

# УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОЛИМПИАДА 2019

1. Найдите решение уравнения  $y'' - 5y' + 4y = \delta(2019x)$  из  $D'(\mathbb{R})$ .
2. При каких значениях  $\alpha$  любое классическое решение уравнения

$$u_{xx} + 5u_{xy} + \alpha u_{yy} = 0$$

является бесконечно гладким?

3. Решить при  $t > 0$  задачу Коши для уравнения колебания струны с начальными условиями

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x, & x \in [-1, 0), \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

4. Пусть  $u(x, y)$  — произвольная гладкая функция на квадрате  $\square = [0, 1] \times [0, 1]$ . Можно ли ее с любой степенью точности приблизить гармоническими в  $\square$  функциями?
5. Пусть  $u(x, t)$  — решение уравнения теплопроводности с краевыми и начальными условиями

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (0, T) \subset \mathbb{R}_{x,t}^2$$

$$u|_{x=\pm\pi/2} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \in C_0^\infty(-\pi/2, \pi/2).$$

Может ли решение  $u(x, t)$  удовлетворять условиям

- а)  $u(0, t) = 0$  при  $t \in [0, T]$ ;
  - б)  $u(0, t) = 0$  при  $t \in [0, t_0]$ ,  $u(0, t) = (t - t_0)^{10}$  при  $t \in [t_0, T]$ , где  $t_0 \in (0, T)$ ?
6. При каких  $A$  и  $B$  решение  $u(x, t)$  краевой задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0,$$

$$u'_x|_{x=0} = A, \quad u'_x|_{x=\pi} = B,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \in C_0^\infty([0, \pi])$$

ограничено при  $t \in (0, \infty)$ ?

7. При каждом  $\lambda \in \mathbb{R}$  найдите все  $u \in C([-1, 1]) \cap \{u(\pm 1) = 0\}$ , для которых выполнено соотношение

$$u'' + \lambda u \delta(x) = 0.$$

8. При каких  $\alpha \in \mathbb{R}$  задача Коши

$$u_t = \Delta u + \alpha \sqrt{|u|}, \quad u(x, 0) = 0$$

- а) имеет не менее двух ограниченных классических решений в полосе  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ ?
- б) имеет не менее двух ограниченных неотрицательных классических решений в полосе  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ ?