

## Олимпиада по дифференциальным уравнениям

**Задача 1.** Решите уравнение  $(y')^2 - 2yy'' + 4y^2 = 0$ .

**Задача 2.** Существует ли при  $K = [0,1]$  и  $n > 1$  такое уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad t \in K, \quad a_1, \dots, a_n \in C(K),$$

что для некоторого его ненулевого решения  $y$  при  $t \in K$  имеет бесконечное число нулей:

а) сама функция  $y(t)$ ;

б) некоторая *нетривиальная* (т.е.  $(C_1, \dots, C_n) \neq (0, \dots, 0)$ ) линейная комбинация  $C_1y^{(n-1)}(t) + \dots + C_ny(t)$ ?

**Задача 3.** Верно ли, что задача Коши для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in G \subset \mathbb{R}^n, f \in C(\mathbb{R}^n); \\ x(0) = x_0, & f(x_0) \neq 0, \end{cases}$$

имеет хотя бы *локально* (т.е. в достаточно малой окрестности точки  $t = 0$ ) единственное решение:

а) при  $n = 1$ ;

б) при  $n > 1$ ?

**Задача 4.** Пусть фазовая кривая некоторого решения  $x_0$  системы

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2),$$

есть цикл,  *$\omega$ -предельный* (т.е. предельный при  $t \rightarrow +\infty$ ) для всех близко начинающихся фазовых кривых. Может ли тогда случиться, что решение  $x_0$ :

а) является асимптотически устойчивым;

б) не является устойчивым по Ляпунову?

**Задача 5.** Напишите дифференциальное уравнение, не зависящее от  $x$  напрямую, которому бы удовлетворяли все кривые второго порядка, и только они.

**Задача 6.** Сколько неограниченных решений, которые не входят в особые точки и не выходят из них, есть у системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{Re}[(x + iy)^4 - 1], \\ \dot{y} = \operatorname{Im}[(x + iy)^4 - 1]? \end{cases}$$

**Задача 7.** Опишите качественное поведение возможных орбит лёгкого спутника в поле тяжести планеты («первый закон Кеплера»), если бы в законе всемирного тяготения был бы не обратный квадрат, а обратный куб расстояния:

$$f(r) = -G \frac{Mm}{r^3}.$$

Иными словами — как выглядит движение небесных тел в четырёхмерном пространстве?

**Задача 8.** Рассмотрим уравнение

$$y^{IV} + q(x)y = 0,$$

где  $q(x)$  непрерывна,  $q(x) > 0$ .

Известно, что на некотором интервале  $(x_1, x_2)$  есть решение  $y_1$ , для которого выполнено:

$$y_1(x_1) = y_1'(x_1) = y_1''(x_1) = 0, \quad y_1'''(x_1) \neq 0, \quad y_1(x) \neq 0 \text{ на } (x_1, x_2).$$

Сколько нулей на интервале  $(x_1, x_2)$  может иметь произвольное решение  $y$  такого уравнения?