ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОЛИМПИАДА 2018

Задача 1. Верно ли, что для произвольной системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^{1+n}),$$

и для любого $r > 0$ существует интервал вида $(-\alpha, \alpha)$, где $\alpha > 0$, на котором определены сразу все решения x системы с начальными значениями $|x(0)| < r$? А верно ли, что для достаточно малого $r > 0$ все решения с начальными значениями $|x(0)| < r$ определены на интервале $(-r, r)$?

Задача 2. Решение $(x(t), y(t))$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3)/(|x^3| + |y^3|) \\ \dot{y} = (b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3)/(|x^3| + |y^3|) \end{cases} \qquad (a_i, b_i \in \mathbb{R})$$

за время $t \in [0,1]$ делает на фазовой плоскости ровно один оборот вокруг начала координат, причем $(x(0), y(0)) = 2(x(1), y(1))$. Докажите, что $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ при $t \to T$ для некоторого $T \le \infty$? Конечна ли длина фазовой траектории $(x(t), y(t))$ при $t \in [0, T)$. Конечно или бесконечно значение T?

Задача 3. Решить уравнение

$$y' = \frac{\operatorname{tg} y}{2x} - \frac{x}{\sin 2y}.$$

Задача 4. У квадратичного векторного поля на плоскости четыре невырожденных особых точки (других нет), три из которых узлы. Каков тип четвертой?

Задача 5. Всякий ли плоский ориентированный граф с гладкими ребрами можно "достроить"до гладкого векторного поля с особыми точками в вершинах?

Задача 6. Известно, что $A(t)$ — непрерывная матричная функция, причем для любого t собственные значения $A(t)$ действительны и не превосходят -1. Следует ли отсюда устойчивость нулевого решения линейной системы $\dot{x} = A(t)x$? Тот же вопрос при дополнительном предположении, что для любого t матрица $A(t)$– симметрическая.

Задача 7. Найти первые интегралы системы

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}.$$

Задача 8. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y''' & y^{\mathrm{IV}} & y^{\mathrm{V}} \\ y^{\mathrm{VI}} & y^{\mathrm{VII}} & y^{\mathrm{VIII}} \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 9. Существует ли решение задачи

$$y^{(2018)}(x) = y^{2018}(x) + x^{2018},$$

$$y(0) = y'(0) = ... = y^{(2017)}(0) = 1,$$

определенное на $[0, +\infty)$?

Задача 10. Пусть $y(x)$ – решение задачи

$$y''' + p(x)y = 0,$$

$$y(x_1) = y'(x_1) = 0, \;\; y''(x_1) > \;0.$$

с непрерывной положительной на $[x_0, \infty) \ni x_1$ функцией $p(x)$. Доказать, что $y(x)$ убывает на $[x_0, x_1]$.