ВЕРОЯТНОСТНАЯ ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА: НОВЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

В.Н.Тутубалин

Современная вероятностная финансовая математика — это обширная область науки, представляющая собой пример успешного применения методов математической физики к анализу динамики рыночных цен активов и хеджированию финансовых обязательств. В статье дается обзор некоторых важнейших результатов в этой области и возможностей их практических применений, использующий в качестве математического аппарата лишь базовое физико-математическое образование.

Stochastic Financial Mathematics: some new theoretical and applied possibilities

Modern probabilistic Financial Mathematics is a very large field of research which became an example of successful application of Mathematical Physics for the analysis of market price dynamics and contingent claims hedging. This paper is a review of some important results in this field and their practical possibilities. Only basic methods of Mathematical Physics are used in this exposition.

1 Общее введение.

Цель данной научно-методической статьи состоит в том, чтобы ознакомить широкие круги молодых ученых с одним современным направлением теории вероятностей и ее приложений. Речь идет о динамике рыночных цен на финансовых (и не только финансовых) рынках, о новых понятиях и методах, применяемых для исследования этой динамики и о ряде практических методик, которые могут быть здесь предложены или выработаны в будущем. Вообще говоря, применения математических методов к анализу тех или иных явлений экономики наталкиваются на значительные трудности. Это ведет к тому, что во многих вопросах соответствующие модели и методы могут дать лишь общую качественную ориентировку, а на количественное сопоставление с реальностью даже и не претендуют. В данном же случае речь идет об описании реальных явлений на совсем другом уровне: определенные практические рекомендации и/или прогнозы могут быть сопоставлены с действительностью на том уровне точности, который характерен для математической физики вообще. Речь не идет, конечно, о весьма высоком уровне точности фундаментальной физики, но получающийся уровень вполне сравним с тем, к чему мы привыкли в вопросах технической физики.

Подчеркнем, однако, что речь не идет о прогнозах будущих колебаний рыночных цен и о спекулятивной игре на повышение/понижение, связанной с такими прогнозами. Подобные прогнозы остаются за пределами возможностей современной науки, будь то математика, экономика, так называемый «технический анализ» или что-то другое. Может быть, они и принципиально невозможны. Поясним ситуацию с помощью следующего сравнения. Мы не в состоянии влиять на ход погодных явлений или хотя бы прогнозировать их на значительное время вперед (последнее считается принципиально невозможным из-за значительного влияния на будущую погоду малых возмущений в начальных условиях). Но мы можем построить дома, снабдить их устройствами отопления и даже кондиционерами и таким способом меньше зависеть от капризов погоды. Вот и в практических приложениях вероятностной финансовой математики речь идет о том, чтобы меньше зависеть от капризов будущей динамики рыночных цен. Впрочем, в отличие от погоды, в настоящее время могут обсуждаться и различные рекомендации, направленные на то, чтобы сделать развитие событий на рынке более плавным (но при этом не слишком стеснить необходимую динамичность рынка).

Современная финансовая математика разрабатывается во всем мире, а в России — главным образом, под руководством или значительным влиянием А.Н.Ширяева и его учеников и сотрудников (на кафедре теории вероятностей мехмата МГУ, в Математическом институте РАН, в Центральном экономико-математическом институте РАН и др.). Выпущена фундаментальная монография [1], которую в отношении самых современных результатов дополняет книга [2], а также большое количество журнальных статей и препринтов. На кафедре теории вероятностей организована актуарно-финансовая специализация студентов (примерно 20 человек ежегодно). Однако как литература (т.е., в частности, книги [1,2]), так и актуарно- финансовое образование на мехмате ориентируются на сравнительно тонкие и изысканные методы исследования, которым можно дать общее название «стохастического анализа». Между тем, для математической физики характерен такой процесс, когда результаты, первоначально полученные с помощью тонких математических методов, затем упрощаются и в таком виде становятся достоянием всего физико-математического сообщества. Вот об этом, в частности, и данная статья, которая не использует никакой математики, выходящей за пределы базового физико-математического образования. Более того, постепенно выясняется (как это и бывает обычно в математической физике), что более простой в математическом отношении подход является в некоторых вещах и более эффективным. Мы упоминаем также в данной статье о некоторых экспериментальных результатах, которые и определяют в конечном счете степень соответствия между теорией и фактами. Наконец, как всякое интенсивно развивающееся научное направление, вероятностная финансовая математика ставит массу теоретических и прикладных вопросов, в разработку которых могут при желании включиться молодые ученые. Причем в этой области новые разработки очень нужны и весьма доступны, потому что не существует особо глубоких физико-математических или экономических теорий, которые нужно было бы долго изучать, прежде чем получить научное право заниматься новыми исследованиями.

2 Детальное введение

Возникновение вероятностной финансовой математики датируется вполне точно: работа Л.Башелье [3] 1900 года. Башелье не имел ни предшественников, ни конкурентов, ни учеников, зато теперь (век спустя) имеет массу последователей: существует даже специальное «Общество Башелье», занимающееся вопросами вероятностной финансовой математики. Он сделал крупнейший принципиальный шаг, благодаря которому стали вообще возможны вероятностные исследования динамики цен. Однако (как это очень часто бывает с первооткрывателями) его взгляды частично ошибочны: развитие науки — это сложный процесс, в котором правильные взгляды вырабатываются коллективно. Поэтому взгляды Башелье лучше излагать, опираясь на другое крупнейшее достижение в совсем иной научной области, а именно на теорию Колмогорова локального строения турбулентности. Что же общего между динамикой рыночных цен и локальным описанием турбулентности?

Сопоставим мысленно два графика функций времени: график рыночных цен S_t какого-нибудь финансового актива, например, акций данной компании (но можно и цен товара, скажем, нефти) и график скорости v_t ветра в данной точке пространства (имеется в виду проекция скорости на выбранную ось координат). То и другое хаотически колеблется и для описания вида графика напрашиваются слова «случайный процесс». Но в применении к любому из двух графиков эти слова научно одинаково бессмысленны. Ведь теория вероятностей занимается такими явлениями, которые можно много раз повторять, причем статистические свойства одинаковы при различных повторениях. Стало быть, о случайном процессе можно говорить тогда, когда реализации этого процесса можно наблюдать много раз, причем статистические свойства реализаций от опыта к опыту не меняются. Но как повторить такую функцию времени, какой является рыночная история данного актива? Ведь со временем цены явно меняются. И как повторить реализацию скорости ветра? Этому помешают изменяющиеся погодные условия.

Выход состоит в том, что в обоих случаях переходят к приращениям: берут какой-нибудь относительно небольшой отрезок времени h и рассматривают величины

$$\Delta S_t = S_{t+h} - S_t, \Delta v_t = v_{t+h} - v_t. \tag{1}$$

Разностей вида (1) существует много, и можно предполагать (и экспериментально проверять), что они обладают устойчивыми (при сдвиге времени t и неизменном h) статистическими свойствами. В первом случае (финансового актива) получается теория Башелье, а во втором случае (скорости ветра) теория турбулентности Колмогорова. Однако никак не следует забывать, что крупномасштабные, но медленные во времени изменения при взятии приращений обращаются в нуль, и тем самым исключаются из дальнейшего вероятностного анализа. За большое же время именно эти крупномасштабные изменения (т.е. в случае цен — макроэкономика, а в случае ветра — погода) и оказывают определяющее влияние на динамику рассматриваемых показателей. Теория Башелье и теория Колмогорова — это теории мелких и быстрых флюктуаций, а не теории поведения процессов в целом, чего до конца не понимал Башелье, ну а мы понимаем только потому, что можем сопоставить с трактовкой Колмогорова для совершенно другого явления.

Впрочем, надо сказать, что для рыночных цен акций стационарность приращений во времени значительно улучшается, если сделать простую замену переменной: вместо самих S_t рассмотреть $\ln S_t$. (Это, с одной стороны, понятно теоретически, так как для рыночного спекулянта важны не абсолютные, а относительные приращения цен, а с другой стороны, подтверждается экспериментально.) Таким образом, в настоящее время основным объектом теории являются логарифмические приращения

$$\Delta_h \ln S_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t. \tag{2}$$

Заметим, что на небольших интервалах времени (когда относительные колебания рыночных цен не превышают 10 — 20 %), логарифмическая замена несущественна, потому что при таких масштабах изменения цен логарифмическая функция практически не отличается от линейной. В таких случаях подход Башелье вполне сохраняет научное значение. Но легко убедиться на опыте, что на интервалах времени порядка нескольких лет, когда цены акций изменяются в разы, логарифмическая замена значительно улучшает стационарность распределений. Заметим, что логарифмическая замена относится лишь к акциям, а что именно следует делать, скажем, при изучении колебаний курсов облигаций на вторичных торгах — недостаточно хорошо известно.

Чтобы составить себе представление о предмете исследования финансовой математики, рекомендуется сейчас обратиться к иллюстрациям. На рис. 1 приведены графики цен двух американских компаний (в долларах за акцию). (Это ежедневные цены закрытия торгов, т.е. последней сделки за данную биржевую сессию.) На рис. 2, 3 приведены графики ежедневных (т.е. при $h = 1$ день) логарифмических приращений курсов. На рис. 1 представлено некое драматическое событие. Сначала акции компании II стоили дешевле, чем акции компании I, но зато росли в цене столь быстро, что в октябре 1993 года цены сравнялись. Значит, казалось бы, инвестор, вложивший деньги в акции I, должен был бы их в этот момент продать и вложить деньги в акции II. Но, видя дальнейший ход цен, мы понимаем, что это было бы ужасной ошибкой. А если бы мы анализировали только графики приращений, представленные на рис.2,3 то могли бы мы спрогнозировать в октябре 1993 года дальнейший ход событий? Очевидно, нет. Переход к разностям начисто лишает возможности долгосрочного прогноза. Зато графики разностей на рис. 2, 3 напоминают графики стационарного белого шума (для искушенного в математической статистике взгляда — не совсем стационарного, и это «не совсем» и определяет постановку теоретических и прикладных проблем, о которой см. ниже).

Многочисленные статистические исследования приводят к тому выводу, что в первом приближении разности (2) все-таки приблизительно стационарны во времени, а главное - статистически независимы (если брать разности на непересекающихся отрезках времени). Почти однозначно это приводит к модели броуновского движения для логарифмических разностей. Именно, приращения (2) должны иметь нормальное распределение с параметрами следующего вида:

$$\mathbf{E}\Delta_h \ln S_t = ah, \mathbf{D}\Delta_h \ln S_t = \sigma^2 h, \tag{3}$$

где a и σ — некоторые постоянные величины (т.е. не зависящие от t, h, S_t). (Здесь и далее $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание, $\mathbf{D}$ — дисперсию.) Эта модель цен (броуновское движение для логарифма) носит для самих цен название модели *геометрического* броуновского движения. (Ее предложили сначала Осборн, а затем Самуэльсон в 50-х годах XX века.) За истекшее время были предложены многочисленные уточнения и улучшения этой модели, однако автор данной статьи ко всем этим уточнениям относится скептически, считая, что главный вопрос в неполной стационарности логарифмических приращений во времени, которую не следует маскировать от самих себя, прибегая к распределениям, более сложным, чем нормальное. Наоборот, мониторинг этой нестационарности является важным средством получения информации о текущем состоянии рынка, а быть может, и для каких-то действий.

Хотя модель геометрического броуновского движения очень проста, на практике не все просто с оценкой ее параметров. Параметр сноса a вообще не оценивается надежно по наблюдениям за динамикой цен активов (для одного и того же актива, но на разных участках времени получаются числа, близкие к нулю, причем нередко разных знаков). Поэтому в основном определении модели (3) нежелательно использование понятия дисперсии: оценка дисперсии требует предварительной оценки среднего. Предлагается несколько изменить определение *волатильности*, т.е. параметра σ, постулировав равенство

$$\mathbf{E}(\Delta \ln S_t)^2 = \sigma^2 h. \tag{4}$$

В терминах колмогоровского понятия процесса со стационарными приращениями это равенство (4) означает, что постулируется простейший (линейный) вид структурной функции процесса $\ln S_t$. Для цен акций такой вид структурной функции, в общем, подтверждается в широком интервале значений h: от десятков минут до десятков дней. Подтверждение, правда, получается довольно скромным, потому что в процесс оценки структурной функции по наблюдениям вмешивается нарушение статистической однородности, но все-таки увидать что- либо отличное от линейности (по мнению автора) невозможно.

По аналогии с физическим броуновским движением, для которого коэффициент диффузии σ^2 линейно зависит от абсолютной температуры среды, предлагается называть квадрат волатильности *температурой* финансового актива. По наблюдениям оценивается именно температура (по среднему значению квадрата приращения). При некотором опыте глазомерной оценки немало информации можно извлечь из кривой кумулятивной температуры, которая определяется как сумма

$$\sum_{t=0}^{T-h} (\Delta_h \ln S_t)^2, t = 0, h, \ldots, T-h. \tag{5}$$

Выражение (5) рассматривается как функция от T. По наклону графика кумулятивной температуры можно оценивать текущую температуру актива. Если бы температура (волатильность) была постоянной, то (в силу закона больших чисел) кумулятивная температура представляла бы собой почти прямую линию. Увеличение или уменьшение наклона (оцениваемое на глаз) говорит об изменении температуры актива. Две таких кривых, отвечающих данным рис. 1 и 2,3 приведены на рис. 4. В грубом приближении они похожи на прямые линии, причем температура актива II явно выше, чем температура актива I. На обоих графиках имеются и заметные отклонения от прямолинейности. (В статистической значимости этих отклонений проще всего убедиться путем моделирования накопленных температур методом Монте-Карло при заведомо постоянной волатильности: при этом условии получаются графики, гораздо более близкие к прямым линиям.)

Каковы же практические применения изложенной модели геометрического броуновского движения? Если локальная теория с самого начала объявляется непригодной для долгосрочных прогнозов (и тем самым — спекуляций), то что можно сказать о краткосрочных прогнозах? Для приращений логарифма цены предлагается модель нормального распределения с практически нулевым средним и с дисперсией, равной правой части (4). Но это означает, что повышение и понижение цены за время от t до $t+h$ одинаково вероятны. Таким образом, сколько-нибудь надежная прибыльная спекуляция объявляется невозможной. Забавное обстоятельство заключается в том, что хотя работа Башелье и называется «Теория спекуляции», но вся концепция принципиально исключает саму возможность спекуляции. Например, вероятностная теория азартных игр говорит нам следующее. Подсчитайте математическое ожидание Вашего выигрыша. Как правило, Вы убедитесь в том, что оно равно нулю или даже отрицательно. В этом случае и не пытайтесь играть: скорее всего, игра будет для Вас разорительной.

Что же — не пытаться спекулировать на финансовом рынке? Это не совсем правильно. Всем известно, что в деятельности рынка бывают довольно длительные хорошие периоды, когда все цены, в общем, растут, спекулянты богатеют и все довольны. Бывает и наоборот: цены падают. Но можно разбогатеть и на падающем рынке, если заранее предвидеть падение. И вот, никакая наука, в том числе и вероятностная финансовая математика, не в силах предвидеть, что будет: рост или падение. Мы рассматриваем некое нулевое приближение, в котором нет ни роста, ни падения. Что же оно может дать практически?

В спекуляции вовлечены не только отдельные спекулянты, но и финансовые фирмы, например, банки. Разорение банка из-за неудачных финансовых спекуляций — весьма нежелательное событие ввиду интересов его вкладчиков. Рассматривается вопрос об обязательных банковских резервах, которые должны компенсировать потери банка (в нормальных, конечно, рыночных условиях, вне каких-то особых финансовых кризисов). Именно, вводится понятие величины риска (Value at Risk, Var), которое представляет собой такие максимальные потери, которые могут случиться за один день из-за рыночных колебаний цен с заданной небольшой вероятностью, например, 0.05. Рассмотрим пример. Пусть средства банка вложены лишь в один финансовый актив с волатильностью σ, положим $h = 1$ день. Тогда вероятность относительных потерь за один день, худших, чем $(-1.645\sigma\sqrt{h})$ составляет как раз 0.05 (при нормальном распределении для приращения логарифма). Это означает, что при $\sigma = 0.02$

$$Var = 0.0329 = 3.29\%$$

от капитала, вложенного в актив. Предлагается законодательно установить, чтобы банк вывел 3VaR (или даже 4VaR) из активной спекуляции (это будет около 10% или 12% капитала) и перевел эти деньги в достаточно надежный резерв. (Это не столько обеспечивает надежность банковских резервов, потому что ведь бывают глобальные финансовые кризисы, против которых подобные резервы бессильны, сколько стимулирует банки к вложениям в менее рискованные активы.) Ну а для специалистов, владеющих вероятностными методами (здесь достаточно базового физико-математического образования), это создает рабочие места в банках. Ведь по той причине, что волатильность меняется, не очень понятно, как именно ее следует оценивать. А может быть, следует пользоваться распределением, отличным от нормального? Например, в работах группы Эберляйна (см., например, [4]), предлагается гиперболическое и обобщенное гиперболическое распределения, выражающиеся через бесселевы функции и зависящие от четырех-пяти параметров. Даст ли банкам какую-нибудь выгоду такая сложность? (В смысле уменьшения количества денег, выводимых в резерв.) На этот вопрос нет ответа. А если средства банка вложены не в один актив, а в несколько? И среди этих активов есть как сравнительно мало волатильные акции, так и весьма волатильные производные ценные бумаги (фьючерсы, опционы, долговые обязательства под залог ценных бумаг и т.д.). Как в таком случае вычислять VaR? Заметим, что законодательный проект, о котором идет речь, требует от банка, чтобы он не просто вычислял VaR и формировал резерв, но чтобы он еще подтвердил правильность вычисления VaR статистическим анализом опытов вычисления этой величины по прошлому опыту деятельности банка. (Доля тех дней в прошлом, когда потери фактически превышали вычисленную на этот день величину риска, должна быть достаточно близка к 0.05.)

Таким образом, знание лишь того, что в этой статье изложено выше, создает (в принципе) достаточные возможности трудоустройства на хорошую зарплату для любого физика или математика, который пожелал бы заняться вопросами, связанными с VaR. И это на тривиальном уровне модели геометрического броуновского движения. Вообще, ввиду тривиальности независимых приращений, вероятностная финансовая математика выглядит как некоторый сильно тривиализованный вариант колмогоровской теории турбулентности. (Нет, например, «закона двух третей» для структурной функции или соответствующего закона для спектральной плотности.) И это было бы, в самом деле, справедливо, если бы в финансовой математике не было открыто некое совершенно новое явление, которого (насколько известно автору) нет ни в одной другой области приложений методов математической физики, даже в теории оптимального управления, к которой оно в известном смысле близко. Речь идет о хеджировании опционов и вообще финансовых обязательств с отсроченным исполнением, к чему мы и переходим.

3 Опционы и их хеджирование

Опцион — это одна из разновидностей контракта с отсроченным исполнением. Приведем пример. Эмитент (продавец опциона) и инвестор (его покупатель) могут договориться сыграть в следующую азартную игру, в которой датчиком случайности (т.е. источником азарта) является будущая динамика цен. В момент времени $t = 0$ эмитент продает, а инвестор покупает за некоторую цену c (это так называемая «начальная» цена опциона) определенную ценную бумагу (она и есть опцион). Эта бумага дает право инвестору получить в некоторый будущий момент времени $t = T$ доход, равный некоторой функции $f(S_T)$, уплачиваемый эмитентом в момент T. (Здесь S_T — цена актива в момент T, на которую, таким образом, делается ставка.) В частности, очень популярны две следующие функции выплат:

$$1) f(S_T) = (S_T - K)^+, 2) f(S_T) = (K - S_T)^+. \tag{6}$$

Первая функция в (6) интерпретируется как право инвестора купить акцию в будущий момент времени T по заранее оговоренной цене K (это так называемая «цена исполнения» или «страйк-цена» опциона; нередко принимается, в частности, $K = S_0$.) Именно, если оказывается, что $S_T > K$, то инвестор исполняет опцион, покупает акцию по цене K и тут же продает ее на рынке по цене S_T, от чего и возникает доход $(S_T - K)^+$. Если же оказывается, что $S_T < K$, то инвестор отказывается от сделки, т.е. не исполняет опцион. («Опцион» и означает право такого выбора.) В этом последнем случае цена опциона c идет в карман эмитента. (Но последнее только в классическом варианте игры, когда эмитент ничего не знает о хеджировании. Если же он хеджирует, то ему в любом случае не достается ничего: см. ниже.)

Вторая функция выплат интерпретируется как право инвестора продать акцию по заранее оговоренной цене. (Имеется в виду страхование от падения цены акций.) Первый опцион называется опционом покупателя (option-call), а второй - опционом продавца (option-put). Каждый из них в тех или иных условиях может быть средством страхования или спекуляции, или применяться для каких-то иных целей. Разберем простейший пример применения опциона-колл для спекуляции.

Начальная цена опциона-колл может быть (как мы увидим ниже) совсем небольшой. Разберем типичный случай значений параметров: $T = 100$ дней, страйк-цена $K = S_0$, дневная волатильность 0.02 (т.е. при $h = 1$ день величина $\sigma\sqrt{h} = 0.02$). В этом случае знаменитая цена Блэка-Шоулса примерно равна $0.1S_0$ (она несколько зависит от принимаемой величины банковского процента). Допустим, что за 100 дней цена акций возросла на 50%: $S_T = 1.5S_0$. Тогда доход инвестора в момент Т составит $0.5S_0$, а за вычетом начальной цены $0.1S_0$ прибыль за 100 дней составит $0.4S_0$, или 400% по отношению к начальному вложению капитала. Если бы инвестор спекулировал на акции, вложив с самого начала S_0, то его доход составил бы всего 50% по отношению к начальному вложению. Как же можно удержаться от покупки опциона?!

(Действительно, ценные бумаги, и среди них опционы, являются мощным средством для достижения некоего макроэкономического идеала. А состоит этот идеал в том, что все работают очень много и зарабатывают тоже очень много, но живут впроголодь, потому что все деньги вкладывают в ценные бумаги. Экономика же за счет этих вложений бурно развивается.)

Но пока непонятно главное: как может эмитент опциона согласиться продать его за $0.1S_0$, если ему, возможно, придется потом выплатить впятеро больше. Ответ заключается в том, что это возможно за счет хеджирования опционов. Само явление хеджирования было неизвестно Башелье (хотя у него тоже есть опционы с несколько иными функциями выплат). Оно было открыто около 1970 года Блэком, Шоулсом и Мертоном. Справедливости ради надо отметить, что это открытие было сделано в математико-экономической школе Самуэльсона, хотя и не им самим. В настоящее время понятно, что мы и в данном случае имеем дело с таким известным в математической физике явлением, когда некоторая окончательная формула оказалась умнее тех предпосылок, из которых она была выведена (в том смысле, что она действует и при нарушении предпосылок). Ну и конечно, математическому выводу придается некая упрощенная форма, которую мы постепенно и приведем.

В рассматриваемой модели участвует еще банковский вклад, единица которого (бона) имеет цену

$$B_t = \exp(rt), B_0 = 1, \tag{7}$$

где r в формуле (7) — показатель банковских процентов. Счет денег удобно вести в бонах. Хеджирование состоит в том, что эмитент опциона (теперь он называется хеджером) не сидит сложа руки, получив в момент $t = 0$ начальную цену опциона, а употребляет этот капитал для рыночных операций, покупая или продавая основной актив (на который продан опцион) в некоторых предписываемых теоретическими формулами количествах. Начальная цена опциона плюс часть банковского вклада хеджера непрерывно перекачивается между акциями и бонами. Теория учит, как это перекачивание сбалансировать таким образом, что в каждый момент $t, 0 \le t \le T$ суммарный капитал хеджера (вложенный в акции и боны) в точности равнялся цене опциона $v(t, S_t)$ в тот самый момент t. Сначала рассмотрим, как вычисляется цена $v(t, S_t)$.

Уже говорилось, что параметр сноса a для броуновского движения логарифма цены не удается оценить по фактическим данным. В теории хеджирования предлагается следующим способом восполнить этот пробел. Примем, что средняя скорость роста цены актива равна скорости роста банковского вклада:

$$\mathbf{E}(S_t|S_0) = S_0 \exp(rt). \tag{8}$$

В силу логнормального закона для S_t соотношение (8) эквивалентно равенству

$$a + \sigma^2/2 = r. \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) также эквивалентны условию, что дисконтированные цены акций S_t/B_t образуют мартингал. Основные результаты о хеджировании могут быть выведены из теорем о разложениях мартингалов, о чем см. [1]. Но в данной работе мы стохастическим анализом вообще и разложениями мартингалов в частности не пользуемся. Однако читателю не мешает знать, что та мера, по которой вычисляется цена опциона путем взятия математического ожидания, носит название «мартингальной».

Никто не утверждает (это и фактически неверно), что реальная динамика цен такова, что параметры броуновского движения для логарифма цены удовлетворяют мартингальному равенству (9). Но цену опциона $v(t, S_t)$ все-таки предлагается вычислить с помощью (9) как математическое ожидание выплаты по нему в момент $t = T$, дисконтированной к моменту t. Именно, положим

$$v(t, s) = \mathbf{E}[\exp(-r(T-t))f(S_T)|S_t = s]. \tag{10}$$

При явно заданной функции выплат (например для опционов-колл и -пут) выражение (10) можно вычислить в явном виде. (Читателю рекомендуется познакомиться с этой классической формулой Блэка-Шоулса, например, с помощью [1].) Но мы не будем пользоваться явным видом: для понимания ситуации, сложившейся к настоящему моменту в теории хеджирования, важно увидеть, что основной результат может быть выведен не из явного вида формул, а лишь из уравнения в частных производных, которому удовлетворяет цена (10).

Это то уравнение, которое математики всего мира называют уравнением Колмогорова, а сам А. Н. Колмогоров всегда называл уравнением Фоккера-Планка. В математической форме оно появилось в известной работе Колмогорова «Об аналитических методах теории вероятностей» (1931). Тут есть небольшая историческая подробность. В 1957 году автор данной статьи слушал лекции А. Н. Колмогорова по теории случайных процессов, в которых, в частности, это уравнение было переписано в несколько более удобных обозначениях (по сравнению с указанной работой 1931 года). Это место курса потом было воспроизведено вместе с обозначениями в учебнике [5]. Поскольку в [5] вывод уравнения делается прямо из определения марковского диффузионного процесса, возможно, что для некоторых читателей это изложение окажется наиболее удобным. Формально в [5] рассматривается случай, когда в формуле (10) $r = 0$, но тот же вывод годится и при любом r. Возникает следующее уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rs\frac{\partial v}{\partial s} + (1/2)\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - rv = 0. \tag{11}$$

Начальное условие следующее: $v(T, s) = f(s)$. Понятно, что начальная цена опциона c задается формулой $c = v(0, S_0)$.

Каким же образом формула (10) оказывается умнее тех предпосылок, из которых она выведена? Во-первых, выше несколько раз отмечалось, что на описание динамики цен в целом геометрическое броуновское движение претендовать не может. Но время действия опциона T мы никак не ограничиваем заранее: это может быть и несколько лет. Таким образом, цена (10) может и не иметь ничего общего с фактической выплатой по опциону. Далее, математическое ожидание в (10) берется по мартингальной мере, в то время как в среднем акции все же растут быстрее, чем банковский вклад. Однако все-таки выражение (10) с хорошим приближением годится в качестве цены опциона, если под ценой опциона понимать не ту (дисконтированную) выплату, которая может быть по нему получена инвестором (покупателем опциона), а ту цену, за которую его эмитент (продавец, хеджер) может хеджировать свое обязательство по опциону таким образом, что уж если по нему придется платить, то эта выплата будет не из кармана хеджера, а за счет рыночной стихии (т.е. за счет динамики рыночных цен). (В этой теории как покупатель, так и продавец опциона предполагаются бесконечно малыми в сравнении с рынком: их действия на рыночные цены не влияют.)

Математическое утверждение состоит в том, что если динамика цены актива задается геометрическим броуновским движением (с любым a, а не только с таким, которое удовлетворяет (9)), а хеджирование производится в непрерывном времени, то существует такой хеджирующий самофинансируемый портфель (т.е. стратегия перевода бон в акции и акций в боны в соответствии с наблюдаемой динамикой цен акций), что его капитал в любой момент времени t равен цене опциона (10). (При условии, что начальный капитал портфеля равен начальной цене опциона.) Прежде чем наметить математическое доказательство существования такого портфеля, обсудим экономическое значение этого утверждения.

Что это означает в тот момент T, когда для хеджера наступает момент расплаты? В этот момент $v(T, S_T) = f(S_T)$, т.е. у хеджера ровно столько денег, сколько нужно заплатить инвестору, он их выплачивает, а сам остается с нулевой прибылью (но и без потерь). Таким образом, в теории для инвестора все кончается таким же образом, как если бы он ничего не делал (не продавал бы опциона и не хеджировал, а просто держал свои боны в банке). Это существенное ограничение всей теории: она говорит, что если уж вы решили выпустить опцион, то хеджируйте его, как положено по теории, и в результате останетесь без прибыли и без потерь. Но теория не выясняет, зачем и при каких обстоятельствах следует выпускать опционы. Казалось бы, здесь имеется тот ход, что опцион можно продать дороже, чем полагается по цене (10). Но и это запрещает теория: в этом случае при любых обстоятельствах хеджер имел бы положительную прибыль. Это называется арбитражем, а в теории он невозможен. Имеется еще более <изящный> теоретический ход. Дело в том, что если покупатель опциона просто выплатит цену опциона, и дальше будет ждать момента исполнения, ничего не делая, то он ведь может понести потери: ничего не получить по опциону или получить меньше, чем он заплатил. Нетрудно понять, что поступая зеркально симметрично действиям хеджера (продавца), покупатель может хеджировать свои потери. В этом случае оба участника игры (при любой возможной динамике будущих рыночных цен) ничего не получат и ничего не потеряют, как если бы они вовсе ничего не делали. Это такой вариант теоретического «рыночного равновесия», который говорит рыночным дилерам следующее. «Лучше всего вовсе не торговать. Но если вы не можете освободиться от вашей пагубной страсти к торговле, то торгуйте так, как учит теория. Вы удовлетворите свою страсть, а результат будет таким, как если бы вы вовсе не торговали.» (Все это говорится для того, чтобы читатель с физико- математическим образованием мог оценить ту склонность к театру абсурда, которой обычно грешат экономические теории от Маркса до Мертона.) Возможность хеджирования — это замечательное теоретическое открытие, но само по себе оно еще недостаточно для каких-либо практических применений: оно может входить как часть в тот или иной реальный сценарий. Например, это может быть сценарий страхования, когда страховое возмещение выплачивается не деньгами, а акциями. Чистая премия подсчитывается, исходя из возможности хеджирования, а на самом деле страховая компания берет премию с нагрузкой. (Этой возможности нагрузки на чистую премию не запрещают соображения отсутствия арбитража, да и конечно, не только на страховом, но и на реальном финансовом рынке на самом деле арбитраж вполне возможен.)

Понимая теперь, что хеджирование — это еще не практика, а только ее важная составная часть, рассмотрим теперь математически, в чем же оно состоит. Мы упомянули самофинансируемость портфеля. Для того, чтобы определить это понятие в случае непрерывной во времени рыночной торговли, нужно кое-что из стохастического анализа, которого мы здесь избегаем. Кроме того, непрерывная во времени торговля практически нереализуема, и поэтому нужно отправляться от дискретной схемы, допуская лишь, что временной шаг h между отдельными операциями достаточно мал (а в математической схеме — стремится к нулю). В дискретной схеме самофинансируемость совершенно понятна: никаких внешних источников доходов (или необходимости потребления капитала) для хеджера не существует, а только боны превращаются в акции или обратно по той цене, какая есть на рынке в момент совершения сделки. Некоторое затруднение связано с тем обстоятельством, что при дискретном хеджировании точное воспроизведение цены опциона самофинансируемым портфелем невозможно, и речь об этом ведется лишь в пределе, когда $h \to 0$.

Выясним сначала, каким должно быть количество акций в портфеле хеджера, который хотя бы приближенно воспроизводит цену опциона. Пусть портфель имеет вид

$$X_t = \gamma_t S_t + \beta_t B_t,$$

где γ_t — количество акций, а β_t — количество бон в портфеле. Поскольку от момента t до момента $t+h$ никакие операции не производятся, то в момент $t+h$ капитал портфеля (того же состава, что и в момент t) примет значение

$$X_{t+h} = \gamma_t S_{t+h} + \beta_t B_{t+h}.$$

Следовательно,

$$\Delta X_t = X_{t+h} - X_t = \gamma_t \Delta S_t + \beta_t \Delta B_t.$$

С другой стороны,

$$\Delta v(t, S_t) = v(t+h, S_{t+h}) - v(t, S_t) = (\partial v/\partial t)h + (\partial v/\partial s)\Delta S_t + \cdots,$$

где многоточие заменяет члены второго порядка по приращениям времени h и цены актива S_t. Но так как приращение цены актива имеет порядок величины $\sqrt{h}$, то воспроизведение цены опциона капиталом портфеля возможно лишь при условии совпадения главных членов в двух приращениях: приращении капитала портфеля и приращении цены опциона. Иными словами, должно быть

$$\gamma_t = \gamma_t^* = (\partial v/\partial s)(t, S_t).$$

Мы получили классическое правило дельта-нейтрального хеджирования по Блэку- Шоулсу (пока в качестве лишь необходимого условия).

Наметим доказательство достаточности. Пусть портфель хеджера имеет вид

$$X_t = \gamma_t^* S_t + \beta_t B_t, X_0 = v(0, S_0). \tag{12}$$

Понятно, что эволюция количества бон B_t однозначно определяется начальным капиталом портфеля, количеством акций в нем и условием самофинансируемости. Действительно, пусть состав портфеля определен вплоть до момента t, а затем наступает следующий момент времени $t+h$. В этот последний момент времени мы перераспределяем капитал между акциями и бонами, однако из-за самофинансируемости общий капитал портфеля при этом не меняется, т.е. должно выполняться равенство

$$X_{t+h} = \gamma_t^* S_{t+h} + \beta_t B_{t+h} = \gamma_{t+h}^* S_{t+h} + \beta_{t+h} B_{t+h},$$

откуда

$$\Delta\beta_t = \beta_{t+h} - \beta_t = -\Delta\gamma_t^* S_{t+h}/B_{t+h}. \tag{13}$$

Уравнением (13) для приращений и определяется эволюция количества бон в портфеле (12), а следовательно, полностью определяется и сам портфель, который автоматически является самофинансируемым.

Доказательство достаточности заключается в том, что портфель (12) сравнивается с другим портфелем, который автоматически воспроизводит цену опциона (но, строго говоря, в точности самофинансируемым не является). Мы определяем его так, что его общий капитал $X_t^* = v(t, S_t)$, а количество акций в портфеле — то же самое γ_t^*. Таким образом, количество бон в этом портфеле, по определению, равняется

$$\beta_t^* = [v(t, S_t) - \gamma_t^* S_t]/B_t. \tag{14}$$

Мы доказываем, что при стремлении к нулю временного шага h оба портфеля X_t и X_t^* сближаются, для чего достаточно доказать, что разность между количествами бон (называемая нами *дисбалансом* $D(t)$) удовлетворяет (в смысле сходимости по вероятности) соотношению

$$D(t) = \beta_t - \beta_t^* \to 0. \tag{15}$$

С помощью формулы Тейлора и уравнения Колмогорова (11) производится следующее вычисление. Положим $\delta_t = \ln(S_{t+h}/S_t)$ и допустим, что эта величина имеет порядок величины $\sqrt{h}$. (Как это должно быть в модели геометрического броуновского движения, но при данном вычислении никакие вероятностные предположения не используются.) Вычислим, используя (13), (14) и (15), приращение $\Delta D(t)$ дисбаланса с точностью до членов порядка h, δ_t, δ_t^2, т.е. пренебрегая членами порядка $o(h)$. Получается в конце концов следующий ответ:

$$\Delta D(t) = -\frac{1}{2}\frac{S_t^2}{B_t}\times$$

$$\times \frac{\partial^2 v(t, S_t)}{\partial s^2}(\delta_t^2 - \sigma_t^2 h) + o(h). \tag{16}$$

Чтобы формула (16) могла быть основой математического доказательства, могут делаться те или иные дополнительные предположения. Например, если предположить, что функция выплат по опциону f является гладкой и ограниченной, то гарантируется существование и ограниченность второй производной $\partial^2 v/\partial s^2$. Если предположить дополнительно, что при $t = 0, h, \ldots, T - h$ выполняется оценка $|\delta_t| \leq C_1\sqrt{h}$, то остаточный член $o(h)$ в (16) допускает оценку вида $|o(h)| \leq C_2 h\sqrt{h}$. Следовательно, при вычислении дисбаланса $D(t)$ путем суммирования разностей (16) можно пренебречь остатками $o(h)$, поскольку число слагаемых в сумме не превосходит $T/h = O(1/h)$. (Возможны и гораздо более слабые предположения при доказательстве теорем типа предельных теорем теории вероятностей.)

Таким образом, в тех или иных предположениях вопрос об обосновании (15) может быть сведен к вопросу о сходимости к нулю суммы лишь главных членов выражения (16). Такая сумма зависит от принятого при вычислении цены опциона (10) значения волатильности σ. В реальности волатильность оценивается по поведению рыночных цен в прошлом, т.е. до момента продажи опциона $t = 0$. А в формуле (15) участвуют будущие значения величин δ_t, т.е. при $t > 0$. Все зависит от того, равна ли будущая волатильность прошлой, т.е. насколько точно выполняется равенство $\mathbf{E}\delta_t^2 = h\sigma^2$.

Если это равенство выполняется вполне точно, то математическое ожидание главного члена в (16) равно нулю (так как S_t и δ_t статистически независимы). Дисперсия суммы этих главных членов равна сумме дисперсий, а дисперсия каждого слагаемого оценивается величиной $C_3\mathbf{D}\delta_t^2$, т.е. имеет порядок величины h^2. Следовательно сумма дисперсий таких слагаемых в числе T/h стремится к нулю, и мы получили доказываемую сходимость (15).

Однако никакое математическое доказательство не может убедить нас в том, что при хеджировании на реальном рынке в самом деле будут получаться малые значения дисбалансов. (Потому что нет возможности теоретически обосновать выполнение для реальных данных тех или иных условий математических теорем.) Как известно (это, кажется, впервые сказал Милликен при получении Нобелевской премии), математическая физика имеет две ноги - теорию и эксперимент. Необходимо проведение имитации хеджирования опционов по реальным данным о ценах. Сведения о таких экспериментах публикуются, например, в [6]. Вкратце они сводятся к тому, что типичный дисбаланс в реальных опытах хеджирования составляет величину порядка 10 — 20 % от начальной цены опциона. Кроме того, главный член формулы (16), как правило, уже при разумной (но не бесконечно малой) величине шага по времени $h = 1$ день обычно дает неплохое приближение для точного значения приращения дисбаланса. Впрочем, из того и другого правила имеются исключения: суммарный дисбаланс $D(T)$ может достигать больших величин (порядка двух и даже трех начальных цен опциона), а главный член (16) давать плохое приближение. Но такие случаи редки (порядка 1% из тех 3000 экспериментов хеджирования, о которых сообщается в [6]). Главной причиной довольно значительных типичных дисбалансов (порядка десятков процентов) является неточное знание будущей волатильности, которая на самом деле зависит от времени. Если в качестве волатильности использовать значение, получаемое по будущим данным (что на практике невозможно, но в имитациях по данным о прошлых ценах вполне возможно), то типичная величина дисбалансов сокращается в четыре-пять раз.

Получаемую точность вполне можно сравнивать с точностью технической физики. Например, в начале статьи упоминалось о жилищах, в которых можно установить систему отопления, чтобы не зависеть от капризов погоды. Понятно, что из-за разных неучтенных обстоятельств точность, с которой на практике выполняются теплотехнические расчеты, тоже не может быть лучшей, чем десятки процентов (почему мы и слегка мерзнем иногда в наших жилищах).

Каким образом можно объяснить, почему локальное описание динамики цен активов оказывается достаточным для построения стратегий хеджирования таких финансовых обязательств, исполнение которых может быть отсрочено на длительное время? Дело в том, что хеджирование рассчитывается на локальные колебания цен, величина которых (единицы процентов за сутки) очень велика по сравнению со скоростью изменений в макроэкономических трендах или циклах. На математическом языке можно сказать, что эти тренды (или циклы) почти ничего не добавляют к тем величинам $\mathbf{E}\delta_t^2$,, которые в силу формулы (16) и определяют математическое ожидание приращения дисбаланса. Зато не следует забывать о том, что хеджирование требует связывания значительных капиталов хеджера, которые в несколько раз превосходят начальную цену опциона (ту, которую хеджер получает при продаже опциона). Эти капиталы в конце концов возвращаются хеджеру, но в процессе хеджирования являются связанными, что экономически существенно, но недостаточно подчеркивается в учебниках.

4 Вероятностная финансовая математика без вероятности

Вероятностные методы занимают одно из важнейших мест в современном математическом естествознании (и это не нуждается в доказательстве). Но при всех заслугах перед наукой у этих методов имеется весьма чувствительная ахиллесова пята: само основное понятие случайности и вероятности и по сей день является весьма темным. Та случайность, которая рассматривается в теории вероятностей, предполагает ведь статистическую устойчивость в смысле устойчивости частот событий, стабильности средних значений случайных величин, стабильности конечномерных распределений вероятностей в случае стационарного случайного процесса и т.д. (А ведь стабильность конечномерных распределений уж вовсе нельзя проверить экспериментально, а можно только предполагать.) Мы не можем с какой-либо степенью ясности сказать в общем виде, в каких случаях есть или должна быть статистическая устойчивость.

Есть ли это явление в финансовых данных: хотя бы в тех логарифмических приращениях рыночных цен, о которых идет речь в данной статье? В известном приближении есть, но не вполне: иначе волатильность не была бы переменной во времени. В связи с тяжелой проблемой статистической устойчивости представляет большой интерес недавнее открытие, которому посвящена книга Шейфера и Вовка [7]. Если говорить в самых общих чертах, то суть открытия состоит в следующем. Пусть в применении к динамике рыночных цен никакая случайность (в виде, так сказать, бросания какой-то «монеты») вообще не предполагается, а предполагается некоторое достаточно естественное условие на сам рынок. Тогда на рассматриваемую ситуацию переносятся очень многие законы теории вероятностей.

Например, в модели дискретного времени пусть динамика цены некоторого актива описывается соотношением $S_n = S_{n-1}(1 + x_n)$, где x_n — просто некоторые зависящие от времени n числа, для которых никакая случайность не предполагается, а предполагается (исключительно - для простоты) лишь ограниченность $|x_n| < 1$. Постулируем, однако, что на этом рынке спекулянт не может выиграть капитал, стремящийся к бесконечности (при $n \to \infty$), если этот спекулянт в начальный момент имеет капитал 1 и пользуется только такими осторожными стратегиями, что он ни при каком поведении рынка не разоряется (т.е. его капитал ни при каких условиях не делается отрицательным). Только из этого постулата (и из простейших свойств логарифмов) вытекает, что для движений цен обязан выполняться усиленный закон больших чисел, т.е. при $n \to \infty$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n \to 0.$$

Возможно перенесение очень многих других теорем теории вероятностей: разных форм простого и усиленного закона больших чисел, центральной предельной теоремы, закона повторного логарифма и т. д. Однако в данной статье нас интересует хеджирование опционов. Мы видели в предыдущем пункте, что переменная во времени волатильность финансовых активов не дает сделать особенно высокой точность хеджирования опционов (т.е. достаточно малый дисбаланс), и казалось бы, эта трудность непреодолима. Чисто математическими средствами она и в самом деле непреодолима, но Шейфер и Вовк предлагают некое изменение сложившейся рыночной практики, способное радикально повысить точность хеджирования.

Именно, они предлагают ввести в рыночное обращение некоторый новый актив D (свой для акций каждой отдельной компании). Этот актив должен выплачивать своему владельцу за каждую единицу времени h (допустим, за каждый рабочий день) дивиденды, равные $(\Delta S_t/S_t)^2$, , что практически совпадает с теми величинами δ_t^2, которые вводились в предыдущем разделе. Хеджирование предлагается производить путем рыночных операций не с одним активом S_t, а с двумя активами S_t и D_t. (Портфель хеджера автоматически считается самофинансируемым: необходимые для рыночных операций деньги хеджер снимает со своего банковского счета, а от такой операции его капитал не изменяется.) Соответствующий вариант теории отличается совершенно исключительной простотой. Он и излагается ниже.

Для большей ясности предположим, что банковский процент $r = 0$. Пусть при $T = 0$ начальный капитал эмитента опциона $I(t) = I_0$, где значение I_0 мы установим позже. В моменты $t = 0, h, 2h, \ldots, T - h$ эмитент формирует портфель из $\delta(t)$ акций и $\lambda(t)$ единиц актива D, беря необходимое количество денег со своего банковского счета, которое в данном случае мы не будем записывать в портфель (потому что в случае $r = 0$ банковский счет со временем не меняется). Приращение капитала эмитента определяется равенством

$$\Delta I(t) = \delta(t)\Delta S_t + \lambda(t)[\Delta D_t + (\Delta S_t/S_t)^2]. \tag{17}$$

В равенстве (17) S_t и D_t — это цены активов в момент t, а само это равенство и выражает самофинансируемость портфеля.

Пусть в момент $t = T$ по опциону надо выплатить $f(S_T)$. Допустим, что цена опциона $U(S_t, D_t)$ в момент t есть функция цен двух этих активов. Какую функцию U нам следовало бы выбрать, чтобы эволюция капитала (17) воспроизводила эволюцию цены опциона?

Предположим, что по порядку величины ΔS_t равно $\sqrt{h}$, а ΔD_t равно h (последнее совершенно естественно, так как за время от t до $t+h$ актив D платит дивиденды порядка $(\Delta S_t)^2$, а стало быть его рыночная цена падает на величину порядка h.)

(Имеется в виду, что эмитент опциона покупает актив D не навечно, а на срок до момента T, когда оканчивается хеджирование, в частности, считается, что $D_T = 0$.)

Тогда с точностью до величин порядка $o(h)$

$$\Delta U(S_t, D_t) = \frac{\partial U}{\partial S}\Delta S_t + \frac{\partial U}{\partial D}\Delta D_t + (1/2)\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(\Delta S_t)^2 + o(h). \tag{18}$$

Чтобы (17) могло бы быть близко к (18), нужно, чтобы

$$\delta(t) = \partial U/\partial S, \lambda(t) = \partial U/\partial D, \frac{\lambda(t)}{S_t^2} = (1/2)\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}.$$

Получаем (в качестве необходимого условия, но оно же, очевидно, и достаточное) уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial D} = (1/2)S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}. \tag{19}$$

Переменная D в (19) изменяется от некоторого начального значения $D_0 > 0$ (его определяет рынок, ориентируясь на ожидаемую выплату дивидендов за время от 0 до T) до значения $D(T) = 0$. Начальное условие при $D = 0$ имеет вид

$$U(S_T, 0) = f(S_T). \tag{20}$$

Мы видим, что (с точностью до обращения направления изменения временной переменной) уравнение (19) с условием (20) совпадает с уравнением (11), в котором положено $r = 0$. Таким образом, если исключить предположение случайности, то цена опциона как математическое ожидание той выплаты, которую в конце концов получает покупатель опциона, вообще исчезает, но цена опциона как начальный капитал хеджера, который позволяет произвести хеджирование, остается и удовлетворяет тому же уравнению. Это напоминает известное изречение «материя исчезает и остаются одни уравнения». А относится это изречение вот к какой ситуации математической физики. В свое время Максвелл предложил уравнения электродинамики, но объяснял их с помощью различных механических аналогий. Известно, что великий Больцман объяснял студентам электродинамику великого Максвелла, демонстрируя им некую сложную и нелепую машину из множества шестеренок. Когда в конце концов эти механические объяснения наука забыла, стала только лучше (а уравнения Максвелла остались). По мнению автора данной статьи, трактовка теории хеджирования опционов, которую дают Шейфер и Вовк напоминает эту историческую ситуацию.

Подчеркнем, в частности, что тот главный член в соотношении (16), с помощью которого мы ранее оценивали дисбаланс при хеджировании, в теории Шейфера- Вовка автоматически равен нулю. Никакая оценка будущей волатильности по статистическим данным о прошлой динамике цен не требуется: эта задача передается рынку, который должен определять текущую цену актива D. (А уж рынок как-нибудь выработает цену чего угодно.)

Однако теоретических соображений о преимуществах актива D не вполне достаточно: они ведь основаны на предположениях о порядке величин приращений ΔS_t и ΔD_t, а в какой мере можно полагаться на эти соображения применительно к реальным ценам и к конечному шагу по времени h — остается неизвестным. Можно пытаться проверять применимость этих соображений путем статистического анализа фактических данных о ценах (как это делается в [7]), но предпочтительнее прямые имитации хеджирования. Для таких имитаций нужно сначала имитировать оценку рынком актива D, но это совсем нетрудно сделать, потому что волатильность все-таки примерно постоянна, а потому и оценка будущих дивидендов довольно надежна. На момент написания этой статьи проведено совсем немного таких прямых экспериментов, но общий вывод — успех: дисбаланс при хеджировании снижается (по сравнению с хеджированием по Блэку-Шоулсу) в несколько раз. Правда, в одном опыте из 57 картина обратная: оба метода дают отвратительный дисбаланс около $(-c)$, где c — начальная цена опциона (опыты были построены так, что начальная цена одинакова для обоих методов хеджирования). При этом дисбаланс по Шейферу-Вовку еще несколько хуже, чем по Блэку-Шоулсу. Объясняется это тем, что за соответствующий период времени $[0, T]$ нашелся один случай, когда цена акций за один день упала на примерно 15% (при ежедневной волатильности около 1.5%). Такое δ_t, превышающее в 10 раз стандартное отклонение, очень велико (и крайне редко встречается: в этих опытах один раз на 5700). Здесь величина, обозначенная через $o(h)$ в соотношении (16), сделалась существенной, и подход с помощью уравнения с частными производными перестал действовать. (Ситуация сравнима с тем, что бывает в наших жилищах в случае теплотехнической аварии или необычных холодов.)

5 Практическая сторона

В теории хеджирования подход, не использующий понятия случайности, представляется весьма привлекательным, но не следует отбрасывать вероятностного подхода в тех ситуациях, когда реальные данные показывают, что достаточно стабильные (для тех или иных целей) статистические свойства есть. В частности, понятие VaR и его применения для стабилизации банковских капиталов вполне актуальны. Теория хеджирования опционов может применяться для внедрения на рынок новых видов опционов с целью расширения возможностей спекуляций (см. об этом [8]). Но (по мнению автора настоящей статьи) вероятностная финансовая математика к настоящему времени дозрела для радикально новой постановки прикладных вопросов. Не будучи в состоянии полностью охватить происходящее на реальном рынке (когда играть на повышение и когда — на понижение?), эта наука, тем не менее, в состоянии поставить вопрос о разработке существенных рекомендаций, в каких направлениях может быть улучшена деятельность финансового (и не только финансового, а, скажем, и нефтяного) рынка. В экономических теориях рынок рассматривается как некоторая всемогущая сущность, которую можно только изучать, но на которую нельзя влиять. А на деле это не так, и всяким (экономическим, политическим, правовым, моральным...) ограничениям, которые общество налагает на рынок, просто нет числа. И без этого нельзя, потому что есть масса случаев, в которых якобы всемогущий и самодостаточный рынок ведет себя просто нелепо. (Вспомните российские финансовые пирамиды 1994 года.) При этом речь не идет о том, чтобы лишить рынок необходимой динамичности, которую ничто другое, кроме рынка, не способно обеспечить. (Сравните российский кризис 1998 года, когда на любом углу московских улиц интенсивно торговали гречкой, сахаром, маслом и чем угодно, с действительно опасным кризисом 1991 года, когда можно было наблюдать лишь пустые полки магазинов.)

Что же можно предложить? О предложениях фактически уже шла речь: это и банковские резервы с помощью Var, и хеджирование новых видов опционов (в частности, <русского опциона>, о котором идет речь в теории в книге [1], а применительно к реальным данным — в статье [8]), и введение актива D из [7]. Может рассматриваться еще ряд предложений, из которых некоторые явно полезны и безобидны для рынка, а о других надо сначала хорошо подумать.

К числу первых можно отнести, например, следующие. Во многих работах Р.Мертона (см., например, книгу [9]) рассматривается модель непрерывной выплаты дивидендов по акциям. Сама по себе эта модель не отвечает никакой реальности, потому что на самом деле дивиденды выплачиваются раз в год тому лицу, которое владеет данной акцией в момент выплаты дивидендов. Эта практика сложилась исторически, потому что техника выплаты сводилась к тому, что надо отрезать от акции и предъявить купон, а сделать это может только тот, в чьих руках находится акция. Понятно, что после выплаты дивидендов рыночные цены акций падают на величину этой выплаты (потому что перед выплатой торги ведутся с учетом получения дивидендов). Но ведь теперь акции из в руки все равно не передаются, а находятся у депозитария. Почему бы этому депозитарию не вычислять, сколько времени в течение года данная акция находилась в руках каждого из ее собственников и делить между ними выплачиваемые раз в год дивиденды пропорционально этому времени? Это ведь логично с наивно- экономической точки зрения. Если Вы держите данную акцию, то, значит, Ваши деньги работают на нужды данной компании. Тогда и делить дивиденды надо в соответствии с этим временем владения акциями. Почти ничего бы не изменилось, но ход рыночных цен акций сделался бы более плавным (а электронная техника вполне позволяет производить такие вычисления).

Другой пример. На американских финансовых рынках сложилась такая традиция, что целые доллары в цене акций считаются, понятно, по десятичной системе счисления, но дроби доллара — по двоичной, причем шаг в значении цены не меньше $1/32$ доллара. Это очень мешает статистическим исследованиям динамики цен в микромасштабе по времени, потому что малым приращениям логарифма цены навязывается некая неудобная дискретная структура, зависящая от самого значения цены. Почему бы на электронных торгах не ввести десятичную систему с достаточным числом знаков?

Перейдем теперь к более радикальным предложениям, над которыми следует сначала хорошо подумать. С введением электронных торгов для исследования стала доступна информация о всех ценах и объемах сделок в течение торгов. Но биржа выдает эту информацию обезличенно: кто именно совершил ту или иную сделку — остается тайной. Однако если мы хотим по-настоящему понимать рынок, нужно иметь информацию о поведении отдельных игроков, и не только об их фактических сделках, но и динамике заявок, которые они выставляли в течение торгов и которые (допустим) не удовлетворились. Но поскольку не следует совать нос в чужие коммерческие тайны, пусть лучше такие исследования проводит сама биржа, которая все равно обязана накапливать соответствующую информацию на случай каких-то сбоев или конфликтов. На сегодняшний день такие исследования биржам не нужны. Предлагается обдумать систему налогов или штрафов за неразумно большие или малые значения каких-то суммарных по бирже показателей волатильности (температуры) с тем, чтобы при перекладывании этих расходов на отдельных игроков (а биржа иначе поступить не может) необходимо было изучать активность каждого отдельного игрока. А собранные в виде этих налогов или штрафов средства можно было бы употребить на обеспечение новых финансовых активов типа актива D по Вовку-Шейферу. Можно предположить, что удачно разработанная система такого рода могла бы сделать динамику биржевых цен более плавной, что в конечном счете в интересах самих игроков, потому что от различных биржевых паник и кризисов раньше всех и больше всех страдают именно они.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели; Том 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998, 489 с.; 525 с.

2. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: Государственный университет Высшая школа экономики, 2001, 260 с.

3. *Bachelier L.* Theorie de la speculation. // Annales de l'Ecole Normale Superieure. 1900. V.17. P. 21-86.

4. *Eberlein E., Keller U., Prause K.* New insights into smile, mispricing, and value at risk: the hyperbolic model. //Journ. Of Business. 1998. v.71. N3. P. 371- 405.

5. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. М., изд- во МГУ, 1992, 395 с.

6. *Тутубалин В.Н.* Сопоставление с реальными данными некоторых моделей и результатов стохастической финансовой математики.// Труды Математического ин-та РАН. В печати.

7. *Shafer G., Vovk V.* Probability and Finance. It's only a Game. Wiley, 2001.

8. *Тутубалин В.Н., Угер Е.Г.* Оценка возможности внедрения Б<русского опциона» на американском фондовом рынке. В печати.

9. *Merton R.C.* Continuous-time Finance. Blackwell, 1991. 732 p.