

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №1

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 17:30.

Решение нужно прислать ответным письмом не позже 18:00.

Пусть $u(x, y, z)$ — гармоническая функция в \mathbb{R}^3 , а точка $M \in \mathbb{R}^3$ имеет координаты $(1, -1, 0)$. Обозначим через $B_R(M)$ шар радиуса R с центром в точке M . Известно, что

$$\int_{B_1(M)} u \, dx = 1.$$

Найдите значение интеграла

$$\int_{B_2(M)} u \, dx.$$

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №2

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 17:50.

Решение нужно прислать ответным письмом не позже 18:20.

Решите в $D'(\mathbb{R}^1)$ уравнение $u' \cdot \cos x = 0$.

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №3

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 18:10.

Решение нужно прислать ответным письмом не позже 18:40.

Может ли решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ быть равно нулю в квадрате $[2; 4] \times [2; 4]$ (включая границу) на плоскости (x, t) , и только в нём?

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №4

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 18:30.

Решение нужно прислать ответным письмом не позже 19:10.

При каких значениях параметра α задача

$$u_{ttt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$$

имеет в цилиндре $Q = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ нетривиальное классическое решение, стремящееся к нулю при $t \rightarrow +\infty$?

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №5

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 19:00.

Решение нужно прислать ответным письмом не позже 19:40.

При каких $n \in \mathbb{N}$ функция

$$u(x) = (\ln \|x\|)^{-30} \cdot \|x\|^{-4}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

принадлежит классу $H^{2020}(\|x\| < 0,5)$?

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №6

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 19:30.

Решение нужно прислать ответным письмом не позже 20:00.

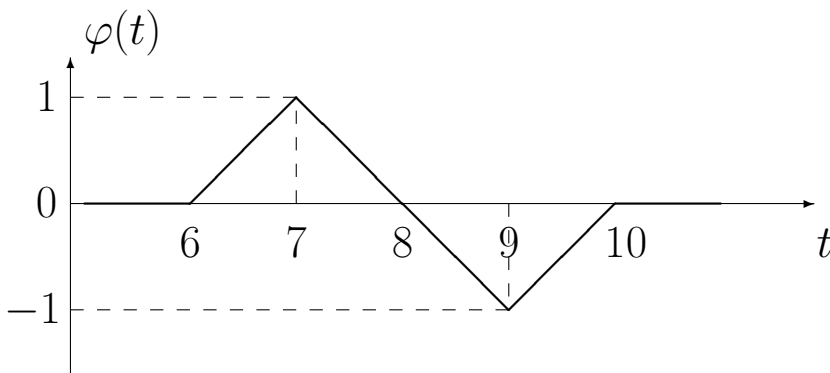
Рассмотрим задачу

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

$$u_x|_{x=0} = \varphi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ задана графиком:



- а)** При каких $t > 0$ тождество $u(x, t) \equiv 0$ выполняется для всех $x \in [0, 2020]$?
- б)** При каких $x > 0$ тождество $u(x, t) \equiv 0$ выполняется для всех $t \in [0, 2020]$?

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №7

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 19:50.

Решение нужно прислать ответным письмом не позже 20:30.

Дано уравнение $u_t = -u_x + b \cdot u$ (где $b = \text{const}$) с краевым условием $u(0, t) = u_0$ и начальным условием $u(x, 0) = u_0$, $t \geq 0$, $x \geq 0$. Для каждого $x > 0$ найдите $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$.