ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2014

Задача 1. Имеется ли среди решений уравнения

$$y' + |y| + 1 = 0$$

такое, которое определено на всей числовой прямой?

Задача 2. Решить задачу Коши для уравнения

$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 4\,x + 4\,y} - x - 2\right)$$

с начальным условием

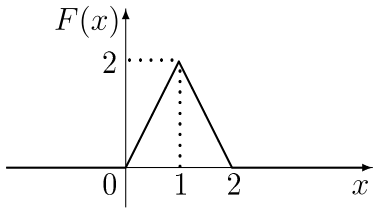
a) $y(-1) = 3$; b) $y(-2) = 1$.

Задача 3. Решить задачу Коши

$$y'' + 4\,y = F(x),$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

где

$$F(x) = 0,\quad x \in (-\infty,\,0] \cup (2,\,\infty);$$
$$F(x) = 2\,x,\quad 0 < x \le 1;$$
$$F(x) = 4 - 2\,x,\quad 1 < x \le 2.$$



Задача 4. Исследовать на устойчивость особые точки уравнения колебаний маятника, к которому приложен вращающий момент L

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\sin x = L, \qquad \text{где}\ \ |L| < b.$$

Задача 5. Зная функцию $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, нигде не равную нулю, найдите какую-нибудь функцию $g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ с определителем Вронского $W_{f,g}(t) \ne 0$, $t \in \mathbb{R}$, а также выпишите уравнение $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$, $p, q \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, которому удовлетворяют обе эти функции.

Задача 6. Для каких значений $n > 1$ некоторое ненулевое решение некоторого уравнения вида $y^{(n)} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на интервале $(0;1)$ при: а) $p, q \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$; б) $p, q \in \mathrm{C}(0;1)$?

Задача 7. а) Можно ли продолжить на $[0, \infty)$ решение задачи Коши

$$y'' = y^3,$$
$$y(0) = y_0 > 0,$$
$$y'(0) = y_1 > 0?$$

б) Существует ли заданное на $(-\infty, \infty)$ решение этого уравнения, не равное тождественно нулю?

Задача 8. Пусть функция $u(x)$ является решением уравнения

$$u(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x) - x\int_0^3 u(s)ds\right),$$

удовлетворяющим условию $u(0) = 3$.

Найти значение выражения

$$u(3) + \frac{47 - 19e^3}{5 - e^3}.$$

Задача 9. Найти множество поверхностей, ортогональных ко всем поверхностям следующего семейства:

$$z^2 - pxy = 0,$$

где p – вещественный параметр.

Задача 10. Для задачи Коши

$$y' = y^2 + \mu t y^4, \quad y(0) = 1 + \mu$$

найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.