

**УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2015**

1. Найти решение уравнения $y'' + 4y = \delta'(x - 1)$ из $D'(\mathbb{R})$.
2. Найти общее решение уравнения $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - 2u_y = 0$.

3. Сколько решений имеет задача

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 1, \quad |x| < 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{|x|=1} = a + x_1^3 + x_2^5 + x_3^7$$

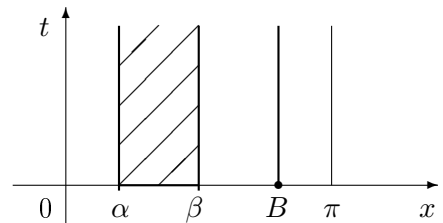
в зависимости от параметра a ?

4. Рассматривается задача в полуполосе $\Pi = (0, \pi) \times (0, \infty)$:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Может ли нетривиальное решение этой задачи быть равно нулю

- а) в полуполосе $(x, t) \in (\alpha, \beta) \times (0, \infty)$;
- б) на полупрямой $x = B, t > 0$?



5. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x) \geq 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \geq 0,$$

и известно, что $u(x, T) = 0$ при $|x| > 2015$ при некотором $T > 0$. Указать T_0 такое, что если $T > T_0$, то $u \equiv 0$, иначе, если $T < T_0$, то возможно нетривиальное решение $u \neq 0$.

6. Пусть

$$u_t = u_{xx} + \sin t, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Докажите, что существует $u_0(x, t)$ — периодическая по t функция, такая что $\|u(x, t) - u_0(x, t)\|_C \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

7. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи Коши

$$u_t = \Delta u + u, \quad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ — финитная функция. Может ли соответствующее решение $u(t, x)$ быть при некотором $t > 0$ финитной функцией?

8. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} = -u_t + u_{xx}, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = 0,$$

$\varphi(x)$ — финитная функция.

- а) Докажите, что $\int_{-\infty}^{\infty} [(u_x)^2 + (u_t)^2] dx \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

б) Имеет ли решение *передний фронт* или *задний фронт*?

9. Будет ли решение задачи

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция, непрерывно зависеть от начальных условий?

10. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция в \mathbb{R}^2 , $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)| dx < C$, где C не зависит от y . Верно ли, что $u \equiv 0$?

11. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа в равностороннем треугольнике T ,

$$u|_{l_1} = u|_{l_2} = 0, \quad u|_{l_3} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ — гладкая функция, $\varphi(0) = \varphi(B) = 0$. Докажите, что $|u(x, y)| \leq Cr^\alpha$, $\alpha > 1$, r — расстояние от точки A до точки (x, y) .

