t_1 точную нижнюю грань тех t, при которых $a(t) - y(t) > 0$. Тогда $a(t) - y(t) \leqslant 0$ при всех $t \leqslant t_1$. Пусть $0 < \Delta t \leqslant \frac{1}{2k}$ и

$$M = \max_{t \in [t_1, t_1 + \Delta t]} \big\{a(t) - y(t)\big\} = a(t_*) - y(t_*), \quad t_* \in [t_1, t_1 + \Delta t].$$

Тогда:

$$M = a(t_*) - y(t_*) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_*} k\big(a(\tau) - y(\tau)\big)\, d\tau \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_*} kM\, d\tau = (t_* - t_1)kM, \quad (t_* - t_1)k \leqslant \Delta t\, k \leqslant \frac{1}{2}.$$

Такое возможно только при $M \leqslant 0$. Таким образом, $a(t) - y(t) \leqslant 0$ при всех $t \leqslant t_1 + \Delta t$, что противоречит выбору t_1. □

[2]Этот параграф основан на конспектах лекций В. М. Закалюкина: http://tds.math.msu.su/wiki/index.php/2009:%D0%9E%D0%94%D0%A3

2. Лемма Адамара

Теорема 18. *1) Пусть $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая на интервале $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ функция, $0 \in \mathcal{E}$ и $f(0) = 0$. Тогда существует непрерывная функция $h : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(\varepsilon) = \varepsilon h(\varepsilon)$.* (Лемма Адамара.)

2) Пусть функция $f : U \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ и все её производные по ε порядка $1, \dots, r$ непрерывны, $0 \in \mathcal{E}$ и $f(t, 0) \equiv 0$. Тогда существует непрерывная функция $h : U \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(\varepsilon) = \varepsilon h(t, \varepsilon)$, а все её производные по ε порядка $1, \dots, r-1$ непрерывны.

3) Пусть функция $f : U \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ и все её производные по ε порядка $1, \dots, r$ непрерывны, $0 \in \mathcal{E}$ и $f(t, \varepsilon) = o(\varepsilon^{k-1})$ при $\varepsilon \to 0$, где $1 \leqslant k \leqslant r$. Тогда существует непрерывная функция $h : U \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(\varepsilon) = \varepsilon^k h(t, \varepsilon)$, а все её производные по ε порядка $1, \dots, r-k$ непрерывны.

Доказательство. Докажем утверждение 1). По формуле Ньютона-Лейбница:

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon) - f(0) = f(s\varepsilon)\Big|_{s=0}^{s=1} = \int\limits_0^1 \frac{df(s\varepsilon)}{ds}\, ds = \int\limits_0^1 f'(s\varepsilon)\varepsilon\, ds = \varepsilon \int\limits_0^1 f'(s\varepsilon)\, ds,$$

что и требовалось. Утверждение 2) доказывается аналогично:

$$f(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) - f(t, 0) = f(t, s\varepsilon)\Big|_{s=0}^{s=1} = \int\limits_0^1 \frac{df(t, s\varepsilon)}{ds}\, ds = \int\limits_0^1 f_\varepsilon(t, s\varepsilon)\varepsilon\, ds = \varepsilon \int\limits_0^1 f_\varepsilon(t, s\varepsilon)\, ds.$$

Утверждение 3) следует из утверждения 2) — надо его применить k раз. □

3. Непрерывная зависимость от параметров и начальных условий

Пусть $\mathrm{x} = \chi(t, \varepsilon)$ — непродолжаемое решение задачи Коши, зависящее от параметра $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathbb{R}^{k+n}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} & = & \mathrm{v}(t, \mathrm{x}, \varepsilon) \\ \chi(t_0, \varepsilon, \varepsilon') & = & \varepsilon' \end{cases}.$$

Здесь $(t, \mathrm{x}) \in U$, $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ — область в расширенном фазовом пространстве, $\mathrm{v} : U \to \mathbb{R}$ — правая часть системы дифференциальных уравнений, $t_0 \in \mathbb{R}$ — фиксированный начальный момент времени.

Теорема 19. *Если правая часть v непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменным x и ε, то множество определения $D(\chi)$ открыто и вектор-функция χ непрерывна в $D(\chi)$.*

Замечание. Ранее сформулированная теорема 3 в ослабленной формулировке следует из теоремы 19, если положить $\varepsilon' = \mathrm{x}_0(\varepsilon)$.

Замечание. Условие Липшица по параметру ε лишнее, но тогда доказательство получается сложнее — оно изложено, например, в учебнике Л. С. Понтрягина.

Доказательство. Открытость области определения мы не доказываем. Докажем непрерывность при $t \geqslant t_0$. Случай $t \leqslant t_0$ сводится к $t \geqslant t_0$ заменой $t \mapsto t_0 - t$.

Сначала рассмотрим случай, когда параметра ε вообще нет. Пусть

$$\varphi_1(t) = \chi(t, \varepsilon'_1), \quad \varphi_2(t) = \chi(t, \varepsilon'_2).$$

Задача Коши (3) равносильна интегральному уравнению:

$$\chi(t,\varepsilon') = \varepsilon' + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{v}\big(\chi(\tau,\varepsilon'),\tau\big)\,d\tau,$$

и поэтому

$$\varphi_1(t) = \varepsilon'_1 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{v}\big(\varphi_1(\tau),\tau\big)\,d\tau, \quad \varphi_2(t) = \varepsilon'_2 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{v}\big(\varphi_2(\tau),\tau\big)\,d\tau.$$

Отсюда

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\| = \left\|\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 + \int\limits_{t_0}^{t} \big[\mathrm{v}\big(\varphi_1(\tau),\tau\big) - \mathrm{v}\big(\varphi_2(\tau),\tau\big)\big]\,d\tau\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\varepsilon'_1-\varepsilon'_2\| + \int\limits_{t_0}^{t} \big\|\mathrm{v}\big(\varphi_1(\tau),\tau\big) - \mathrm{v}\big(\varphi_2(\tau),\tau\big)\big\|\,d\tau \leqslant \|\varepsilon'_1-\varepsilon'_2\| + K\int\limits_{t_0}^{t} \|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)\|\,d\tau,$$

где $K > 0$ — постоянная в условии Липшица. Применяя теперь по лемму Гронуолла–Беллмана, получаем:

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\| \leqslant \|\varepsilon'_1-\varepsilon'_2\|e^{K(t-t_0),}$$

Непрерывность по начальному условию доказана.

В случае, когда правая часть v явно зависит от ε применяется следующий трюк. Вместо исходной системы рассматривается расширенная система, в которой зависимыми переменными объявляются x и ε:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{\mathrm{x}} & = & \mathrm{v}(t,\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \dot{\mathrm{y}} & = & 0 \\ \mathrm{x}(t_0) & = & \varepsilon' \\ \mathrm{y}(t_0) & = & \varepsilon \end{array}\right.$$

решение которой является решением задачи Коши для исходной системы, но в правую часть которой параметры уже не входят, и мы можем применить уже доказанную непрерывность по начальным условиям. □

4. Дифференцируемость фазового потока

В прошлом семестре была сформулирована следующая теорема.

Теорема 20. *Пусть* $\mathrm{v} : W \subset \mathbb{R}^n$ — *непрерывно дифференцируемое векторное поле, все непродолжаемые решения которого определены при всех* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда у векторного поля* v *существует непрерывно дифференцируемый фазовый поток* $g : \mathbb{R}\times W \to W$.

Доказательство. Всё уже было доказано, кроме дифференцируемости, которая следует из теоремы 4. Положим в её условиях $U = \mathbb{R}\times W$, $\mathcal{E} = W$ и рассмотрим задачу Коши:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{\mathrm{x}} & = & \mathrm{v}(\mathrm{x}) \\ \chi(0,\varepsilon) & = & \varepsilon \end{array}\right. .$$

Тогда $g^t\varepsilon = \chi(t,\varepsilon)$. По теореме 4 вектор-функция χ и её первые производные по ε непрерывны. Но $\mathrm{x} = \chi(t,\varepsilon)$ — решение системы $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{v}(\mathrm{x})$, поэтому

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = \mathrm{v}\big(\chi(t,\varepsilon)\big). \tag{11}$$

Значит, производная по t тоже непрерывна и χ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция по всем своим аргументам t и ε. $\square$

Замечание. Формула (11) показывает, что производная фазового потока по времени тоже непрерывно дифференцируема. Иначе говоря, $\chi, \chi_t \in C^1$.

Теорема 21. *Пусть* $\mathrm{v} : W \subset \mathbb{R}^n$ — *векторное поле класса* C^r, *где* $r \geqslant 1$, *все непродолжаемые решения которого определены при всех* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда фазовый поток* $g : \mathbb{R} \times W \to W$ *поля* v *принадлежит классу* C^r.

Доказательство. Докажем, что $\chi \in C^k$ при $k \leqslant r$ индукцией по k. При $k = 1$ утверждение доказано. Пусть $\chi \in C^k$ и $k < r$. Докажем, что тогда $\chi \in C^{k+1}$. В самом деле, $\chi_\varepsilon \in C^k$, поскольку $\chi_\varepsilon \in C^{r-1}$ по теореме 4, а $k \leqslant r-1$. Формула (11) показывает, что $\chi_t \in C^k$ по предположению индукции. Значит, $\chi \in C^{k+1}$ (поскольку $\chi_t, \chi_\varepsilon \in C^k$). $\square$

Замечание. Формула (11) показывает, что производная фазового потока по времени тоже принадлежит классу C^r. Иначе говоря, $\chi, \chi_t \in C^r$.

Следствие. *Векторное поле класса* C^r *в окрестности неособой точки выпрямляется диффеоморфизмом класса* C^r.

5. Отображение Пуанкаре и лестница Ламерея

Эта часть курса изложена в пункте 12 § 1 учебника В. И. Арнольда.

6. Малые возмущения консервативной системы

Эта часть курса изложена в пункте 10 § 12 учебника В. И. Арнольда.

Чего не было в курсе

1. Устойчивость неподвижных точек

Непрерывная динамическая система = векторное поле. Дискретная динамическая система = биективное отображение $F : W \to W$, $W \subset \mathbb{R}^n$. Ось времени = $\mathbb{Z}$. Траектория с начальным условием $\varphi(0) = \mathrm{x}_0$: $\varphi(m) = F^m(\mathrm{x}_0)$, $m \in \mathbb{Z}$. (Здесь $F^m = F \circ \ldots \circ F$ и $F^{-m} = F^{-1} \circ \ldots \circ F^{-1}$, если $m > 0$.) Положение равновесия = неподвижная точка F, т. е. для которой $F(\mathrm{x}_*) = \mathrm{x}_*$. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость неподвижных точек.

Теорема 22. *Пусть* $F(\mathrm{x}) = B\mathrm{x} + \mathrm{f}(\mathrm{x})$, *где* B — *постоянная матрица* ($B\mathrm{x}$ *называется линейной частью отображения* F), *и* f — *нелинейный остаток, состоящий из членов высших порядков, т. е.* $\|\mathrm{f}(\mathrm{x})\| = o\big(\|\mathrm{x}\|\big)$ *при* $\mathrm{x} \to 0$. *В этом случае начало координат — неподвижная точка отображения* F *и верно следующее:*

1. Если все собственные значения матрицы B по модулю меньше 1, то начало координат — асимптотически устойчивая неподвижная точка отображения F.

2. Если хотя бы одно собственное значение матрицы B по модулю больше 1, то начало координат — неустойчивая неподвижная точка отображения F.

2. Странные аттракторы

Аттрактор = притягивающее множество динамической системы. У непрерывно дифференцируемого векторного поля на плоскости встречаются следующие аттракторы: положение равновесия, предельный цикл, ломаная из особых точек и незамкнутых фазовых кривых. В трёхмерном пространстве появляются странные аттракторы, вблизи которых наблюдаются хаотические режимы поведения решений.

Странные аттракторы можно наблюдать у дискретных динамических систем на плоскости.

Примеры теоретических вопросов

1. Найдите образ вектора $(1, 1, 1)$ под действием оператора $\exp A$, где
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(Вычислять $\exp A$ не требуется!)

2. Вычислите экспоненту матрицы размера $n \times n$, состоящей из одних единиц.

3. Задачи 867–875 из задачника Филиппова.

4. Найдите экспоненту матрицы:
$$\begin{pmatrix} -\ln 2 & \pi/2 \\ -\pi/2 & -\ln 2 \end{pmatrix}.$$

5. а) Найдите решение уравнения $\exp X = -E$ относительно неизвестного оператора $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

   б) Докажите, что в нечётномерном $\mathbb{R}^n$ это уравнение неразрешимо.

6. Найдите $\det A$ и $\exp A$, где
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Линейный оператор из $\mathbb{C}$ в себя овеществили и получили оператор из $\mathbb{R}^2$ в себя, который затем записали 2×2-матрицей в некотором базисе.

а) Приведите пример вещественной матрицы, которую нельзя получить описанным образом.

б) Охарактеризуйте все вещественные матрицы, которые можно получить описанным образом (например, выписав явно условия на элементы матрицы).

8. Пусть A — квадратная матрица размера n с элементами $a_{k\ell} = \max\{k, \ell\}$. Найдите
$$\frac{d}{dt} \det(E + tA)\Big|_{t=0}.$$

9. Имеет ли система
$$\begin{cases} \dot{x} &= & y \\ \dot{y} &= & x + (2\sin t + 1)\, y \end{cases},$$
неограниченные на $\mathbb{R}$ решения?

10. Имеет ли система
$$\begin{cases} \dot{x} &= \cos t\, x &+ & e^{-t}\, y \\ \dot{y} &= x &+ & \sin t\, y \end{cases},$$
решения, не стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$?

11. Верно ли, что определитель Вронского набора из n линейно зависимых непрерывных вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ тождественно равен нулю?

12. Приведите пример пары линейно независимых непрерывных вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, определитель Вронского которых тождественно равен нулю.

13. Верно ли, что определитель Вронского набора из n линейно зависимых функций класса $C^n(\mathbb{R})$ тождественно равен нулю?

14. Приведите пример пары линейно независимых функций класса $C^1(\mathbb{R})$, определитель Вронского которых тождественно равен нулю.

15. Приведите пример пары линейно независимых функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$, определитель Вронского которых тождественно равен нулю.

16. Пусть определитель Вронского набора из n функций класса $C^n(\mathbb{R})$ тождественно равен нулю. Докажите, что эти функции линейно зависимы на некотором интервале. (Эта задача в программу экзамена не входит.)

17. Докажите, что у линейной системы выполняется ровно одно из следующих трёх утверждений:

    - все решения устойчивы асимптотически;
    - все решения устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически;
    - все решения неустойчивы.

    (Для доказательства нужно только определение устойчивости.)

18. Пусть все элементы матрицы Φ размера $n \times n$ не превосходят по модулю числа $c > 0$. Докажите, что для стандартной евклидовой нормы матрицы Φ выполнена оценка $\|\Phi\| \leqslant nc$.

19. Точна ли оценка задачи 18?

20. Докажите, что для линейной системы следующие утверждения эквивалентны:

    - все решения ограничены на $[t_0, +\infty)$;
    - любая фундаментальная система состоит из ограниченных на $[t_0, +\infty)$ решений;
    - любая фундаментальная матрица ограничена на $[t_0, +\infty)$ (по стандартной евклидовой норме);
    - существует фундаментальная система, состоящая из ограниченных на $[t_0, +\infty)$ решений;
    - существует фундаментальная матрица, ограниченная на $[t_0, +\infty)$ (по стандартной евклидовой норме).

21. Докажите, что для линейной системы следующие утверждения эквивалентны:

    - все решения стремятся к нулю при $t \to +\infty$;
    - любая фундаментальная система состоит из решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$;
    - любая фундаментальная матрица стремится к нулю при $t \to +\infty$ (по стандартной евклидовой норме);
    - существует фундаментальная система, состоящая из решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$;
    - существует фундаментальная матрица, стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$ (по стандартной евклидовой норме).

22. Докажите, что из утверждений задачи 21 следуют утверждения задачи 20.

23. Докажите, что линейная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда выполнены утверждения задачи 21.

24. Исследуйте на устойчивость систему:

    $$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 0 \end{cases},$$

    не пользуясь критериями устойчивости системы с периодическими коэффициентами.

    Замечание: исследовать линейную систему на устойчивость означает, что надо обоснованно выбрать один из трёх вариантов:

    - система асимптотически устойчива (т. е. все её решения асимптотически устойчивы);
    - система устойчива по Ляпунову, но не асимптотически (т. е. все её решения устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически);
    - система неустойчива (т. е. все её решения неустойчивы).

25. Найдите мультипликаторы системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 0 \end{cases},$$

полагая, что её период $T = 1$. Являются ли они хорошими? Являются ли они неплохими?

26. Найдите оператор монодромии системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x \end{cases}, \qquad \omega = \mathrm{const},$$

полагая, что её период $T = 2\pi$.

27. Докажите, что асимптотическая устойчивость любого решения неоднородной системы эквивалентна асимптотической устойчивости нулевого решения однородной системы с той же матрицей.

28. Докажите, что все решения линейной неоднородной системы продолжаются на весь интервал I определения коэффициентов.

    Указание: это доказательство почти полностью приведено выше — осталось только доказать, что коэффициенты C продолжаются на весь интервал. Другой способ — применить лемму Гронуолла–Беллмана.

29. Докажите, что оператор $g_{t_0}^t$ для линейной неоднородной системы является аффинным, т. е. суммой линейного оператора и параллельного переноса на вектор, зависящий от t и t_0.

    Указание: аналогичное утверждение для оператора монодромии было доказано выше.

30. Докажите, что у линейной неоднородной системы с T-периодическими коэффициентами существует единственное T-периодическое решение тогда и только тогда, когда все мультипликаторы линейной однородной системы с той же матрицей отличны от 1.

31. Докажите, что любая координата непродолжаемого решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами представляет собой сумму элементарных квазимногочленов, показатель каждого из которых — собственное число матрицы системы, а степень меньше, чем размер максимальной жордановой клетки с этим числом.

32. Докажите, что любое непродолжаемое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами — квазимногочлен. (Эта теорема неявно использовалась в прошлом семестре, но так и не была доказана.)

    Указание: теперь уже можно воспользоваться любыми теоремами курса.

33. Задачи 718–723 из задачника Филиппова.

34. Нарисуйте фазовый портрет векторного поля на плоскости, все решения которого стремятся к неустойчивой особой точке.

35. Пусть у особой точки векторного поля есть функция Ляпунова, являющаяся первым интегралом. Может ли тогда особая точка быть асимптотически устойчивой?

36. Найдите функцию Ляпунова для нулевого положения равновесия системы:
$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + xy^2 \\ \dot{y} &= -2y + y^3 \end{cases}.$$

37. Найдите функцию Ляпунова для нулевого положения равновесия системы:
$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + ay \\ \dot{y} &= -y \end{cases},$$
где $a \in \mathbb{R}$.

38. Указав явно функцию Четаева, докажите неустойчивость нулевого положения равновесия системы:
$$\begin{cases} \dot{x} &= x - xy^2 \\ \dot{y} &= -y + y^2 \end{cases}.$$

39. Приведите пример устойчивой особой точки на плоскости, не являющейся центром, но линейная часть которой — центр. (Эта задача в программу основного экзамена не входит.)

40. Указав явно функцию Четаева, докажите неустойчивость нулевого положения равновесия системы:
$$\begin{cases} \dot{x} &= x + y^3 \\ \dot{y} &= -y - x^3 \end{cases}.$$

41. Верно ли, что устойчивый предельный цикл автономного векторного поля асимптотически устойчив как решение?

42. Приведите пример векторного поля плоскости с особой точкой в начале координат, все остальные фазовые кривые которого — циклы, неустойчивые как решения.

43. Приведите пример векторного поля на плоскости с устойчивым циклом, неустойчивым как решение. (Эта задача в программу экзамена не входит.)

44. Сколько циклов у уравнения $\ddot{x} = -x + \varepsilon\dot{x}(-1 + 5x^2 - 2x^4)$ при малых положительных $\varepsilon \in \mathbb{R}$?

45. Для системы
$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x + x^2 y \end{cases}$$
исследуйте на устойчивость нулевое положение равновесия и определите его тип. (Эта задача в программу основного экзамена не входит.)

46. Найдите наименьший порядок линейного однородного уравнения с непрерывными коэффициентами, определёнными на всей числовой прямой, и старшим коэффициентом 1, которое имеет решение

    а) $x = t^3$;

    б) $x = \sin^2 t$.

47. Пусть все собственные числа ненулевой правой части однородной линейной системы с постоянными коэффициентами равны 0. Устойчива ли эта система?

48. Исследуйте на устойчивость систему из задачи 9.

49. Найти площадь единичного квадрата при преобразовании g^3 из фазового потока векторного поля:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x + x\cos y + e^{\cos y} \\ \dot{y} &= \ln(1+x^2) - \sin y. \end{cases}$$

50. Есть ли циклы у векторных полей

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x + x\cos y + e^{\cos y} \\ \dot{y} &= \ln(1+x^2) - \sin y \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{x} &= e^{xy}(2x + x\cos y + e^{\cos y}) \\ \dot{y} &= e^{xy}(\ln(1+x^2) - \sin y) \end{cases} ?$$

51. Пусть $X(\varepsilon) = \exp(A + \varepsilon B)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу $X'(0)$. (Эта задача в программу основного экзамена не входит.)

52. а) Какое наибольшее число нулей на отрезке длины 10 может иметь нетривиальное решение уравнения $\ddot{x} + x\,\mathrm{th}\,t = 0$?

б) Какое наименьшее число нулей на отрезке длины 10 может иметь нетривиальное решение уравнения $\ddot{x} + x\,\mathrm{th}\,t = 0$?

53. Пусть дифференцируемая на прямой функция a удовлетворяет неравенству $\dot{a} \leqslant a+1$ и $a(0) = 1$. Докажите неравенство $a(1) \leqslant 2e - 1$.

54. Доопределим функцию $\sin t/t$ до непрерывной на всей числовой прямой. Является ли получившаяся функция бесконечно дифференцируемой?