И. В. Асташова*

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА**

Для дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + p(x)|y|^{k-1} y = 0 \tag{1}$$

четного порядка n с $k > 1$ и непрерывными функциями $p(x) > 0$ и $a_i(x)$ доказано существование равномерных оценок положительных решений с общей областью определения, зависящих от оценок коэффициентов уравнения и не зависящих от самих коэффициентов.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений. При этом будем использовать следующие обозначения. Верхний индекс в квадратных скобках $[j]$ обозначает оператор j-й квазипроизводной

$$r_j(x)\frac{d}{dx} \circ r_{j-1}(x)\frac{d}{dx} \circ \ldots \circ r_1(x)\frac{d}{dx} \circ r_0(x),$$

где все $r_j(x)$ — достаточно гладкие положительные функции. Таким образом, $y^{[0]}(x) = r_0(x)y(x)$, а при $j > 0$ имеем $y^{[j]}(x) = r_j(x)(y^{[j-1]})'(x)$. Всюду ниже r и R обозначают соответственно нижнюю и верхнюю грань функций $r_j(x)$ на рассматриваемом отрезке:

$$\begin{aligned} 0 < r = \inf\{r_j(x)\colon 0 \leqslant j \leqslant n,\ x \in [a,b]\} \leqslant \\ \leqslant R = \sup\{r_j(x)\colon 0 \leqslant j \leqslant n,\ x \in [a,b]\}, \end{aligned}$$

а ρ — их отношение $R/r \geqslant 1$.

**Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 04-01-00344).

Лемма 1. *Пусть на отрезке длиной* $\Delta > 0$ *выполняются неравенства* $|y(x)| \leqslant M$ *и* $y^{[n]}(x) < 0$. *Тогда на этом отрезке существуют как возрастающая, так и убывающая последовательности точек* ξ_j, $j = 0, \dots, n-1$, *для которых выполняются неравенства*

$$|y^{[j]}(\xi_j)| \leqslant MR \left(\frac{2^n R}{\Delta}\right)^j . \tag{2}$$

Доказательство. Пусть

$$\delta = \frac{\Delta}{2^n - 2}.$$

Индукцией по $j = 1, \dots, n-1$ докажем, что на любом подотрезке исходного отрезка длиной $2\delta(2^j - 1)$ найдется точка ξ, в которой выполняется неравенство

$$|y^{[j]}(\xi)| \leqslant MR^{j+1}\delta^{-j}. \tag{3}$$

Рассмотрим случай $j = 1$. Так как на всем отрезке выполняется неравенство $|y(x)| \leqslant M$, то разница значений функции $y^{[0]}$ в любых его двух точках не превосходит по модулю $2MR$. Поэтому по теореме Лагранжа на любом подотрезке длиной 2δ найдется точка ξ, в которой

$$|y^{[1]}(\xi)| = |r_1(\xi) \cdot (y^{[0]})'(\xi)| \leqslant R\frac{2MR}{2\delta} = MR^2\delta^{-1}.$$

Пусть для некоторого j утверждение уже доказано. Тогда подотрезок длиной $2\delta(2^{j+1} - 1)$ можно разбить на три подотрезка длиной соответственно $2\delta(2^j - 1)$, 2δ, $2\delta(2^j - 1)$. На первом и третьем подотрезках найдем по одной точке, в которой выполняется (3). Расстояние между этими точками не меньше длины второго подотрезка, т. е. 2δ, а разность j-х квазипроизводных в них по модулю не больше чем $2MR^{j+1}\delta^{-j}$. Поэтому по теореме Лагранжа между ними найдется точка ξ, в которой

$$|y^{[j+1]}(\xi)| = |r_{j+1}(\xi) \cdot (y^{[j]})'(\xi)| \leqslant R\frac{2MR^{j+1}\delta^{-j}}{2\delta} = MR^{j+2}\delta^{-(j+1)}.$$

Заметим, что при $j = n-1$ подотрезок, фигурирующий в утверждении, имеет самую большую длину, равную Δ. Итак, на исходном отрезке существует последовательность точек ξ_j, $j = 1, \dots, n-1$, для которых выполняется (3). При этом $(j+1)$-ю точку последовательности мы выбирали между двумя точками, каждую из которых можно взять в качестве j-го члена этой последовательности. Поэтому, двигаясь по j

в обратном направлении, можем в качестве ξ_j выбирать ту из двух возможных точек, которая лежит слева от ξ_{j+1}, и тогда получим возрастающую последовательность $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1}$. Выбирая ту, которая лежит справа, получим убывающую последовательность. В качестве ξ_0 возьмем соответственно левый или правый конец исходного отрезка. Так как $\delta > \Delta/2^n$, то лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть функция $y(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет неравенствам $y(x) \geqslant 0$ и $y^{[n]}(x) \leqslant 0$. Пусть также*

$$M = \sup\{y(x)\colon x \in [a,a']\}, \quad \mu = \inf\{|y^{[n]}(x)|\colon x \in [b',b]\},$$
$$a < a' \leqslant b' < b.$$

Тогда на отрезке $[b',b]$ выполняется неравенство

$$y(x) \leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni}\rho^{i+1}}{i!} \left(\frac{x-a}{a'-a}\right)^i - \mu \frac{(x-b')^n}{R^{n+1}n!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 на отрезке $[a,a']$ существуют такие точки $\xi_{n-1} < \xi_{n-2} < \ldots < \xi_0$, что

$$|y^{[j]}(\xi_j)| \leqslant MRK^j, \quad j = 0,\ldots,n-1, \quad K = \frac{2^nR}{a'-a}.$$

Положим $\xi_n = a$ и обратной индукцией по $j = n,\ldots,0$ докажем, что на $[\xi_j, b]$ выполняется неравенство

$$y^{[j]}(x) \leqslant MR \sum_{i=0}^{n-j-1} K^{i+j} \frac{(x-a)^i}{r^i i!} - \mu\theta(x-b') \frac{(x-b')^{n-j}}{R^{n-j}(n-j)!}, \tag{4}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

При $j = n$ это неравенство превращается в $y^{[n]}(x) \leqslant 0$ на $[a,b']$ и $y^{[n]}(x) \leqslant -\mu$ на $[b',b]$, т. е. непосредственно вытекает из условия доказываемой леммы.

Предположим, что для некоторого j неравенство (4) уже доказано. Тогда, интегрируя по $x \in [\xi_{j-1}, b] \subset [\xi_j, b]$, получим

$$y^{[j-1]}(x) = y^{[j-1]}(\xi_{j-1}) + \int_{\xi_{j-1}}^{x} (y^{[j-1]})'(x)\,dx =$$
$$= y^{[j-1]}(\xi_{j-1}) + \int_{\xi_{j-1}}^{x} \frac{y^{[j]}(x)}{r_j(x)}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant y^{[j-1]}(\xi_{j-1}) + \frac{MR}{r}\sum_{i=0}^{n-j-1}\frac{K^{i+j}}{r^i}\int\limits_a^x \frac{(x-a)^i}{i!}\,dx -$$

$$-\frac{\mu\theta(x-b')}{R}\int\limits_{b'}^x \frac{(x-b')^{n-j}}{R^{n-j}(n-j)!}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant MRK^{j-1}+MR\sum_{i=0}^{n-j-1}\frac{K^{i+j}}{r^{i+1}}\,\frac{(x-a)^{i+1}}{(i+1)!}-\mu\theta(x-b')\frac{(x-b')^{n-j+1}}{R^{n-j+1}(n-j+1)!}\leqslant$$

$$\leqslant MRK^{j-1}+MR\sum_{i=1}^{n-j}\frac{K^{i-1+j}}{r^{i}}\,\frac{(x-a)^{i}}{i!}-\mu\theta(x-b')\frac{(x-b')^{n-j+1}}{R^{n-j+1}(n-j+1)!}\leqslant$$

$$\leqslant MR\sum_{i=0}^{n-(j-1)-1}K^{i+(j-1)}\frac{(x-a)^i}{r^i i!}-\mu\theta(x-b')\frac{(x-b')^{n-(j-1)}}{R^{n-(j-1)}(n-(j-1))!},$$

т. е. неравенство (4) доказано для $(j-1)$, а значит, и для всех $j=0,\ldots,$ $n-1$.

В частности, когда $j=0$ и $x\in[b',b]$, получается неравенство

$$y^{[0]}(x)\leqslant MR\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2^nR}{a'-a}\right)^i\frac{(x-a)^i}{r^i i!}-\mu\frac{(x-b')^n}{R^n n!},$$

откуда

$$y(x)=\frac{y^{[0]}(x)}{r_0(x)}\leqslant\frac{MR}{r}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2^nR}{a'-a}\right)^i\frac{(x-a)^i}{r^i i!}-\frac{\mu}{R}\,\frac{(x-b')^n}{R^n n!}=$$

$$=M\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2^{ni}\rho^{i+1}}{i!}\left(\frac{x-a}{a'-a}\right)^i-\mu\frac{(x-b')^n}{R^{n+1}n!},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *В условиях и обозначениях леммы 2 имеет место неравенство*

$$\mu\leqslant\frac{MR^{n+1}n!}{(b-b')^n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2^{ni}\rho^{i+1}}{i!}\left(\frac{b-a}{a'-a}\right)^i.$$

Доказательство получается непосредственно из леммы 2 с учетом неотрицательности функции $y(x)$, в частности в точке b.

Лемма 4. *Пусть на отрезке I выполняются неравенства $y(x) \geqslant 0$ и $y^{[n]}(x) \leqslant 0$ с четным n. Тогда для любого отрезка $I' \subset I$ справедлива оценка*

$$\sup\{y(x)\colon x \in I'\} \geqslant \sup\{y(x)\colon x \in I\} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni}\rho^{i+1}}{i!} \, \frac{|I|^i}{|I'|^i} \right]^{-1},$$

где $|I|$ и $|I'|$ — длины отрезков.

Доказательство. Если эта оценка не выполняется, то для точек справа от I' по лемме 2 выполняется неравенство

$$y(x) < \sup\{y(x)\colon x \in I\}.$$

Ввиду четности n достаточно сделать замену $x \mapsto -x$, чтобы получить такое же неравенство для точек слева от I'. Так как сумма в доказываемом неравенстве заведомо больше 1, то во всех точках отрезка I значение функции $y(x)$ строго меньше своей верхней грани. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 1. *Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения*

$$y^{[n]} + |y|^{k-1} y = 0 \tag{5}$$

с четным n и $k > 1$ справедлива оценка

$$y(x) \leqslant M = \sqrt[k-1]{(b-a)^{-n} R^{n+1} Q_{n,k}(\rho)}, \tag{6}$$

где

$$Q_{n,k}(\rho) = (n+2)^n n! \rho^k \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni}\rho^{i+1}(n+2)^i}{i!} \right]^{k+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого положительного решения $y(x)$ оценка (6) не выполняется. Тогда $\sup\{y(x)\colon x \in [a, b]\} > M$ и $y^{[n]} < 0$.

Разобьем весь отрезок $[a, b]$ на $(n+2)$ равные части $I_0, \ldots, I_{n+1}$ длиной по $\delta = \frac{b-a}{n+2}$ каждая и выберем на них точки $x_i \in I_i$, $i = 0, \ldots, n+1$, в которых для 0-й квазипроизводной $y^{[0]}(x)$ выбранного решения на соответствующем отрезке достигался бы соответственно максимум при четном i и минимум при нечетном.

Воспользовавшись леммой 4, получим следующую оценку для максимумов при $j = 0, \dots, n+1$:

$$\sup\{y^{[0]}(x) \colon x \in I_j\} \geqslant \frac{r \sup\{y(x) \colon x \in I_j\}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni}\rho^{i+1}}{i!}(n+2)^i} > \\ > \frac{rM}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni}\rho^{i+1}}{i!}(n+2)^i}. \tag{8}$$

С другой стороны, принимая во внимание уравнение (5) и лемму 3, получим оценку для минимумов при $j = 1, \dots, n+1$:

$$\inf\{y^{[0]}(x) \colon x \in I_j\} \leqslant R \sqrt[k]{\inf\{|y^{[n]}(x)| \colon x \in I_j\}} \leqslant \\ \leqslant R \sqrt[k]{\frac{MR^{n+1}n!}{\delta^n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni}\rho^{i+1}}{i!}(n+2)^i}. \tag{9}$$

Заметим, что константа M в формуле (6) подобрана так, чтобы правые части в оценках (8) и (9) совпадали. Действительно, их отношение при возведении в k-ю степень дает

$$\frac{r^k M^{k-1} \delta^n}{R^{k+n+1} n!} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni}\rho^{i+1}(n+2)^i}{i!} \right]^{-k-1} = \frac{r^k R^{n+1} (n+2)^n n! \rho^k \delta^n}{(b-a)^n R^{k+n+1} n!} = 1.$$

Таким образом, максимум функции $y^{[0]}(x)$ на любом из отрезков $I_0, \dots, I_{n+1}$ строго больше ее минимума на любом другом таком отрезке. Поэтому для любого четного i и любого нечетного j справедливо неравенство $y^{[0]}(x_i) > y^{[0]}(x_j)$. По теореме Лагранжа между точками x_i найдутся точки $x'_0, \dots, x'_n$, в которых функция $y^{[1]}(x)$ отрицательна при четном i и положительна при нечетном.

Можно продолжить аналогичным образом и между точками x'_i выбрать n точек x''_i с чередующимися знаками вторых квазипроизводных решения, затем $(n-1)$ точку с чередующимися знаками третьих квазипроизводных и т. д., до тех пор пока не найдутся две точки, в которых функция $y^{[n]}(x)$ имеет разные знаки.

Но положительное решение уравнения (5) должно иметь отрицательную n-ю квазипроизводную. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Не существует отличных от нуля знакопостоянных решений уравнения* (5) *с четным* n *и* $k > 1$, *заданных на неограниченном слева и/или справа интервале.*

Доказательство. Достаточно доказать отсутствие положительных решений. Если такое решение существует, то по теореме 2 его ограничение на отрезок длиной L оценивается сверху величиной, пропорциональной $L^{-n/(k-1)}$. Так как любую точку неограниченного интервала можно покрыть отрезком сколь угодно большой длины, то значение решения в этой точке можно оценить сверху сколь угодно малой величиной. Поэтому это решение тождественно равно нулю.

Теперь, чтобы перейти от уравнения (5) к уравнению (1), докажем несколько вспомогательных утверждений, касающихся представления оператора

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \frac{d^j}{dx^j}, \tag{10}$$

заданного на некотором отрезке I, в виде оператора квазипроизводной. Всюду ниже будем использовать обозначения

$$A_L = \sum_{j=0}^{\deg L-1} \sup\{|a_j(x)| \colon x \in I\}, \quad \hat{\delta}_n = \max\left\{\frac{\delta^i}{i!} \colon i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Лемма 5. *Пусть функция* $y(x)$ *является решением задачи Коши*

$$Ly(x) = 0, \quad x \in [x_0, x_0 + \delta], \tag{11}$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{12}$$

Пусть также выполняется неравенство $A_L \hat{\delta}_n < 1$. *Тогда на* $[x_0, x_0 + \delta]$ *справедливы оценки*

$$|y^{(j)}(x) - y^{(j)}(x_0)| \leqslant \frac{A_L \hat{\delta}_n}{1 - A_L \hat{\delta}_n}, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\eta = \sup\{\, |y^{(j)}(x) - y^{(j)}(x_0)| \colon x \in [x_0, x_0 + \delta],\ j = 0, \ldots, n-1\}.$$

Тогда ввиду условий (11), (12)

$$y^{(i)}(x) - y^{(i)}(x_0) = -\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n-i} dx \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x),$$

откуда

$$|y^{(i)}(x) - y^{(i)}(x_0)| \leqslant \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} dx \ldots \int\limits_{x_0}^{x}}_{n-i} dx \sum_{j=0}^{n-1} |a_j(x)|\,|y^{(j)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant A_L(1+\eta)\frac{\delta^{n-i}}{(n-i)!} \leqslant A_L(1+\eta)\hat{\delta}_n.$$

Решая возникающее таким образом неравенство $\eta \leqslant A_L(1+\eta)\hat{\delta}_n$ относительно η, получаем оценку (13).

Лемма 6. *Оператор L, заданный на отрезке I выражением* (10), *на любом отрезке $I' \subset I$, длина δ которого удовлетворяет условию $A_L\hat{\delta}_n < 1/2$, разлагается в композицию*

$$L = q_1(x) \circ L' \circ \frac{d}{dx} \circ q_2(x),$$

где L' — оператор порядка $n-1$, у которого, как и у L, старший коэффициент равен 1, а для остальных коэффициентов и для функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ выполняются неравенства

$$\frac{1-2A_L\hat{\delta}_n}{1-A_L\hat{\delta}_n} \leqslant q_1(x) \leqslant \frac{1}{1-A_L\hat{\delta}_n}, \quad 1-A_L\hat{\delta}_n \leqslant q_2(x) \leqslant \frac{1-A_L\hat{\delta}_n}{1-2A_L\hat{\delta}_n},$$

$$A_{L'} \leqslant A_L\frac{1+2^n\hat{\delta}_n(1+A_L/2)}{1-2A_L\hat{\delta}_n}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\theta = A_L\hat{\delta}_n$, а $y_1(x)$ — решение задачи (11), (12), где x_0 — левый конец отрезка I'. Ввиду ограничения на δ и согласно лемме 5 для производных функции $y_1(x)$ справедливы оценки

$$|y_1^{(j)}(x)| \leqslant \frac{\theta}{1-\theta}, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

а для нее самой —

$$y_1(x) \leqslant 1 + \frac{\theta}{1-\theta} = \frac{1}{1-\theta}, \quad y_1(x) \geqslant 1 - \frac{\theta}{1-\theta} = \frac{1-2\theta}{1-\theta},$$

$$1-\theta \leqslant \frac{1}{y_1(x)} \leqslant \frac{1-\theta}{1-2\theta}.$$

В частности, функция $y_1(x)$ положительна на I'. Рассмотрим композицию оператора L и оператора умножения на функцию $y_1(x)$:

$$\hat{L} = L \circ y_1 = \left(\frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{d^j}{dx^j}\right) \circ y_1 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i y_1^{(n-i)} \frac{d^i}{dx^i} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{i=0}^{j} C_j^i y_1^{(j-i)} \frac{d^i}{dx^i} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} \left[C_n^i y_1^{(n-i)} + \sum_{j=i}^{n-1} C_j^i a_j y_1^{(j-i)} \right] \frac{d^i}{dx^i}.$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках равно нулю при $i = 0$, так как $Ly_1 = 0$, и равно y_1 при $i = n$. Поэтому

$$\hat{L} = y_1 \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[C_n^i y_1^{(n-i)} + \sum_{j=i}^{n-1} C_j^i a_j y_1^{(j-i)} \right] \frac{d^i}{dx^i} = y_1 \circ L' \circ \frac{d}{dx},$$

где

$$L' = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \left[\frac{C_n^{i+1} y_1^{(n-1-i)}}{y_1} + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{C_j^{i+1} a_j y_1^{(j-1-i)}}{y_1} \right] \frac{d^i}{dx^i}.$$

Таким образом,

$$L = L \circ y_1 \circ \frac{1}{y_1} = y_1 \circ L' \circ \frac{d}{dx} \circ \frac{1}{y_1}.$$

Требуемое разложение и оценки для участвующих в нем функций $q_1(x) = y_1(x)$ и $q_2(x) = 1/y_1(x)$ получены. Осталось оценить $A_{L'}$.

Пусть $a_j^* = \sup\{|a_j(x)|\colon x \in I\}$. Тогда

$$A_{L'} \leqslant \sum_{i=0}^{n-2} \left[C_n^{i+1} \frac{\theta}{1-\theta} + a_{i+1}^* + \sum_{j=i+1}^{n-1} C_j^{i+1} a_j^* \frac{\theta}{1-\theta} \right] \frac{1-\theta}{1-2\theta} =$$

$$= \left[\theta \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i + (1-\theta) \sum_{i=1}^{n-1} a_i^* + \theta \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} C_j^i a_j^* \right] \frac{1}{1-2\theta} <$$

$$< \frac{2^n\theta + A_L + 2^{n-1}\theta A_L}{1-2\theta} = A_L \frac{1 + 2^n \hat{\delta}_n + 2^{n-1}\theta}{1-2\theta}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Оператор L, заданный на отрезке I выражением* (10), *на любом отрезке $I' \subset I$, длина δ которого удовлетворяет условию*

$$\hat{\delta}_n \leqslant \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2^n(1+5A_L)}, \tag{15}$$

разлагается в композицию

$$r_n(x)\frac{d}{dx} \circ \ldots \circ r_1(x)\frac{d}{dx} \circ r_0(x),$$

где функции $r_j(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} \left(\frac{1-4A_L\hat{\delta}_n}{1-2A_L\hat{\delta}_n}\right)^n \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{(1-2A_L\hat{\delta}_n)^n}, \\ 1-2A_L\hat{\delta}_n \leqslant r_j(x) \leqslant \frac{1-2A_L\hat{\delta}_n}{1-4A_L\hat{\delta}_n}, \quad j=0,\ldots,n-1. \end{gathered} \tag{16}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из наложенного на $\hat{\delta}_n$ условия (15) следует неравенство $4A_L\hat{\delta}_n < 1$, из которого вытекает положительность всех выражений, участвующих в оценках (16).

Кроме того, из данного условия следует, что при всех $\lambda \in [0;2]$ выполняется неравенство

$$\frac{1+2^n\hat{\delta}_n(1+\lambda A_L/2)}{1-2\lambda A_L\hat{\delta}_n} \leqslant \sqrt[n]{2}. \tag{17}$$

Действительно, так как знаменатель в этом неравенстве положительный, то оно равносильно следующим неравенствам:

$$\begin{gathered} 1+2^n\hat{\delta}_n\left(1+\frac{\lambda A_L}{2}\right) \leqslant \sqrt[n]{2}(1-2\lambda A_L\hat{\delta}_n), \\ 2^n\hat{\delta}_n + \lambda A_L\hat{\delta}_n\bigl(2^{n-1}+2\sqrt[n]{2}\bigr) \leqslant \sqrt[n]{2}-1, \\ 2^n\hat{\delta}_n\bigl(1+\lambda A_L\bigl(2^{-1}+2^{1-n+1/n}\bigr)\bigr) \leqslant \sqrt[n]{2}-1. \end{gathered}$$

Так как $2^{-1}+2^{1-n+1/n} \leqslant 5/2$ и поэтому при всех $\lambda \in [0;2]$ справедлива оценка $\lambda(2^{-1}+2^{1-n+1/n}) < 5$, то последнее неравенство, равносильное (17), непосредственно вытекает из условия (15).

Далее индукцией по $j=1,\ldots,n$ докажем существование на отрезке I' разложения

$$L = Q_j(x) \circ L_{n-j} \circ \frac{d}{dx} \circ r_{j-1}(x)\frac{d}{dx} \circ \ldots \circ r_1(x)\frac{d}{dx} \circ r_0(x),$$

где функции $r_i(x)$, $i = 0, \ldots, j-1$, удовлетворяют неравенствам (16), функция $Q_j(x)$ — неравенству

$$\left(\frac{1 - 4A_L\hat{\hat{\delta}}_n}{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n}\right)^j \leqslant Q_j(x) \leqslant \frac{1}{(1 - 2A_L\hat{\delta}_n)^j},$$

а L_{n-j} — оператор $(n-j)$-го порядка, у которого старший коэффициент равен 1, а остальные удовлетворяют оценке

$$A_{L_{n-j}} \leqslant 2^{j/n} A_L \leqslant 2A_L.$$

При $j = 1$ это утверждение является следствием леммы 6, в которой функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ соответствуют требуемым функциям $Q_1(x)$ и $r_0(x)$ и удовлетворяют более сильным неравенствам

$$\frac{1 - 4A_L\hat{\hat{\delta}}_n}{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n} \leqslant \frac{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n}{1 - A_L\hat{\hat{\delta}}_n} \leqslant q_1(x) = Q_1(x) \leqslant \frac{1}{1 - A_L\hat{\hat{\delta}}_n} \leqslant \frac{1}{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n},$$

$$1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n \leqslant 1 - A_L\hat{\hat{\delta}}_n \leqslant q_2(x) = r_0(x) \leqslant \frac{1 - A_L\hat{\hat{\delta}}_n}{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n} \leqslant \frac{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n}{1 - 4A_L\hat{\hat{\delta}}_n}.$$

Что касается оценки для $A_{L_{n-1}}$, то, благодаря неравенству (17) при $\lambda = 1$, коэффициент при A_L в правой части неравенства (14) оказывается не больше, чем $\sqrt[n]{2}$. Поэтому выполняется требуемое неравенство

$$A_{L_{n-1}} = A_{L'} \leqslant A_L \frac{1 + 2^n\hat{\hat{\delta}}_n(1 + A_L/2)}{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n} \leqslant 2^{1/n} A_L.$$

Аналогично осуществляется переход индукции от j к $j+1$. С помощью леммы 6, примененной к оператору L_{n-j}, доказывается существование оператора L_{n-j-1}. При этом функция $q_2(x)$ из леммы 6 становится очередным коэффициентом $r_j(x)$, удовлетворяющим неравенствам

$$1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n \leqslant 1 - A_{L_{n-j}}\hat{\hat{\delta}}_n \leqslant q_2(x) = r_j(x) \leqslant \frac{1 - A_{L_{n-j}}\hat{\hat{\delta}}_n}{1 - 2A_{L_{n-j}}\hat{\hat{\delta}}_n} \leqslant \frac{1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n}{1 - 4A_L\hat{\hat{\delta}}_n}.$$

Функция $q_1(x)$ при умножении на $Q_j(x)$ дает $Q_{j+1}(x)$, удовлетворяющую необходимым условиям:

$$Q_{j+1}(x) = q_1(x)Q_j(x) \leqslant \frac{1}{1 - A_{L_{n-j}}\hat{\hat{\delta}}_n} \frac{1}{(1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n)^j} \leqslant \frac{1}{(1 - 2A_L\hat{\hat{\delta}}_n)^{j+1}},$$

$$Q_{j+1}(x) \geqslant \frac{1 - 2A_{L_{n-j}}\hat{\delta}_n}{1 - A_{L_{n-j}}\hat{\delta}_n} \cdot \left(\frac{1 - 4A_L\hat{\delta}_n}{1 - 2A_L\hat{\delta}_n}\right)^j \geqslant \left(\frac{1 - 4A_L\hat{\delta}_n}{1 - 2A_L\hat{\delta}_n}\right)^{j+1}.$$

Наконец, воспользовавшись неравенством (17), в котором положим $\lambda = 2^{j/n}$, получим необходимую оценку для младших коэффициентов оператора L_{n-j-1}:

$$A_{L_{n-j-1}} \leqslant A_{L_{n-j}} \frac{1 + 2^n\hat{\delta}_n(1 + A_{L_{n-j}}/2)}{1 - 2A_{L_{n-j}}\hat{\delta}_n} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{j/n}A_L \frac{1 + 2^n\hat{\delta}_n(1 + 2^{j/n}A_L/2)}{1 - 2 \cdot 2^{j/n}A_L\hat{\delta}_n} \leqslant 2^{j/n}A_L\sqrt[n]{2} \leqslant 2^{(j+1)/n}A_L.$$

В результате при $j = n$ получаем утверждение доказываемой леммы, в котором роль функции $r_n(x)$ играет $Q_n(x)$. Лемма 7 доказана.

Эта лемма вместе с теоремой 1 приводит к оценкам решений уравнения (1).

Теорема 2. *Для любых $k > 1$, $p_* > 0$, $A > 0$ и четного $n > 1$ найдутся такие положительные δ_0 и M_1, что для любых непрерывных функций $p(x) > p_*$ и $a_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, заданных на отрезке I длиной $\delta \leqslant \delta_0$ и удовлетворяющих условию*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sup\{|a_j(x)| \colon x \in I\} \leqslant A,$$

все положительные решения уравнения (1), *определенные на этом отрезке, удовлетворяют неравенству*

$$y(x) \leqslant M_1\delta^{-n/(k-1)}.$$

Замечание 1. Формулы, приведенные в теореме 1 и лемме 6, позволяют получить для теоремы 2 зависимость δ_0 и $M_1 > 0$ от k, p_*, A и n, однако соответствующие выражения оказываются слишком громоздкими и здесь не приводятся.

Замечание 2. Так как оценка в теореме 2 приводится только для достаточно малых отрезков, получить из нее для уравнения (1) следствие, аналогичное следствию 1 для уравнения (5), нельзя. Наоборот, можно привести пример уравнения типа (1) второго порядка, имеющего положительное решение с неограниченной областью определения. Так, уравнение $y'' - y + y^3 = 0$ имеет решение $y(x) = 1$, определенное на всей числовой прямой.

Так как любой отрезок можно представить в виде объединения отрезков, длина которых не больше δ_0, то теорема 2 допускает обобщение на случай отрезка произвольной длины.

ТЕОРЕМА 3. *Для любых $k > 1$, $p_* > 0$, $A > 0$ и четного $n > 1$ найдутся такие положительные δ_0 и M_1, что для любых непрерывных функций $p(x) > p_*$ и $a_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$, заданных на отрезке I произвольной длины и удовлетворяющих условию*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sup\{|a_j(x)|\colon x \in I\} \leqslant A,$$

все положительные решения уравнения (1)*, определенные на этом отрезке, удовлетворяют неравенству*

$$y(x) \leqslant M_1 \min\{\delta_0, |I|\}^{-n/(k-1)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [1] приводятся интегральные оценки решений полулинейных эллиптических уравнений, в [2] — более слабые равномерные оценки для положительных решений уравнения (1) при $a_i(x) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, произвольного (не обязательно четного) порядка. В [3] получены равномерные оценки для модуля решений этого уравнения при $n = 2$ с комплекснозначным потенциалом $p(x)$, действительная часть которого меньше некоторой отрицательной константы. В [4—6] даны некоторые достаточные условия приведения линейного дифференциального оператора к оператору квазипроизводной.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. А. Кондратьеву за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В. А.* О качественных свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1991. Вып. 16. С. 186—190.
2. *Асташова И. В.* О качественных свойствах решений уравнений типа Эмдена—Фаулера // УМН. 1996. Т. 51, № 5. С. 185.
3. *Astashova I. V.* Estimates of solutions to one-dimensional Schrödinger equation // Progress in Analysis. Proc. of the 3rd Intern. ISAAC Congr. V. 2. World Scientific, Singapore, 2003. P. 955—960.
4. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // УМН. 1969. Т. 24, № 2 (146). С. 43—96.

5. *De la Vallée-Poussin Ch. I.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n // J. Math. Pures et Appl. 1929. V. 9, N 8. P. 125—144.

6. *Pólya G.* On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1924. V. 24. P. 312—324.