МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

А.В.ЛЕБЕДЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ

М о с к в а   2007 год

Лебедев А.В.
Сборник задач по математической экономике
Учебное пособие. — Издательство механико-математического факультета МГУ, Москва, 2007. — 80 стр.

Настояший сборник включает в себя более 80 задач в различных областях математической экономики. Представлены основные теоретические модели потребительского выбора, оптимизации производства, рыночного равновесия, а также элементы теории игр.

Для студентов экономического потока механико-математического факультета МГУ, а также всех интересующихся математическими моделями экономики.

Рецензенты:
д.э.н., профессор *Ю.Н.Черемных*
д.ф.-м.н., профессор *Б.Л.Воркуев*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Настоящий сборник задач составлен доцентом А.В.Лебедевым на основе семинарских занятий в 1998–2007 гг. по курсу профессора Ю.Н.Черемных "Математические модели экономики" для студентов 4 курса экономического потока механико-математического факультета МГУ. Темы задач в основном соответствуют программе курса (с учетом происходивших в ней изменений).

Сборник содержит более 80 задач, разделенных на 8 глав. В начале каждой главы приведены краткие сведения из теории, необходимые для решения задач. Многие задачи содержат ряд однотипных подпунктов, что позволяет лучше организовать семинарскую и домашнюю работу студентов. Сборник снабжен ответами, а также краткими решениями и комментариями, позволяющими лучше разъяснить изучаемую тему. Интересные случаи проиллюстрированы графиками. Приведены также образцы вариантов контрольных работ (по материалам 2005/2006 учебного года), которые могут пригодиться преподавателю.

Необходимо отметить, что задачник предназначен для студентов-математиков и отражает взгляд на предмет математика, а не экономиста. В пособии рассмотрены более широкие классы функций полезности и производственных функций, нежели рассматриваются традиционно. В частности, построены конкретные примеры функций полезности, демонстрирующие феномены товаров Гиффена и "низкого качества", которые обычно излагаются лишь описательно. При изучении паутинообразной модели рассмотрены ее обобщения в плане нелинейности и зависимости от прошлого.

При решении задач студенты имеют возможность применить полученные ранее знания в математическом анализе, дифференциальных и разностных уравнениях, линейной алгебре, линейном программировании и теории вероятностей.

В заключение, автор надеется, что его труд поможет новым поколениям студентов лучше овладеть важным, актуальным и интересным предметом — *математической экономикой*.

Автор выражает благодарность заместителю декана по математико-экономической специализации доценту Е.В.Чепурину, профессору Ю.Н.Черемных, ассистенту А.В.Селиванову, а также заведующему кафедрой теории вероятностей члену-корреспонденту РАН профессору А.Н.Ширяеву.

1. Основы теории потребительского выбора

Потребительским набором называется набор из конечного числа товаров в произвольных неотрицательных количествах, которые может иметь потребитель. Потребительский набор описывается вектором $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n$.

Функцией полезности $u(x)$ называется функция, описывающая полезность (удовольствие) для потребителя от набора x. Конкретные числовые значения функции не имеют содержательного смысла, важно только отношение между ними (больше, меньше или равно). Функция полезности используется для установления отношения предпочтения: если $u(x') < u(x'')$, то для потребителя набор x'' предпочтительней, чем x'; если $u(x') = u(x'')$, то наборы равноценны. Одно и то же отношение предпочтения может быть задано различными функциями.

Предполагается, что функция полезности непрерывна и обладает следующими свойствами:

1. Если $x' \le x''$ покомпонентно, то $u(x') \le u(x'')$.
2. Все множества $\{x : u(x) \ge c\}$ выпуклы.

Второе свойство означает *квазивогнутость* функции

$$u(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \ge \min\{u(x'), u(x'')\}, \quad \alpha \in [0,1],$$

которая следует из обычной вогнутости.

Далее будем полагать для простоты $n = 2$ и рассматривать функцию в положительном квадранте плоскости.

Линиями безразличия называют линии уровня функции полезности. Эти линии выпуклы к началу координат. Каждая из возникающих неявных функций $x_2 = x_2(x_1, u)$ и $x_1 = x_1(x_2, u)$ выпукла и не возрастает (достаточно проверить одну из них).

В литературе часто вводят более ограничительные свойства. А именно, для дважды дифференцируемой функции $u(x_1, x_2)$ полагают

1'. $\partial u/\partial x_1 \geq 0$, $\partial u/\partial x_2 \geq 0$.

2'. $\partial^2 u/\partial x_1^2 \leq 0$, $\partial^2 u/\partial x_2^2 \leq 0$.

3'. $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 \geq 0$.

Из условий 1'-3' следуют 1-2, но не наоборот. Более того, из двух функций, удовлетворяющих 1-2 и задающих одно и тоже отношение предпочтения, одна может удовлетворять 1'-3', а другая нет (например, $2\ln x_1 + 3\ln x_2$ и $x_1^2 x_2^3$). Таким образом, условия 1-2 имеют более фундаментальный характер, и далее мы будем придерживаться их.

Функция f называется *однородной степени s*, если $f(tx) = t^s f(x)$.

Бюджетным ограничением называется условие, ограничивающее множество доступных потребителю товаров в силу того, что товары платны и имеют цены p, а потребитель имеет конечный доход M. Таким образом, получаем условие $p_1x_1 + p_2x_2 \leq M$. Множество точек, заданное им, называют *бюджетным множеством.* Множество точек, заданных уравнением $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, называют *бюджетной прямой.*

Прямая задача потребительского выбора состоит в том, чтобы максимизировать функцию полезности при фиксированных ценах и доходе:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 \le M \end{cases} \tag{1}$$

В силу неубывания u неравенство в (1) можно заменить на равенство.

Оптимальные значения переменных в (1), зависящие от цен и дохода, определяют *функции спроса по Маршаллу* и обозначаются $x^\circ(p, M)$ или $D(p, M)$.

Косвенной функцией полезности $v(p, M)$ называется максимальная величина полезности, достижимая при бюджетном органичении, т.е. $v(p, M) = u(x^\circ(p, M))$. Косвенная функция полезности не возрастает по p, не убывает по M, однородна степени 0 по (p, M) и квазивыпукла (т.е. выпуклы множества $\{p : v(p, M) \le c\}$).

Обратная задача потребительского выбора состоит в том, чтобы найти минимальный доход, при котором достижим заданный уровень полезности:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 \to \min \\ u(x_1, x_2) = u \end{cases} \tag{2}$$

Оптимальные значения переменных в (2), зависящие от цен и уровня полезности, определяют *функции спроса по Хиксу* и обозначаются $x^\bullet(p, u)$ или $H(p, u)$.

Функцией расходов $m(p, u)$ называется минимальный доход, при котором достижим уровень полезности u, т.е. $m(p, u) = p_1H_1(p, u)+p_2H_2(p, u)$. Функция расходов не убывает по (p, u), вогнута и однородна степени 1 по p.

Введенные функции связаны естественными соотношениями

$$v(p, m(p, u)) = u, \quad m(p, v(p, M)) = M.$$

Важную роль также играют следующие соотношения, позволяющие выразить функции спроса через косвенную функцию полезности и расходов.

Лемма Шеппарда.

$$\frac{\partial m}{\partial p_i} = H_i(p, u).$$

Тождество Роя.

$$-\left.\frac{\partial v}{\partial p_i}\right/ \frac{\partial v}{\partial M} = D_i(p, M).$$

1.1. Проверить, какие из следующих функций являются функциями полезности:

а) $x_1 + x_2$;
б) $x_1 - x_2$;
в) $x_1^2 + x_2^2$;
г) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
д) $\sqrt{x_1} - e^{-x_2}$;
е) $-\ln(e^{-x_1} + e^{-x_2})$;
ж) $x_1 x_2^2 + x_1^3$;
з) $x_1^2 x_2 + x_1^3$;
и) $\min\{x_1 x_2^2, x_2\}$.

Какие из перечисленных функций однородны (и какой степени)?

1.2. Определить, при каких значениях параметров следующие функции являются функциями полезности[1]:

а) $(x_1^\alpha + x_2^\beta)^\gamma$;

б) $\gamma \ln(e^{\alpha x_1} + e^{\beta x_2})$;

в) $x_1^\alpha x_2^\beta + x_1^\gamma$.

1.3. Доказать, что если $u(x)$ — функция полезности и $f(x)$ — непрерывная возрастающая функция, то $u^*(x) = f(u(x))$ также является функцией полезности. Выразить функции спроса по Маршаллу и Хиксу, косвенную функцию полезности и функцию расходов при новой функции полезности u^* через соответствующие функции при старой.

1.4. Пусть $u(x_1, \ldots, x_n)$ — функция полезности, $g_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, — вогнутые неубывающие неотрицательные функции. Доказать, что

$$u^*(x_1, \ldots, x_n) = u(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n))$$

также является функцией полезности.

1.5. Доказать, что если $u_1(x), \ldots, u_m(x)$ — функции полезности, то $u(x) = \min\{u_1(x), \ldots, u_m(x)\}$ является функцией полезности.

1.6. Найти функции спроса по Маршаллу и Хиксу, косвенную функцию полезности и функцию расходов при следующих функциях полезности:

а) $x_1^2 x_2^5$;

б) $x_1^7 x_2^3$;

в) $x_1^4 x_2^2$.

---

[1] Тривиальная функция полезности, равная константе, здесь не рассматривается.

1.7. Найти функции спроса по Маршаллу и Хиксу, косвенную функцию полезности и функцию расходов при следующих функциях полезности:

а) $(x_1^{-1} + x_2^{-1})^{-2}$;

б) $(x_1^{-2} + x_2^{-2})^{-1}$;

в) $\ln x_1 + \ln x_2$;

г) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

1.8. Найти функции спроса по Маршаллу и Хиксу, косвенную функцию полезности и функцию расходов при следующих функциях полезности:

а) $x_1 - 1/x_2$;

б) $x_1 + \ln x_2$;

в) $x_1 + \sqrt{x_2}$.

1.9. Найти функции спроса по Маршаллу и косвенную функцию полезности при следующих функциях полезности:

а) $x_1(x_2 + 3)^2$;

б) $x_1x_2 + 2x_1 + 3x_2$.

1.10. Найти функции спроса по Маршаллу и Хиксу, косвенную функцию полезности и функцию расходов при следующих функциях полезности:

а) $4x_1 + 5x_2$;

б) $\min\{2x_1, 3x_2\}$.

1.11. По следующим косвенным функциям полезности восстановить функции полезности:

а) $4M^3p_1^{-1}p_2^{-2}$;

б) $27M^4p_1^{-3}p_2^{-1}$;

в) $108M^5p_1^{-2}p_2^{-3}$.

1.12. По следующим функциям расходов восстановить функции полезности:

а) $3u^{1/6}p_1^{1/3}p_2^{2/3}$;

б) $5up_1^{2/5}p_2^{3/5}$;
в) $\sqrt{3}u^2p_1^{5/6}p_2^{1/6}$;

2. Эффекты замены и дохода. Классы товаров

Предположим, что цена на некоторый товар выросла. Это приведет к изменению потребления этого товара (обычно, к сокращению), называемому *общим эффектом* ОЭ_i. Зная это, мы (теоретически) можем выплатить потребителю денежную компенсацию, чтобы он смог заменить подорожавший товар другими. Потребление товара и в этом случае изменится, но на другую величину, называемую *эффектом замены* ЭЗ_i. Оставшуюся часть общего эффекта называют *эффектом дохода* ЭД_i. Таким образом, получаем разложение эффектов $\text{ОЭ}_i = \text{ЭЗ}_i + \text{ЭД}_i$. Понятно, что оно зависит от того, как мы рассчитаем компенсацию.

Компенсация по Хиксу ΔH определяется тем, чтобы потребитель мог достигнуть при новых ценах того же уровня полезности, что имел вначале.

Компенсация по Слуцкому ΔS определяется тем, чтобы потребитель мог купить при новых ценах тот же набор товаров, что покупал вначале.

Заметим, что на самом деле при получении компенсации по Слуцкому потребитель НЕ захочет покупать тот же набор товаров, а купит несколько иной.

Хотя при любых конечных изменениях цены компенсации по Слуцкому и Хиксу, а также соответствующие эффекты замены и дохода различаются, однако при *малых* изменениях они совпадают в первом приближении.

Предельным эффектом называется предел отношения эффекта к малому изменению цены. Используем *уравнение Слуцкого*:

$$\frac{\partial x_i^\circ}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^\bullet}{\partial p_i} - \frac{\partial x_i^\circ}{\partial M} x_i^\circ.$$

В левой части стоит предельный общий эффект, в правое части первое слагаемое дает предельный эффект замены, второе — предельный эффект дохода.

Товар называется *обыкновенным*, если его потребление не возрастает (обычно, сокращается) с ростом цены, и *товаром Гиффена*, если оно растет.

Товар называется *нормальным*, если его потребление не убывает (обычно, растет) с ростом дохода, и *товаром низкого качества*, если оно сокращается.

Нормальный товар называется *предметом роскоши*, если доля дохода, выделяемая на его покупку, растет с ростом дохода, и *товаром первой необходимости*, если она сокращается.

Заметим, что все введенные категории характеризуют не товар сам по себе, а отношение к нему потребителя, которое может быть разным при различных доходах и ценах. Таким образом, один и тот же товар может быть в одной ситуации товаром Гиффена, а в другой — обыкновенным и т.п.

2.1. Вычислить эффекты замены и дохода, компенсации по Хиксу и Слуцкому, если:

а) $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$, $M = 60$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $q_1 = 3$;
б) $u(x_1, x_2) = x_1 x_2^4$, $M = 80$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $q_2 = 4$;
в) $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2$, $M = 100$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $q_1 = 5$;
г) $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$, $M = 96$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $q_2 = 4$;

д) $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, $M = 90$, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $q_1 = 5$;
е) $u(x_1, x_2) = x_1^5 x_2^3$, $M = 80$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $q_2 = 5$.

2.2. Вычислить предельные эффекты, используя данные из **2.1**.

2.3. Найти функции спроса по Маршаллу при функции полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1 x_2^2, 2x_2\}$. Показать, что в некоторой области параметров один из товаров является товаром Гиффена. Определить эту область.

2.4. Найти функции спроса по Маршаллу при функции полезности $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + \ln x_2$. Показать, что в некоторой области параметров один из товаров является товаром низкого качества, а другой — нормальным. Определить эту область.

2.5. Найти функции спроса по Маршаллу при следующих функциях полезности:
а) $x_1 + 3 \ln x_2$;
б) $2\sqrt{x_1} + x_2$;
в) $x_1^2 x_2 / (x_1 + 1)^3$;
г) $x_1^3 x_2^2 / (x_2 + 3)^5$;
Определить, какие из товаров относятся к товарам первой необходимости, а какие — к товарам высокого качества (предметам роскоши).

3. Анализ характеристик.

Пусть каждый из n товаров обладает m характеристиками (полезными свойствами). Обозначим через a_{ij} содержание i-ой характеристики в единице j-го товара. Предположим, что функция полезности зависит уже не от набора товаров $x = (x_1, \dots x_n)$, а от их суммарных характеристик $y = (y_1, \dots, y_m)$, $y = Ax$, где

$A = (a_{ij})$.

Можно определить новую функцию полезности $\tilde{u}(x) = u(Ax)$ и решать прямую задачу потребительского выбора с ней. Однако обычно это оказывается довольно сложно. Другой подход заключается в том, чтобы максимизировать $u(y)$ на некотором множестве в пространстве характеристик, возникающем как образ бюджетного множества при отображении $x \mapsto y = Ax$.

Далее полагаем для простоты $m = 2$.

Построим точки $A_j = (a_{1j}M/p_j, a_{2j}M/p_j)$, $1 \leq j \leq n$, соответствующие значениям характеристик при покупке только j-го товара на весь доход M. Тогда множество допустимых характеристик оказывается выпуклой оболочкой множества $A_1, \ldots A_n$. Решение расположено на его "северо-восточной" границе, на одном из отрезков или в вершине. Если точка лежит внутри отрезка $A_k A_l$ и делит его в некотором отношении, это означает, что нужно покупать только товары k и l, разделив между ними доход в том же отношении. Если точка совпадает с вершиной A_k, то нужно покупать только товар k.

В общем случае получается, что при наличии $m < n$ характеристик следует покупать не более чем m товаров. Таким образом, остальные товары вытесняются с рынка.

3.1. Имеются два товара с двумя характеристиками. Функция полезности $u(y_1, y_2) = y_1 y_2$. При ценах $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ и доходе $M = 120$ найти оптимальный потребительский набор, если:
а) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 3$;

б) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$;
в) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 3$;
г) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 6$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 2$.

3.2. Имеются два товара с двумя характеристиками. Характеристики первого $a_{11} = 2$, $a_{21} = 8$. Функция полезности $u(y_1, y_2) = y_1 y_2$. Найти верхнюю границу цены, по которой будет покупаться:
а) второй товар, если $a_{12} = 3$, $a_{22} = 4$, $p_1 = 1$;
б) первый товар, если $a_{12} = 5$, $a_{22} = 3$, $p_2 = 3$;
в) второй товар, если $a_{12} = 5$, $a_{22} = 12$, $p_1 = 2$.

3.3. При условиях задачи **3.1а** на рынке появляется третий товар. Проверить, будет ли он покупаться и как изменится оптимальный потребительский набор, если:
а) $a_{13} = 2$, $a_{23} = 3$, $p_3 = 1$;
б) $a_{13} = 3$, $a_{23} = 6$, $p_3 = 2$;
в) $a_{13} = 3$, $a_{23} = 1$, $p_3 = 1$.

3.4. При условиях предыдущей задачи (в каждом из трех случаев) найти верхние границы цены третьего товара, при которых он будет покупаться на рынке.

4. Основы теории оптимизации производства

Производственной функцией $f(x)$ называется функция, описывающая выпуск продукции в зависимости от расходуемых ресурсов $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Как правило, рассматривают случай двух переменных: x_1 (труда) и x_2 (капитала).

К производственной функции обычно предъявляются те же требования, что и к функции полезности (гл.1). Разница в том, что значения производственной функции уже имеют вполне содержательный смысл (выпуск продукции) и должны быть неотрицательны. Естественно также предположить, что производство не может происходить в отсутствие ресурсов, т.е. $f(0) = 0$.

Изоквантой называется линия уровня производственной функции.

Предельным продуктом MP_{x_i} называется предел отношения приращения производственной функции к приращению расхода i-го ресурса, т.е. $MP_{x_i} = \partial f / \partial x_i$.

Средним продуктом AP_{x_i} называется отношение $f(x)/x_i$.

Предельной технической нормой замены $MRTS_{x_1,x_2}$ называется предел отношения приращения x_2 к приращению x_1 вдоль изокванты, взятый с обратным знаком. Эта величина совпадает с отношением MP_{x_1}/MP_{x_2}.

Эластичностью $e_x(y)$ величины y по величине x называется предел относительного приращения y к относительному приращению x, т.е.

$$e_x(y) = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{d\ln y}{d\ln x}.$$

Логарифмическая форма представления здесь наиболее удобна в случае степенных зависимостей.

Эластичностью замены ресурсов σ называется эластичность капиталовооруженности x_2/x_1 по предельной технической норме замены $MRTS_{x_1,x_2}$ вдоль изокванты.

Прибыль от производства выражается формулой

$$PR = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

где p_0 — цена продукта, p_1 и p_2 — цены ресурсов.

Можно ставить задачи максимизации прибыли $PR \to \max$ на *долгосрочном* и *краткосрочном промежутке* времени. Разница в том, что в первом случае мы допускаем произвольные неотрицательные значения для x_1, x_2, а во втором фиксируем x_2 (капитал)[2] и можем менять только x_1 (труд). Таким образом, максимум прибыли на краткосрочном промежутке меньше, чем на долгосрочном, или совпадает с ним. Задача максимизации прибыли может не иметь (конечного) решения, если производственная функция растет достаточно быстро.

Максимизирующие прибыль значения переменных, зависящие от цен, определяют *функции спроса на ресурсы* и обозначаются $x^\circ(p)$. Эти функции однородны степени 0 по p.

Функцией выпуска $Q(p)$ называется величина выпуска продукции при оптимальных затратах ресурсов (максимизирующих прибыль) $Q(p) = f(x^\circ(p))$.

Максимальная прибыль $PR(p)$ однородна степени 1 по p.

Задача максимизации выпуска продукции при фиксированных издержках формулируется в виде

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le C \end{cases}, \tag{3}$$

где C — издержки. В силу неубывания производственной функции неравенство в (3) можно заменить на равенство. Прямая $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$ называется *изоко-*

[2] При этом в формуле для прибыли слагаемое $p_2 x_2$ не учитывается.

стой. Задача (3) аналогична прямой задаче потребительского выбора (гл.1).

Оптимальные значения переменных в (3), зависящие от цен, определяют *условные функции спроса на ресурсы по Маршаллу* и обозначаются $x^{\circ}(p, C)$. Эти функции однородны степени 0 по (p, C). Соответствующая величина производственной функции в (3) определяет *функцию условного выпуска* $Q(p, C) = f(x^{\circ}(p, C))$.

Линией развития фирмы называется множество $\{x^{\circ}(p, C), C > 0\}$. Имеется в виду, что по мере развития фирмы точка, описывающая расход ресурсов, движется по этой линии.

Задача минимизации издержек при фиксированном выпуске продукции формулируется в виде

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \min \\ f(x_1, x_2) = Q \end{cases}, \tag{4}$$

где Q — выпуск. Задача (4) аналогична обратной задаче потребительского выбора (гл.1).

Оптимальные значения переменных в (4), зависящие от цен, определяют *условные функции спроса на ресурсы по Хиксу* и обозначаются $x^{\bullet}(p, Q)$. Эти функции однородны степени 0 по p. Соответствующая величина издержек в (4) определяет *функцию условных издержек* $C(p, Q) = p_1 x^{\bullet}(p, Q) + p_2 x^{\bullet}(p, Q)$, однородную степени 1 по p.

Ранее мы рассматривали только переменные издержки, непрерывно растущие с ростом производства и в его отсутствие обращающиеся в нуль. Однако можно учитывать также постоянные и квазипостоянные издержки (последние равны нулю при $Q=0$ и положительной константе при $Q>0$). Таким образом, функция $C(Q)$ может быть разрывна в нуле. Это приводит к тому, что в задаче максимизации прибыли при низкой цене на продукт производство невыгодно, и существует критическое значение цены, начиная с которого оно оказывается выгодно и будет расти.

4.1. Найти предельную техническую норму замены для следующих производственных функций[3]:
а) $x_1^\alpha x_2^\beta$, $\alpha, \beta > 0$;
б) $(c_1 x_1^{-\alpha} + c_2 x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$, $c_1, c_2, h > 0$, $\alpha > -1$;
в) $x_1(x_2+3)^2$;
г) $(x_1-2)_+^4 (x_2-5)_+^6$;
д) $-\ln((e^{-x_1}+e^{-x_2})/2)$.

4.2. Найти эластичность замены ресурсов для производственных функций из **4.1**. В случаях, когда эластичность переменна, найти диапазон ее изменения.

4.3. Найти пределы функции из **4.1б** при
а) $\alpha \to +\infty$;
б) $\alpha \to 0$, $c_1 + c_2 = 1$;
в) $\alpha \to -1$.

4.4. Найти производственную функцию $f(x_1, x_2)$, если известно, что
а) $MP_{x_1} = (1/4)AP_{x_1}$, $MP_{x_2} = (3/4)AP_{x_2}$, $f(1,1) = 5$.
б) $MP_{x_1} = (1/2)AP_{x_1}$, $MP_{x_2} = (1/3)AP_{x_2}$, $f(4,1) = 6$;

[3] Здесь и далее используется обозначение положительной части числа $x_+ = \max\{x, 0\}$.

в) $MP_{x_1} = (1/6)AP_{x_1}$, $MP_{x_2} = (2/3)AP_{x_2}$, $f(1,8) = 2$;

4.5. Пусть $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\alpha, \beta > 0$. При каких значениях параметров разрешима задача максимизации прибыли на:

а) долгосрочном промежутке;

б) краткосрочном промежутке[4].

4.6. Пусть $f(x_1, x_2) = (x_1^{-\alpha} + x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$, $h > 0$, $\alpha > -1$. При каких значениях параметров разрешима задача максимизации прибыли на:

а) долгосрочном промежутке;

б) краткосрочном промежутке.

4.7. Решить задачу максимизации прибыли на долгосрочном промежутке для следующих производственных функций:

а) $x_1^{1/2} x_2^{1/3}$;

б) $2x_1^{3/5} x_2^{1/5}$;

в) $4x_1^{1/3} x_2^{1/6}$.

Найти функции спроса фирмы на ресурсы, функцию выпуска фирмы и прибыль. Вычислить эластичности прибыли по ценам.

4.8. Решить задачу максимизации прибыли на долгосрочном промежутке для следующих производственных функций:

а) $(x_1^{-1} + x_2^{-1})^{-1/2}$;

б) $(\min\{2x_1, 3x_2\})^{1/6}$;

Найти функции спроса фирмы на ресурсы, функцию выпуска фирмы и прибыль.

---

[4] Здесь и далее предполагается, что переменная x_1 описывает "труд", а x_2 "капитал".

4.9. Решить задачу максимизации прибыли на краткосрочном промежутке для производственных функций из **4.7**. Найти функции спроса фирмы на ресурсы и функцию выпуска фирмы. Вычислить эластичности прибыли по ценам.

4.10. Решить задачу максимизации прибыли на краткосрочном промежутке для следующих производственных функций:

а) $(x_1^{-2} + x_2^{-2})^{-1/2}$.

б) $(\min\{x_1, x_2\})^{1/3}$;

Найти функции спроса фирмы на ресурсы и функцию выпуска фирмы.

4.11. Решить задачу максимизации выпуска продукции при фиксированных издержках для следующих производственных функций:

а) $x_1^2 x_2^{1/3}$;

б) $9x_1^{2/5} x_2^{3/5}$;

в) $8x_1^{2/3} x_2^{1/6}$.

Найти функции условного спроса на ресурсы по Маршаллу и условного выпуска. Построить линии развития фирмы. Вычислить эластичность выпуска по ценам и издержкам.

4.12. Решить задачу максимизации выпуска продукции при фиксированных издержках для следующих производственных функций:

а) $(x_1^{-1} + x_2^{-1})^{-1/3}$;

б) $(\min\{4x_1, 7x_2\})^{2/3}$;

Найти функции условного спроса на ресурсы по Маршаллу и условного выпуска. Построить линии развития фирмы.

4.13. Решить задачу минимизации издержек при фиксированном выпуске продукции для производственных функций из **4.11**. Найти функции условного спроса на ресурсы по Хиксу и условных издержек. Вычислить эластичность издержек по ценам и выпуску.

4.14. Решить задачу минимизации издержек при фиксированном выпуске продукции для производственных функций из **4.12**. Найти функции условного спроса на ресурсы по Хиксу и условных издержек.

4.15. Для следующих функций издержек C (от выпуска продукции Q) решить задачу максимизации прибыли:

а) $C = 4Q^2 + 5$ при $Q > 0$, $C = 3$ при $Q = 0$;
б) $C = 7Q^3 + 4$ при $Q > 0$, $C = 1$ при $Q = 0$;
в) $C = 2Q^2 + 3$ при $Q > 0$, $C = 2$ при $Q = 0$;
г) $C = 5Q^3 + 7$ при $Q > 0$, $C = 4$ при $Q = 0$.

Найти оптимальные объемы выпуска и прибыли в зависимости от цены продукта.

5. Статические модели рынка

Рассмотрим модель распределения двух товаров между двумя потребителями. Предполагается, что товары имеются в общем количестве a_1 и a_2, и потребители могут свободно обмениваться ими. Обозначим набор товаров у первого потребителя через (x_1, x_2), второго — (y_1, y_2), тогда $x_1 + y_1 = a_1$, $x_2 + y_2 = a_2$. Распределение товаров удобно описывать точкой в прямоугольнике $[0, a_1] \times [0, a_2]$ с двумя противонаправленными системами координат: (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Такое представление называется *ящиком Эджворта*.

Потребители пытаются максимизировать свои функции полезности $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(y_1, y_2)$. Понятно, что это невозможно сделать одновременно, однако есть точки, где оба потребителя могут увеличить свой уровень полезности, а есть и такие, где нельзя увеличить один, не уменьшив другой. Последние называются *оптимальными по Парето* и образуют *контрактную линию*. Любое приемлемое для потребителей распределение товаров лежит на ней.

Уравнение контрактной линии имеет вид

$$\frac{\partial u_1/\partial x_1}{\partial u_1/\partial x_2} = \frac{\partial u_2/\partial y_1}{\partial u_2/\partial y_2}. \tag{5}$$

Графически это означает, что линии безразличия потребителей касаются друг друга в каждой точке контрактной линии. Если мы переходим от данной модели меновой торговли к торговле за деньги, оказывается, что отношение цен на товары p_1/p_2 устанавливается равным отношению (5).

Рассмотрим более сложную модель с двумя ресурсами, двумя продуктами, двумя производителями и одним потребителем. Отчасти она сводится к предыдущей: ресурсы выступают в качестве распределяемых товаров, а производители — в качестве их потребителей, поскольку пытаются максимизировать свои производственные функции $q_1(x_1, x_2)$ и $q_2(y_1, y_2)$. Потребитель, в свою очередь, максимизирует свою функцию полезности $u(q_1, q_2)$, потребляя все произведенные продукты.

Отображение $(x_1, x_2) \mapsto (q_1, q_2)$ переводит прямоугольник $[0, a_1] \times [0, a_2]$ в *технологическое множество* (которое обычно полагают выпуклым), а контрактную линию — в "северо-восточную" границу этого множества. Именно на ней максимизируется $u(q_1, q_2)$.

Таким образом, для решения задачи следует найти контрактную линию из условия

$$\frac{\partial q_1/\partial x_1}{\partial q_1/\partial x_2} = \frac{\partial q_2/\partial y_1}{\partial q_2/\partial y_2}, \tag{6}$$

затем ее образ Γ при отображении $(x_1, x_2) \mapsto (q_1, q_2)$, и решить задачу

$$\begin{cases} u(q_1, q_2) \to \max \\ (q_1, q_2) \in \Gamma \end{cases},$$

которую можно считать нелинейным обобщением прямой задачи потребительского выбора (гл.1). Найдя оптимальные объемы выпуска (q_1^*, q_2^*), можно найти соответствующее им оптимальное распределение ресурсов: (x_1^*, x_2^*) и (y_1^*, y_2^*).

Если в данную модель вводятся деньги, то соотношение цен на ресурсы $p_1^{\text{res}}/p_2^{\text{res}}$ устанавливается равным отношению (6) при оптимальном распределении ресурсов, а отношение цен на продукты определяется формулой

$$\frac{p_1^{\text{pr}}}{p_2^{\text{pr}}} = \frac{\partial u/\partial q_1}{\partial u/\partial q_2}$$

при оптимальных объемах выпуска.

Рассмотрим теперь *модель Эрроу-Дебре* для рынка из двух товаров, одной фирмы и двух потребителей.

Деятельность фирмы в этой модели описывается наборами товаров (y_1, y_2), которые фирма может произвести. При этом если $y_i < 0$, то товар потребляется в производстве как ресурс (в количестве y_i), а если $y_i > 0$, то товар выпускается. Множество Y всех доступных фирме наборов называется *технологическим множеством.* Это множество предполагается выпуклым, замкнутым, ограниченным и пересекающим $\mathbf{R}^2_+$ только в нуле (отсутствие "рога изобилия"). При фиксированном векторе цен $p = (p_1, p_2)$ на товары фирма стремится максимизировать свою прибыль $PR = p_1 y_1 + p_2 y_2$, решая задачу

$$\begin{cases} p_1 y_1 + p_2 y_2 \to \max \\ (y_1, y_2) \in Y. \end{cases}$$

Решение $y^\circ = y^\circ(p)$ этой задачи называется *предложением* или *локальным рыночным равновесием* фирмы.

Пусть u_i — функция полезности i-го потребителя. Предполагается, что каждый потребитель получает часть дохода фирмы в размере $\alpha_i PR$ ($\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) и располагает некоторым ликвидным запасом товаров $z_i = (z_{i1}, z_{i2})$. Потребители максимизируют свои функции полезности, решая задачу

$$\begin{cases} u_i(x_{i1}, x_{i2}) \to \max \\ p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} \leq \alpha_i PR + p_1 z_{i1} + p_2 z_{i2}. \end{cases}$$

Решение $x_i^\circ = x_i^\circ(p)$ этой задачи называется *спросом* или *локальным рыночным равновесием* i-го потребителя.

Вектором (функцией) избыточного спроса называется вектор $F(p) = x_1^\circ(p) + x_2^\circ(p) - y^\circ(p) - z_1 - z_2$.

Статическим экономическим равновесием называется набор из цен[5] $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, предложения фирмы

[5] Цены предполагаются неотрицательными и нормированными единицей ($p_1 + p_2 = 1$).

$y^\circ(p^*)$ и спроса потребителей $x_1^\circ(p^*), x_2^\circ(p^*)$, при которых избыточный спрос $F(p^*) \leq 0$ и выполнен *закон Вальраса* $(p^*, F(p^*)) = 0$.

При решении задач на нахождение равновесия сначала выражают (по правилу множителей Лагранжа) вектор y° предложения фирмы через пока неизвестные цены p. Далее вычисляют значение прибыли PR и бюджетные ограничения потребителей. После этого находят векторы x_1° и x_2° и выписывают вектор избыточного спроса. Как правило, равновесные цены строго положительны, поэтому избыточный спрос равен нулю. Из этого условия (с учетом нормированности цен) находят вектор p^*, через который получают значения y°, x_1°, x_2°. При достаточно слабых предположениях равновесие существует (теорема Эрроу-Дебре), поэтому если уравнения не имеют решения, нужно искать цены в виде $p^* = (1,0)$, либо $p^* = (0,1)$.

5.1. Рассмотреть модель обмена с двумя потребителями, если:
а) $u_1(x_1,x_2) = x_1x_2$, $u_2(y_1,y_2) = y_1y_2$,
$a_1 = 5$, $a_2 = 7$;
б) $u_1(x_1,x_2) = x_1x_2^3$, $u_2(y_1,y_2) = y_1^3y_2$,
$a_1 = 4$, $a_2 = 6$;
в) $u_1(x_1,x_2) = x_1^4x_2^5$, $u_2(y_1,y_2) = y_1y_2$,
$a_1 = 3$, $a_2 = 2$;
г) $u_1(x_1,x_2) = x_1x_2$, $u_2(y_1,y_2) = y_1^2y_2^3$,
$a_1 = 7$, $a_2 = 4$;
д) $u_1(x_1,x_2) = x_1x_2^4$, $u_2(y_1,y_2) = y_1^3y_2$,
$a_1 = 2$, $a_2 = 8$;
е) $u_1(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$, $u_2(y_1,y_2) = y_1^3y_2^3$,

$a_1 = 6$, $a_2 = 5$.

Найти контрактные линии и отношения цен на товары. Определить диапазон возможных отношений цен.

5.2. Рассмотреть модель рынка с двумя ресурсами, двумя производителями и одним потребителем, если:

а) $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/3}$, $u(q_1, q_2) = q_1 q_2^4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$;

б) $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/4}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/4}$, $u(q_1, q_2) = q_1^2 q_2^3$, $a_1 = 7$, $a_2 = 3$;

в) $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/3}$, $u(q_1, q_2) = q_1^4 q_2^3$, $a_1 = 10$, $a_2 = 5$;

г) $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/4}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/4}$, $u(q_1, q_2) = q_1 q_2^3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 6$;

д) $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/3}$, $u(q_1, q_2) = q_1^3 q_2^2$, $a_1 = 7$, $a_2 = 21$;

е) $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/4}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/4}$, $u(q_1, q_2) = q_1^4 q_2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 12$.

Найти контрактные линии и отношения цен на ресурсы, оптимальные объемы выпуска и отношения цен на продукты, оптимальное распределение ресурсов.

5.3. Найти статическое экономическое равновесие в модели Эрроу-Дебре при заданных технологическом множестве[6] Y, функциях полезности u_i, долях α_i и запасах z_i:

а) $Y = \{(y_1, y_2) : \; y_1 \le 0,\, y_2 \le \sqrt{-y_1}\}$, $u_1(x) = x_1 x_2$, $u_2(x) = x_1 x_2^2$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 3/4$, $z_1 =$

[6] Все технологические множества предполагаются ограниченными некоторыми большими константами.

$(1/4, 1/2)$, $z_2 = (3/4, 3/8)$;
б) $Y = \{(y_1, y_2) : \ y_1 < 1, y_2 \leq 2y_1/(y_1 - 1)\}$, $u_1(x) = x_1^2 x_2$, $u_2(x) = x_1 x_2^2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $z_1 = (1, 1)$, $z_2 = (1, 2)$;
в) $Y = \{(y_1, y_2) : \ y_1 \leq 1, y_2 \leq \sqrt{1 - y_1} - 1\}$, $u_1(x) = x_1^2 x_2$, $u_2(x) = x_1^2 x_2^4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $z_1 = (1, 1/2)$, $z_2 = (3/2, 1/2)$;
г) $Y = \{(y_1, y_2) : \ y_1 < 1, \ y_2 \leq y_1/(y_1 - 1)\}$, $u_1(x) = \ln x_1 + \ln x_2$, $u_2(x) = 3\ln x_1 + \ln x_2$, $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 2/3$, $z_1 = (1, 1/3)$, $z_2 = (2/3, 2/3)$.

6. Модели динамики рыночных цен

Пусть на рынке имеются n товаров с ценами $p_1, \ldots, p_n$ и специальный (нулевой) товар с ценой p_0, который интерпретируется как "деньги". Таким образом, задан вектор цен $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

Ненормированный процесс цен описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i(p), \quad 0 \leq i \leq n, \tag{7}$$

где функции $F_i(p)$ называются *функциями избыточного спроса.* Имеется в виду, что превышение спроса над предложением ведет к росту цены на товар, а обратная ситуация — к ее падению.

Относительно функций избыточного спроса предполагается, что они однородны степени 0, т.е. $F(\lambda p) = F(p)$, $\lambda > 0$, и удовлетворяют *закону Вальраса*: $(p, F(p)) \equiv 0$, $p > 0$.

Предполагается также, что существует точка равновесия $p^* > 0$, такая, что $F(p^*) = 0$, единственная с точностью до постоянного множителя. Получаем луч равновесия $\Gamma = \{\lambda p^*, \lambda > 0\}$.

Валовой заменимостью называется свойство: $\partial F_i/\partial p_j \geq 0$ при $i \neq j$. *Строгой валовой заменимостью* называется свойство: $\partial F_i/\partial p_j > 0$ при $i \neq j$.

М-матрицей называется матрица, все внедиагональные элементы которой неотрицательны. М-матрица называется *строгой*, если все ее недиагональные элементы положительны.

Введем матрицу $A(p) = (\partial F_i/\partial p_j)_{i,j=0}^n$. Тогда валовая заменимость эквивалентна тому, что A является М-матрицей, а в случае строгой валовой заменимости она будет строгой М-матрицей.

Простейшим *критерием локальной устойчивости* ненормированного процесса цен является следующий: если $A(p^*)$ — строгая М-матрица, то процесс локально устойчив.

Глобальной устойчивостью ненормированного процесса цен называется следующее свойство: при любом $p(0) > 0$ существует точка $\tilde{p} \in \Gamma$ такая, что $p(t) \to \tilde{p}$, $t \to \infty$.

Простейшими *критериями глобальной устойчивости* ненормированного процесса цен являются следующие:

1. Если $(p^*, F(p)) > 0$ при всех $p \notin \Gamma$, то процесс глобально устойчив.

2. Если во всех точках $p > 0$ имеет место строгая валовая заменимость, то процесс глобально устойчив.

Нормированный процесс цен описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = G_i(q), \quad 1 \le i \le n, \tag{8}$$

где $q_i = p_i/p_0$ и $G_i(q_1, \ldots, q_n) = F_i(1, q_1, \ldots, q_n)$, $0 \le i \le n$. Заметим, что эта модель НЕ эквивалентна предыдущей.

Для нормированного процесса цен существует единственная точка равновесия q^*.

Локальной устойчивостью нормированного процесса цен называется следующее свойство: существует некоторая окрестность V точки q^*, такая, что если $q(0) \in V$, то $q(t) \to q^*$, $t \to \infty$.

Определим матрицу $B(q) = (\partial G_i/\partial q_j)_{i,j=1}^n$.

Простейшим критерием локальной устойчивости нормированного процесса цен является следующий: если $B(q^*)$ — М-матрица и а) $\det B(q^*) \ne 0$ и $\partial G_0/\partial q_j \ge 0$, либо б) $\partial G_0/\partial q_j > 0$ для всех $1 \le j \le n$, то процесс локально устойчив.

Заметим, что хотя функция G_0 не входит явно в систему (8), она связана с другими G_i, $1 \le i \le n$, законом Вальраса.

Паутинообразной моделью динамики цен называют модель с дискретным временем и одним товаром, в которой заданы функции спроса $D(p)$ и предложения $S(p)$, а цена товара в любой момент времени устанавливается так, чтобы спрос соответствовал предложению на предыдущем шаге, т.е.

$$D(p_t) = S(p_{t-1}).$$

Предполагается, что $D(p)$ монотонно убывает, а $S(p)$ монотонно возрастает, и существует *точка равновесия*

$p^* > 0$, такая, что $D(p^*) = S(p^*)$. Под устойчивостью точки равновесия далее будем понимать ее локальную устойчивость (т.е. сходимость $p_t \to p^*$, $t \to \infty$ при малых отклонениях от равновесия).

В классической паутинообразной модели функции спроса и предложения линейны:

$$S(p) = A + Bp, \quad D(p) = C - Ep, \quad C > A,$$

тогда точка равновесия $p^* = (C - A)/(B + E)$. Она устойчива при $B < E$ и неустойчива при $B > E$. При $B = E$ происходят постоянные колебания вокруг равновесия.

В нелинейной паутинообразной модели устойчивость зависит от знака суммы

$$\frac{dS}{dp}(p^*) + \frac{dD}{dp}(p^*).$$

Если она отрицательна, то равновесие устойчиво, если положительна, то неустойчиво.

Можно также изучать обобщения паутинообразной модели, в которых предложение зависит от цен в более ранние моменты времени, т.е.

$$D(p_t) = S(p_{t-1}, p_{t-2}, \ldots, p_{t-r}).$$

При линейных функциях спроса и предложения получаем линейное конечно-разностное уравнение r-го порядка. Устойчивость равновесия исследуется соответствующими методами.

6.1. Рассмотреть модели ненормированного процесса цен:

а) $F_0(p_0,p_1,p_2)=(p_1+3p_2)/p_0-5$, $F_1(p_0,p_1,p_2)=(p_0+3p_2)/p_1-2$, $F_2(p_0,p_1,p_2)=(4p_0+p_1)/p_2-6$;

б) $F_0(p_0,p_1,p_2)=(p_1+p_2)/p_0-5$, $F_1(p_0,p_1,p_2)=(4p_0+p_2)/p_1-2$, $F_2(p_0,p_1,p_2)=(p_0+p_1)/p_2-2$;

в) $F_0(p_0,p_1,p_2)=(p_1+p_2)/p_0-3$, $F_1(p_0,p_1,p_2)=(p_0+5p_2)/p_1-4$, $F_2(p_0,p_1,p_2)=(2p_0+3p_1)/p_2-6$;

г) $F_0(p_0,p_1,p_2)=(p_1+p_2)/p_0-2$, $F_1(p_0,p_1,p_2)=(p_0+2p_2)/p_1-8$, $F_2(p_0,p_1,p_2)=(p_0+7p_1)/p_2-3$;

Проверить выполнение закона Вальраса. Найти точки равновесия, проверить их локальную и глобальную устойчивость.

6.2. Рассмотреть модели нормированных процессов динамики цен, соответствующие данным из **6.1**. Выписать функции $G_i(q_1,q_2)$, $i=0,1,2$. Найти точки равновесия, проверить их локальную устойчивость.

6.3. Рассмотреть паутинообразные модели:

а) $D(p)=10-2p$, $S(p)=p-2$;

б) $D(p)=15-p$, $S(p)=3p-1$;

в) $D(p)=7-3p$, $S(p)=2p-3$;

г) $D(p)=32-5p$, $S(p)=7p-4$.

Найти равновесную цену и проверить ее устойчивость.

6.4. Рассмотреть следующие обобщения паутинообразной модели:

а) $D(p)=8-6p$, $S=5p_{t-1}+p_{t-2}-4$;

б) $D(p)=25-4p$, $S=8p_{t-1}+3p_{t-2}-5$;

в) $D(p)=9-12p$, $S=4p_{t-1}-p_{t-2}-1$;

г) $D(p)=12-p$, $S=p_{t-1}+p_{t-2}-3$;

д) $D(p) = 20 - p$, $S = 3(p_{t-1} + p_{t-2}) - 1$.
Найти равновесную цену и проверить ее устойчивость.

6.5. Рассмотреть нелинейные паутинообразные модели:
а) $D(p) = 55/p - 1$, $S(p) = 2p$;
б) $D(p) = 26/p$, $S(p) = 5p - 3$;
в) $D(p) = 150/p - 7$, $S(p) = p - 2$;
г) $D(p) = 108/p$, $S(p) = 4\sqrt{p}$;
д) $D(p) = 64/p$, $S(p) = p^2$;
е) $D(p) = 160/p$, $S(p) = 5p^{2/3}$;
ж) $D(p) = 24 - 5p$, $S(p) = p^2$;
и) $D(p) = 29 - 13p$, $S(p) = p^2 - 1$.
Найти равновесную цену и проверить ее устойчивость.

7. Простейшие модели производственной сферы

Пусть имеется m ресурсов и n продуктов, которые можно из них произвести. Обозначим количество ресурса i, имеющегося в нашем распоряжении, через b_i. Предположим, что расход ресурса i на производство единицы продукта j составляет a_{ij} единиц, а доход от продажи этой единицы составляет c_j единиц. Обозначим через x_j выпуск продукта j. Введем векторы $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ и матрицу $A = (a_{ij})$.

Тогда задача максимизации дохода принимает вид

$$\begin{cases} (c, x) \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

и тем самым представляет собой классическую задачу линейного программирования, которая решается соответствующими методами.

Рассмотрим более сложную модель, в которой товары не делятся строго на ресурсы и продукты, а могут перерабатываться друг в друга. Пусть имеется n товаров и m *производственных методов*. Производственный метод i, используемый с единичной интенсивностью, перерабатывает товары в количествах $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ в товары в количествах $b_{i1}, \ldots, b_{in}$. Предполагается, что мы можем задействовать производственный метод i с произвольной интенсивностью $z_i \geq 0$. Введем матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и вектор $z = (z_1, \ldots z_n)$.

Исходя из того, что все товары, расходуемые в любой момент времени, должны были быть произведены в предыдущий момент времени[7], получаем условие

$$z(n)A \leq z(n-1)B. \tag{9}$$

Пропорциональным ростом называется рост производства, при котором все интенсивности всех производственных методов на каждом шаге меняются в одинаковое количество раз, т.е. $z(n) = \lambda z(n-1)$ или $z(n) = \lambda^n z(0)$, $\lambda > 0$, $n \geq 1$.

Понятно, что если мы можем обеспечить пропорциональный рост производства, то желательно, чтобы он происходил как можно быстрее. С учетом (9) получаем

[7] Возможное хранение товаров мы также считаем за производственный метод, что позволяет учитывать соответствующие издержки.

оптимизационную задачу

$$\begin{cases} \lambda \to \max \\ z(\lambda A - B) \leq 0 \\ \lambda, z \geq 0 \end{cases},$$

решением которой является *максимальный показатель пропорционального роста* λ^*. Вектор z^* определяется с точностью до постоянного множителя, поэтому его нормируют дополнительным условием: $z_1^* + \ldots + z_n^* = 1$. Тогда этот вектор дает нам *оптимальное соотношение производственных методов*, при котором происходит *максимальный пропорциональный рост.*

Понятно, что если $\lambda^* < 1$, то производство оказывается невыгодным и будет сокращаться даже при оптимальном управлении, а при $\lambda^* > 1$ оно может расти.

Согласно *магистральной теореме* при оптимизации производства на долгосрочном промежутке времени оптимальным является рост, близкий к максимальному пропорциональному на большей части это промежутка (кроме, может быть, небольших участков в начале и конце). Таким образом, луч вида $\{tz^*, t > 0\}$ играет роль "магистрали" развития производства.

7.1. Решить задачу линейного программирования по максимизации дохода от производства со следующими данными:

а)

Ресурсы	Продукты		Запас ресурса
	1	2	
1	1	3	30
2	1	1	15
Доход	2	3	

б)

Ресурсы	Продукты		Запас ресурса
	1	2	
1	1	4	80
2	1	2	40
Доход	1	5	

в)

Ресурсы	Продукты		Запас ресурса
	1	2	
1	3	1	60
2	1	1	40
Доход	2	1	

Найти оптимальный выпуск продукции, расход ресурсов и доход.

7.2. Решить задачу линейного программирования по максимизации дохода от производства со следующими данными:

а)

Ресурсы	Продукты			Запас ресурса
	1	2	3	
1	2	1	3	10
2	3	2	5	20
Доход	15	10	18	

б)

Ресурсы	Продукты			Запас ресурса
	1	2	3	
1	3	4	1	260
2	2	8	6	200
Доход	1	2	1	

в)

Ресурсы	Продукты			Запас ресурса
	1	2	3	
1	20	8	7	165
2	13	9	12	264
Доход	2	1	1	

Найти оптимальный выпуск продукции, расход ресурсов и доход.

7.3. Решить задачу линейного программирования по максимизации дохода от производства со следующими данными:

а)

Ресурсы	Продукты			Запас ресурса
	1	2	3	
1	2	1	3	70
2	1	1	2	60
3	1	1	1	80
Доход	10	7	9	

б)

Ресурсы	Продукты			Запас ресурса
	1	2	3	
1	3	2	1	50
2	2	1	3	65
3	2	6	4	130
Доход	10	11	12	

Найти оптимальный выпуск продукции, расход ресурсов и доход.

7.4. Решить задачу линейного программирования по максимизации дохода от производства со следующими данными:

а)

Ресурсы	Продукты				Запас ресурса
	1	2	3	4	
1	4	2	2	3	35
2	1	1	2	3	30
3	3	1	2	1	40
Доход	14	10	14	11	

б)

Ресурсы	Продукты				Запас ресурса
	1	2	3	4	
1	3	5	2	4	60
2	22	14	18	30	400
3	10	14	8	16	128
Доход	30	25	8	16	

Найти оптимальный выпуск продукции, расход ресурсов и доход.

7.5. Каждая единица производственной мощности способна произвести N единиц продукции в единицу времени, при этом мощность сокращается на долю p. На M единиц продукции можно приобрести одну единицу производственной мощности. Найти оптимальное соотношение производственных методов и максимальный показатель пропорционального роста производства, если:

а) $N = 27,\ M = 30,\ p = 0,1$;
б) $N = 14,\ M = 20,\ p = 0,1$;
в) $N = 19,\ M = 10,\ p = 0,1$;
г) $N = 26,\ M = 40,\ p = 0,2$;
д) $N = 45,\ M = 25,\ p = 0,2$;
е) $N = 36,\ M = 15,\ p = 0,2$.

7.6. Каждая пара кроликов потребляет K единиц корма в единицу времени и дает приплод в L пар. От продажи пары кроликов можно получить M единиц корма. Найти оптимальное соотношение производственных методов и максимальный показатель пропорционального роста производства, если:
а) $K = 50,\ L = 2,\ M = 25$;
б) $K = 60,\ L = 3,\ M = 40$;
в) $K = 80,\ L = 2,\ M = 20$;
г) $K = 45,\ L = 3,\ M = 15$;
д) $K = 40,\ L = 2,\ M = 60$;
е) $K = 25,\ L = 3,\ M = 50$.
Определить, в каких случаях разводить кроликов выгодно.

8. Элементы теории игр

Предположим, что есть два игрока (например, фирмы на рынке), каждый из которых может выбрать одно из нескольких действий, называемых *стратегиями (чистыми)*. Игроки совершают свой выбор одновременно и независимо друг от друга. Если первый игрок выбрал стратегию i, а второй j, то первый получает выигрыш a_{ij}, а второй — b_{ij}. Таким образом, заданы матрицы выигрышей $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, а игра называется *биматричной.*

Точкой равновесия Нэша в чистых стратегиях называется такая пара стратегий игроков (i_0, j_0), что $a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}$ для всех i и $b_{i_0,j_0} \geq b_{i_0,j}$ для всех j. В точке равновесия Нэша ни одному игроку не выгодно менять свою стратегию в одиночку.

Смешанной стратегий называется невырожденное вероятностное распределение на множестве чистых стратегий. Она может быть задана вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \geq 0$ и $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Предполагается, что игрок выбирает стратегию i с вероятностью x_i.

Средним выигрышем игрока называется математическое ожидание его выигрыша в случае осуществления смешанных стратегий. А именно, пусть первый игрок выбирает смешанную стратегию x, а второй y, тогда их средние выигрыши: $f_1(x,y) = xAy$, $f_2(x,y) = xBy$.

Точкой равновесия Нэша в смешанных стратегиях назвается такая пара смешанных стратегий игроков (x^0, y^0), что $f_1(x^0, y^0) \geq f_1(x, y_0)$ для всех x и $f_2(x^0, y^0) \geq f_2(x_0, y)$ для всех y.

В случае игры 2×2 (у каждого игрока по две стратегии), точку равновесия в смешанных стратегиях (если она есть) можно найти по формулам:

$$x_1^0 = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}, \quad x_2^0 = 1 - x_1^0;$$

$$y_1^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad y_2^0 = 1 - y_1^0.$$

Если какое-либо из полученных чисел оказывается отрицательным, игра не имеет решения в смешанных стратегиях.

Биматричная игра 2×2 имеет либо одну точку равновесия в чистых или смешанных стратегиях, либо три точки: две в чистых и одну в смешанных.

Кооперативной игрой называется игра, при которой игроки могут договариваться между собой о своих действиях с целью увеличения выигрышей, т.е. образовывать коалиции.

В этом случае рассматривается множество F всех возможных пар выигрышей (f_1, f_2), представляющее собой выпуклую оболочку точек $M_{ij}(a_{ij}, b_{ij})$. Его "северо-восточная" граница называется *границей Парето.*

Точкой угрозы в кооперативной игре называется пара стратегий, определяющих гарантированные выигрыши игроков без вступления в коалицию, и соответствующая точка в плоскости выигрышей $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$.

Переговорным множеством называется часть границы Парето, лежащая одновременно выше и правее точки угрозы. Игрокам не имеет смысла обсуждать решения вне переговорного множества.

Точка M^* переговорного множества, на которой достигается максимум величины $(f_1 - \bar{f}_1)(f_2 - \bar{f}_2)$, называется *решением Нэша* кооперативной игры. Если она совпадает с одной из точек M_{ij}, то игрокам следует придерживаться пары стратегий (i, j). Если она лежит внутри отрезка $M_{ij}M_{kl}$ и делит его в некотором отношении, то игроки должны выбирать пары (i, j) и (k, l) с тем же соотношением вероятностей.

Игрой с природой называется игра, где в качестве второго игрока выступают непредсказумые внешние обстоятельства (без какой-либо разумной воли). Их источником может быть как природа, так и поведение рынка и т.п. Предполагается, что если игрок выбирает стратегию i, а природа окажется в состоянии j, то игрок получает выигрыш a_{ij}.

Доминирующей стратегией называется такая стратегия i_0, что $a_{i_0 j} \geq a_{ij}$ при всех i, j. Если такая стратегия существует, то следует выбирать ее. В противном случае применяются другие методы.

Разработаны различные критерии выбора в игре с природой.

Критерий Вальда. Стратегия выбирается так, чтобы обеспечить наибольший выигрыш в наихудшем случае, т.е.

$$i_0 = \operatorname*{argmax}_i \min_j a_{ij}.$$

Риском называется величина $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$. Риск отражает разницу между выигрышем, который мы получили бы, зная состояние природы, и тем, который мы получим, не зная его.

Критерий Сэвиджа. Стратегия выбирается так, чтобы обеспечить наименьший риск в наихудшем случае, т.е.

$$i_0 = \operatorname*{argmin}_i \max_j r_{ij}.$$

Оба эти критерия можно назвать "крайне пессимистическими".

Критерий Гурвица. Стратегия выбирается из условия

$$i_0 = \operatorname*{argmax}_i \left\{ \gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right\},$$

где $\gamma \in [0,1]$ — "коэффициент пессимизма". При $\gamma = 1$ критерий Гурвица переходит в критерий Вальда ("крайний пессимизм"), при $\gamma = 0$ получаем "крайний оптимизм" (расчет на наибольший выигрыш без учета неблагоприятных вариантов).

Все три критерия могут быть распространены и на смешанные стратегии (с учетом среднего выигрыша).

Рассмотрим теперь игру n лиц. Предполагается, что игроки могут образовывать коалиции, описываемые подмножествами $T \subset N = \{1, \ldots, n\}$ (включая само N и одноэлементные множества). Число элементов множества T обозначим через $|T|$.

Характеристическая функция $v(T)$ описывает выигрыш коалиции T. Она полагается неотрицательной и *супераддитивной*, т.е.

$$v(T_1 \cup T_2) \geq v(T_1) + v(T_2), \quad T_1 \cap T_2 = \emptyset.$$

Выигрыш, полученный коалицией, делится между ее участниками. В простейшем случае $v(T)$ принимает всего два значения: 1 (коалиция выигрывает) и 0 (коалиция проигрывает).

Вектор Шепли $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ определяется формулой

$$\varphi_i = \sum_{T \subset N,\, i \in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\}))$$

и представляет собой вариант справедливого (в некотором смысле) дележа выигрыша $v(N)$.

Рассмотрим модель корпорации с несколькими акционерами. Пусть любое решение принимается простым большинством акций. Тогда коалиция, имеющая более половины акций, выигрывает, а имеющая меньше (или ровно половину) — проигрывает. В этом случае вектор Шепли показывает реальную значимость каждого акционера в принятии решений, которая может отличаться от номинальной (определяемой долей акций).

8.1. Фирмы А и В имеют по две стратегии поведения на рынке. Найти точки равновесия Нэша в чистых стратегиях, если выигрыши фирм заданы следующими таблицами:

а)

	B_1	B_2
A_1	(10;10)	(-3;15)
A_2	(15;-4)	(1;1)

б)

	B_1	B_2
A_1	(20;20)	(-3;15)
A_2	(25;-4)	(5;5)

в)

	B_1	B_2
A_1	(3;5)	(-1;-1)
A_2	(2;2)	(5;3)

г)

	B_1	B_2
A_1	(5;7)	(6;-5)
A_2	(10;5)	(-5;12)

8.2. При условиях задачи **8.1.** найти точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях (когда они существуют) и соответствующие средние выигрыши.

8.3. При условиях задачи **8.1.**, в предположении, что фирмы могут договариваться между собой (кооперативная игра) найти точки угрозы, решения Нэша и средние выигрыши (для смешанных стратегий).

8.4. Фирма A имеет несколько стратегий, которые могут принести различный выигрыш в зависимости от состояния рынка C. Найти оптимальные чистые стратегии с помощью доминирования, критериев Вальда, Сэвиджа и Гурвица с $\gamma = 3/5$, если выигрыш фирмы задан следующими таблицами:

а)

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	1	2	3	5
A_2	7	4	4	5
A_3	3	4	4	1
A_4	7	4	2	2

б)

	C_1	C_2	C_3
A_1	20	30	15
A_2	75	20	35
A_3	25	80	25
A_4	85	5	45

в)

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	19	30	41	49
A_2	51	38	10	20
A_3	73	18	81	11

8.5. Торговая фирма закупает для продажи два товара, на теплую и холодную погоду. Первый товар при теплой погоде приносит прибыль $a_1\%$, а при холодной убыток $b_1\%$. Второй товар при холодной погоде приносит прибыль $a_2\%$, а при теплой убыток $b_2\%$. С помощью критерия Вальда в смешанных стратегиях найти оптимальные доли средств, которые следует затратить на покупку первого и второго товара, если:

а) $a_1 = 20$, $b_1 = 14$, $a_2 = 16$, $b_2 = 18$;

б) $a_1 = 16$, $b_1 = 9$, $a_2 = 24$, $b_2 = 6$;

в) $a_1 = 10$, $b_1 = 4$, $a_2 = 14$, $b_2 = 8$.

8.6. Имеется корпорация из нескольких акционеров. Любое решение принимается простым большинством акций. Определить значимость акционеров с помощью вектора Шепли, если они имеют следующие числа акций:

а) 20, 40, 40;

б) 20, 30, 50;

в) 10, 20, 30, 40;

г) 10, 30, 30, 40.

8.7. Владелец ночного клуба обещает 1000 ед. певцу, пианисту и ударнику (игроки 1, 2 и 3) за совместную игру в его клубе. Выступление дуэта певца и пианиста оценивается в 800 ед., ударника и пианиста — в 650 ед., одного пианиста — в 300 ед. Дуэт певец-ударник зарабатывает 500 ед. за вечер на станции метро, певец зарабатывает 200 ед. за вечер в кафе. Ударник один ничего не может заработать. Какое распределение дохода в 1000 ед. можно считать справедливым, учитывая возможности игроков?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ[8]

1. Основы теории потребительского выбора

1.1. а) Да; однородна степени 1. б) Нет; однородна степени 1. в) Нет; однородна степени 2. г) Да; однородна степени 1/2. Функция вогнута как сумма вогнутых. д) Да; неоднородна. Функция вогнута как сумма вогнутых. е) Да; неоднородна. Имеем $x_2 = -\ln(e^{-u} - e^{-x_1})$, $x_1 > u$; производная $dx_2/dx_1 = -1/(e^{x_1-u} - 1)$ мнотонно возрастает, так что функция $x_2(x_1)$ выпукла. ж) Нет; однородна степени 3. Имеем $x_2 = \sqrt{(u - x_1^3)/x_1}$, $0 < x_1 \le u^{1/3}$; производная $dx_2/dx_1 = -(u + 4x_1^4)/(2x_1\sqrt{u - x_1^3})$ стремится к $-\infty$ как при $x_1 \to 0$, так и при $x_1 \to u^{1/3}$. Следовательно, в некоторой точке интервала она имеет максимум, где функция меняет выпуклость на вогнутость. з) Да; однородна степени 3. Имеем $x_2 = u/x_1^2 - x_1$, $0 < x_1 \le u^{1/3}$, функция $x_2(x_1)$ выпукла. и) Да; неоднородна. Имеем $x_2 = \sqrt{u/x_1}$ при $x_1 \in (0, 1/u)$ и $x_2 = u$ при $x_1 \ge 1/u$, функция $x_2(x_1)$ выпукла.

Линии уровня функции $u(x_1, x_2)$ в задачах **1.1е-и** для $u = 1, 2, 3$ представлены на рис. 1–4. В последнем случае пунктиром показана гипербола $x_1x_2 = 1$, на которой лежат точки излома.

1.2 а) Либо $\alpha, \beta \in (0, 1], \gamma > 0$, либо $\alpha, \beta, \gamma < 0$. В общем случае имеем $x_2 = (u^{1/\gamma} - x_1^{\alpha})^{1/\beta}$, производная

$$dx_2/dx_1 = -(\alpha/\beta)x_1^{\alpha-1}(u^{1/\gamma} - x_1^{\alpha})^{1/\beta-1}.$$

[8] О замеченных ошибках и опечатках просьба сообщать автору!

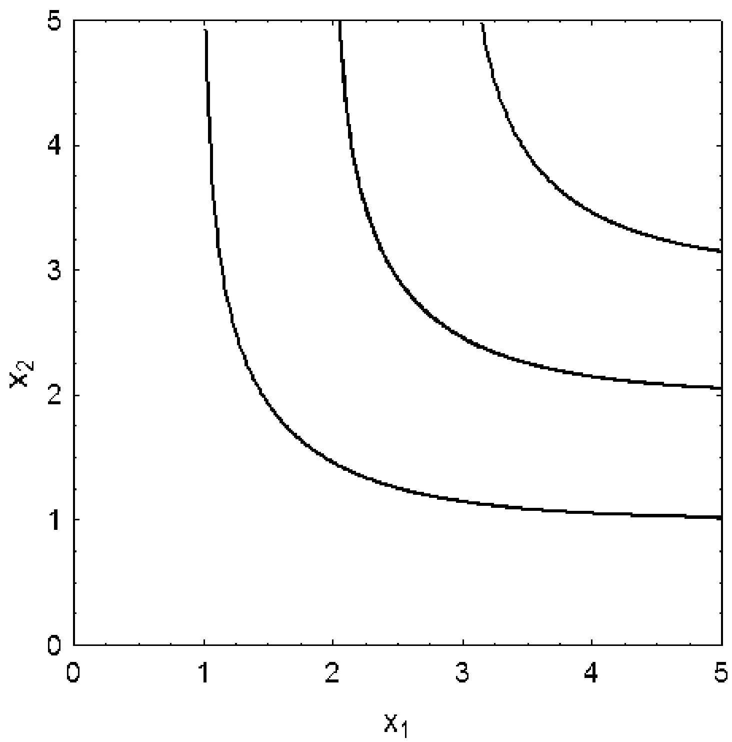

Рис. 1: Линии уровня $u(x_1, x_2) = -\ln(e^{-x_1} + e^{-x_2})$.

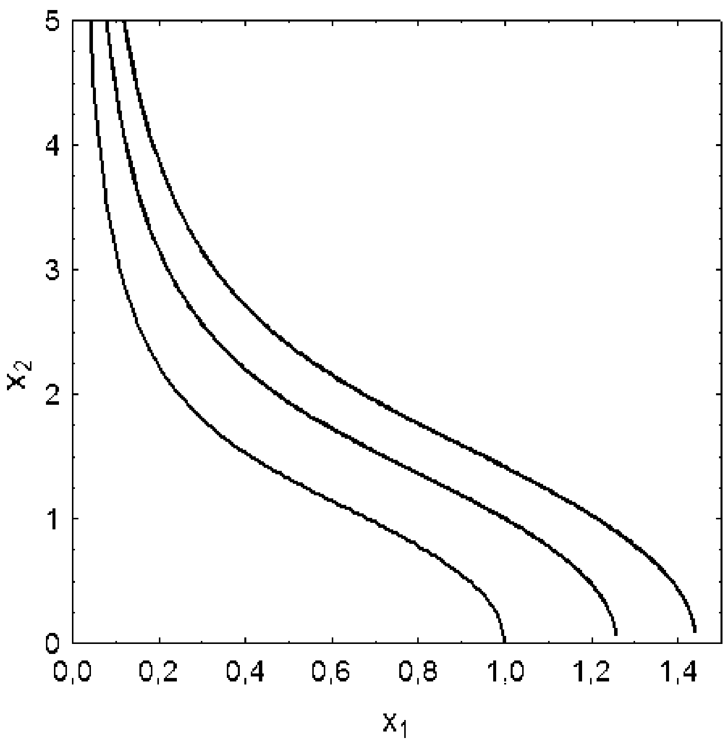

Рис. 2: Линии уровня $u(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + x_1^3$.

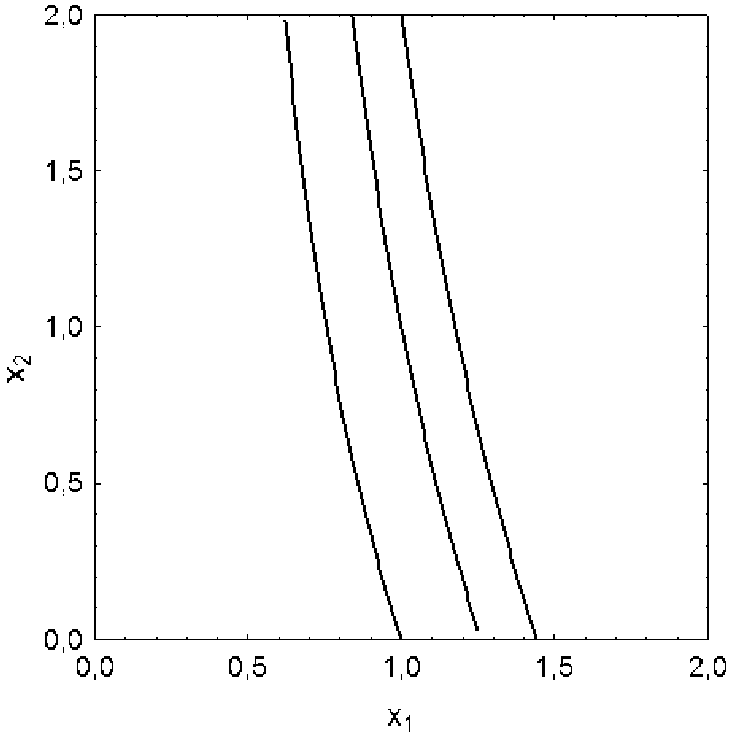

Рис. 3: Линии уровня $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1^3$.

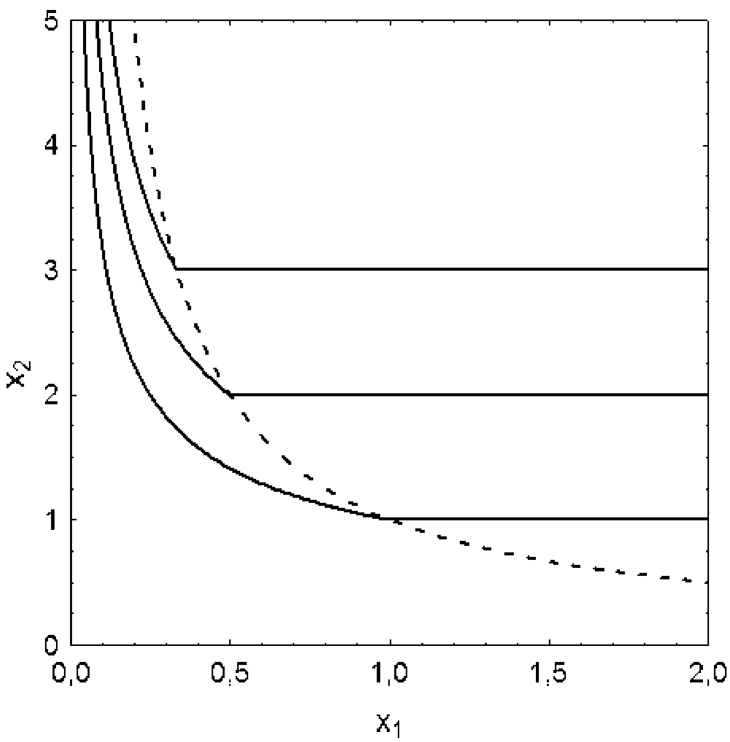

Рис. 4: Линии уровня $u(x_1, x_2) = \min\{x_1 x_2^2, x_2\}$.

Из условия неубывания $u(x_1, x_2)$ при $\gamma > 0$ должно быть $\alpha, \beta > 0$, а при $\gamma < 0$ имеем $\alpha, \beta < 0$. При $\alpha, \beta \in (0, 1]$ и при $\alpha, \beta < 0$ получаем, что dx_2/dx_1 возрастает (в области $x_1^\alpha < u^{1/\gamma}$). При $\alpha > 1$ оказывается, что dx_2/dx_1 убывает в окрестности нуля, и функция $x_2(x_1)$ там вогнута. Аналогично исключаем $\beta > 1$.

б) $\alpha, \beta, \gamma < 0$; в) $\alpha, \gamma > 0$, $\beta \in (0, 1]$.

1.3. $D_i^*(p, M) = D_i(p, M)$, $H_i^*(p, u) = H_i(p, f^{-1}(u))$, $v^*(p, M) = f(v(p, M))$, $m^*(p, u) = m(p, f^{-1}(u))$.

1.6. а) $x_1^\circ = 2M/(7p_1)$, $x_2^\circ = 5M/(7p_2)$, $v = (4 \cdot 5^5/7^7)M^7 p_1^{-2} p_2^{-5}$, $m = 7(p_1/2)^{2/7}(p_2/5)^{5/7}u^{1/7}$, $x_1^\bullet = (2p_2/5p_1)^{5/7}u^{1/7}$, $x_2^\bullet = (5p_1/2p_2)^{2/7}u^{1/7}$;

б) $x_1^\circ = 7M/(10p_1)$, $x_2^\circ = 3M/(10p_2)$, $v = (7^7 3^3/10^{10})M^{10} p_1^{-7} p_2^{-3}$, $m = 10(p_1/7)^{7/10}(p_2/3)^{3/10}u^{1/10}$, $x_1^\bullet = (7p_1/3p_2)^{3/10}u^{1/10}$, $x_2^\bullet = (3p_1/7p_2)^{7/10}u^{1/10}$;

в) $x_1^\circ = 2M/(3p_1)$, $x_2^\circ = M/(3p_2)$, $v = (4/27)M^6 p_1^{-4} p_2^{-2}$, $m = 6(p_1/4)^{2/3}(p_2/2)^{1/3}u^{1/6}$, $x_1^\bullet = (2p_1/p_2)^{1/3}u^{1/6}$, $x_2^\bullet = (p_1/2p_2)^{2/3}u^{1/6}$.

1.7. а) $x_1^\circ = M/(p_1 + \sqrt{p_1 p_2})$, $x_2^\circ = M/(p_2 + \sqrt{p_1 p_2})$, $v = M^2/(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^4$, $m = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2 u^{1/2}$, $x_1^\bullet = (1 + \sqrt{p_2/p_1})u^{1/2}$, $x_2^\bullet = (1 + \sqrt{p_1/p_2})u^{1/2}$;

б) $x_1^\circ = M/(p_1 + p_1^{1/3}p_2^{2/3})$, $x_2^\circ = M/(p_2 + p_1^{2/3}p_1^{1/3})$, $v = M^2/(p_1^{2/3} + p_2^{2/3})^3$, $m = (p_1^{2/3} + p_2^{2/3})^{3/2}u^{1/2}$, $x_1^\bullet = ((1 + (p_2/p_1)^{2/3})u)^{1/2}$, $x_2^\bullet = ((1 + (p_1/p_2)^{2/3})u)^{1/2}$;

в) $x_1^\circ = M/(2p_1)$, $x_2^\circ = M/(2p_2)$, $v = 2\ln(M/2) - (\ln p_1 + \ln p_2)$, $m = 2(up_1p_2)^{1/2}$, $x_1^\bullet = (up_1/p_2)^{1/2}$, $x_2^\bullet = (up_2/p_1)^{1/2}$;

г) $x_1^\circ = p_2M/(p_1^2 + p_1p_2)$, $x_2^\circ = p_1M/(p_1p_2 + p_2^2)$, $v = (M(p_1 + p_2)/(p_1p_2))^{1/2}$, $m = p_1p_2u^2/(p_1 + p_2)$, $x_1^\bullet = (up_2/(p_1 + p_2))^2$, $x_2^\bullet = (up_1/(p_1 + p_2))^2$.

1.8. Здесь и далее необходимо учитывать, что решение может быть как внутренним (гладкое касание линии безразличия и бюджетной прямой), так и краевым (один из товаров не покупается). Указанием на последнее является, в частности, выход решения, получаемого методом Лагранжа, из области неотрицательных значений.

а) $x_1^\circ = (M - \sqrt{p_1 p_2})/p_1$, $x_2^\circ = \sqrt{p_1/p_2}$, $v = (M - 2\sqrt{p_1 p_2})/p_1$ при $M > \sqrt{p_1 p_2}$; $x_1^\circ = 0$, $x_2^\circ = M/p_2$, $v = -\sqrt{p_2/p_1}$ при $M \le \sqrt{p_1 p_2}$; $m = up_1 + 2\sqrt{p_1 p_2}$, $x_1^\bullet = u + \sqrt{p_2/p_1}$, $x_2^\bullet = \sqrt{p_1/p_2}$ при $u > -\sqrt{p_2/p_1}$; $x_1^\bullet = 0$, $x_2^\bullet = -1/u$, $m = -p_2/u$ при $u \le -\sqrt{p_2/p_1}$;

б) $x_1^\circ = M/p_1 - 1$, $x_2^\circ = p_1/p_2$, $v = M/p_1 + \ln(p_1/p_2) - 1$ при $M > p_1$; $x_1^\circ = 0$, $x_2^\circ = M/p_2$, $v = \ln(M/p_2)$ при $M \le p_1$; $m = p_1(u + \ln(p_2/p_1) + 1)$, $x_1^\bullet = u + \ln(p_2/p_1)$, $x_2^\bullet = p_1/p_2$ при $u > \ln(p_1/p_2)$; $m = p_2 e^u$, $x_1^\bullet = 0$, $x_2^\bullet = e^u$ при $u \le \ln(p_1/p_2)$;

в) $x_1^\circ = M/p_1 - p_1/(4p_2)$, $x_2^\circ = p_1^2/(4p_2^2)$, $v = M/p_1 + p_1/(4p_2)$ при $M > p_1^2/(4p_2)$; $x_1^\circ = 0$, $x_2^\circ = M/p_2$, $v = \sqrt{M/p_2}$ при $M \le p_1^2/(4p_2)$; $x_1^\bullet = u - p_1/(2p_2)$, $x_2^\bullet = p_1^2/(4p_2^2)$, $m = p_1(u - (p_1/4p_2))$ при $u > p_1/(2p_2)$; $x_1^\bullet = 0$, $x_2^\bullet = \sqrt{u}$, $m = p_2 u^2$ при $u \le p_1/(2p_2)$.

Подобные функции полезности называются *квазилинейными*. Их линии безразличия параллельны друг другу, поэтому начиная с некоторого значения дохода (при фиксированных ценах) потребление одного из товаров перестает расти и становится постоянным.

1.9. а) $x_1^\circ = (M + 3p_2)/(3p_1)$, $x_2^\circ = (2M - 3p_2)/(3p_2)$, $v = 4(M + 3p_2)^3/(27 p_1 p_2^2)$ при $M > (3/2)p_2$; $x_1^\circ = M/p_1$, $x_2^\circ = 0$, $v = 9M/p_1$ при $M \le (3/2)p_2$.

б) $x_1^\circ = (M + 2p_2 - 3p_1)/(2p_1)$, $x_2^\circ = (M + 3p_1 - 2p_2)/(2p_2)$, $u = (M + 3p_1 + 2p_2)^2/(4p_1p_2) - 6$ при $M > |2p_2 - 3p_1|$; в противном случае $x_1^\circ = M/p_1$, $x_2^\circ = 0$, $v = 2M/p_1$ при $p_2/p_1 > 3/2$ и $x_1^\circ = 0$, $x_2^\circ = M/p_2$ $v = 3M/p_2$ при $p_2/p_1 < 3/2$.

1.10. а) $x_1^\circ = M/p_1$, $x_2^\circ = 0$, $u = 4M/p_1$, $m = up_1/4$, $x_1^\bullet = u/4$, $x_2^\bullet = 0$ при $p_1/p_2 < 4/5$; $x_1^\circ = 0$, $x_2^\circ = M/p_2$, $u = 5M/p_2$, $m = up_2/5$, $x_1^\bullet = 0$, $x_2^\bullet = u/5$ при $p_1/p_2 > 4/5$; при $p_1/p_2 = 4/5$ имеется бесконечно много решений. Линии безразличия либо пересекаются с бюджетной прямой в крайних точках, либо совпадают с ней.

б) $x_1^\circ = 3M/(3p_1 + 2p_2)$, $x_2^\circ = 2M/(3p_1 + 2p_2)$, $v = 6M/(3p_1 + 3p_2)$, $m = (3p_1 + 3p_2)u/6$, $x_1^\bullet = u/2$, $x_2^\bullet = u/3$. Бюджетная прямая проходит через точку излома линии безразличия (имеющей вид прямого угла).

1.11. Из тождества Роя находим функции спроса по Маршаллу, откуда выражаем цены и подставляем в косвенную функцию полезности: а) $27x_1x_2^2$; б) $256x_1^3x_2$; в) $3125x_1^2x_2^3$.

1.12. Из леммы Шеппарда находим функции спроса по Хиксу, откуда выражаем цены и подставляем в функцию расходов: а) $2^{2/3}x_1^2x_2^4$; б) $2^{2/5}3^{3/5}x_1^{2/5}x_2^{3/5}$; в) $5^{5/12}x_1^{5/12}x_2^{1/12}$.

2. Эффекты замены и дохода. Типы товаров

2.1. а) $\text{ОЭ}_1 = -16$; по Хиксу: $\text{ЭЗ}_1 = 24(3^{-3/5} - 1)$, $\text{ЭД}_1 = 8(1 - 3^{2/5})$, $\Delta H = 60(3^{2/5} - 1)$; по Слуцкому: $\text{ЭЗ}_1 = -9,6$, $\text{ЭД}_1 = -6,4$, $\Delta S = 48$;

б) $\text{ОЭ}_2 = -48$; по Хиксу: $\text{ЭЗ}_2 = 64(4^{-1/5} - 1)$, $\text{ЭД}_2 = 16(1 - 4^{4/5})$, $\Delta H = 80(4^{4/5} - 1)$; по Слуцкому: $\text{ЭЗ}_2 = -9,6$, $\text{ЭД}_2 = -38,4$, $\Delta S = 192$;

в) $ОЭ_1 = -48$; по Хиксу: $ЭЗ_1 = 60(5^{-2/5} - 1)$, $ЭД_1 = 12(1 - 5^{3/5})$, $\Delta H = 100(5^{3/5} - 1)$; по Слуцкому: $ЭЗ_1 = -19,2$, $ЭД_1 = -28,8$, $\Delta S = 240$;

г) $ОЭ_2 = -48$; по Хиксу: $ЭЗ_2 = 64(4^{-1/3} - 1)$, $ЭД_2 = 16(1-4^{2/3})$, $\Delta H = 96(4^{2/3}-1)$; по Слуцкому: $ЭЗ_2 = -16$, $ЭД_2 = -32$, $\Delta S = 192$;

д) $ОЭ_1 = -48$; по Хиксу: $ЭЗ_1 = 60(5^{-1/3} - 1)$, $ЭД_1 = 60(1-5^{2/3})$, $\Delta H = 90(5^{2/3}-1)$; по Слуцкому: $ЭЗ_1 = -16$, $ЭД_1 = -32$, $\Delta S = 240$;

е) $ОЭ_2 = -24$; по Хиксу: $ЭЗ_2 = 64(4^{-1/3} - 1)$, $ЭД_2 = 16(1-4^{2/3})$, $\Delta H = 96(4^{2/3}-1)$; по Слуцкому: $ЭЗ_2 = -15$, $ЭД_2 = -9$, $\Delta S = 120$.

2.2. Предельные эффекты: общий, замены, дохода.

а) -24; -14,4; -9,6; б) -64; -12,8; -51,2; в) -60; -24; -48; г) -64; $-21\frac{1}{3}$; $-42\frac{2}{3}$; д) -60; -20; -40.

2.3. Линии безразличия имеют изломы вдоль гиперболы $x_1 x_2 = 2$, от которой продолжаются горизонтально вправо (аналогично рис. 4). Касание с бюджетной прямой возможно либо в гладкой (левой) части линии безразичия, либо в точке излома. В зависимости от этого возможны две ситуации. При $M^2 \leq 9p_1p_2$ оба товары обычные:

$$x_1^\circ = \frac{M}{3p_1}, \quad x_2^\circ = \frac{2M}{3p_2}.$$

В области $M^2 > 9p_1p_2$ получаем:

$$x_1^\circ = \frac{M - \sqrt{M^2 - 8p_1p_2}}{2p_1}, \quad x_2^\circ = \frac{2}{x_1^\circ}.$$

Для первого товара находим производную

$$\frac{\partial x_1^\circ}{\partial p_1} = \frac{M(M - \sqrt{M^2 - 8p_1p_2})}{2p_1^2\sqrt{M^2 - 8p_1p_2}} > 0.$$

Следовательно, первый товар является товаром Гиффена. Легко проверить, что второй товар обычный.

На рис. 5 представлен график $x_1(p_1)$ при $M = 3$, $p_2 = 1$.

2.4. При $M \leq p_1/2$ покупается только второй товар, так что $x_2^\circ = M/p_2$. В области $M > p_1/2$ получаем

$$x_1^\circ = \frac{M - p_1 + \sqrt{M^2 + 2Mp_1 - p_1^2}}{2p_1},$$
$$x_2^\circ = \frac{M + p_1 - \sqrt{M^2 + 2Mp_1 - p_1^2}}{2p_2}.$$

Потребление первого товара с ростом M увеличивается, так что он нормален. Для второго находим производную

$$\frac{\partial x_2^\circ}{\partial M} = \frac{1}{2p_2}\left(1 - \frac{M + p_1}{\sqrt{M^2 + 2Mp_1 - p_1^2}}\right) < 0.$$

Следовательно, второй товар низкого качества.

На рис. 6 представлен график $x_2^\circ(M)$ при $p_1 = 2$, $p_2 = 1/2$.

2.5. а) $x_1^\circ = 0$, $x_2^\circ = M/p_2$ при $M \leq 3p_1$ и $x_1^\circ = M/p_1 - 3$, $x_2^\circ = 3p_1/p_2$ при $M > 3p_1$. Первый товар — предмет роскоши, второй — первой необходимости.

б) $x_1^\circ = M/p_1$, $x_2^\circ = 0$ при $M \leq p_2^2/p_1$ и $x_1^\circ = (p_2/p_1)^2$, $x_2^\circ = M/p_2 - p_2/p_1$ при $M > p_2^2/p_1$. Первый товар — первой необходимости, второй — предмет роскоши.

в) $x_1^\circ = 2M/(M + 3p_1)$, $x_2^\circ = M(M + p_1)/(p_2(M + 3p_1))$. Первый товар — первой необходимости, второй — предмет роскоши.

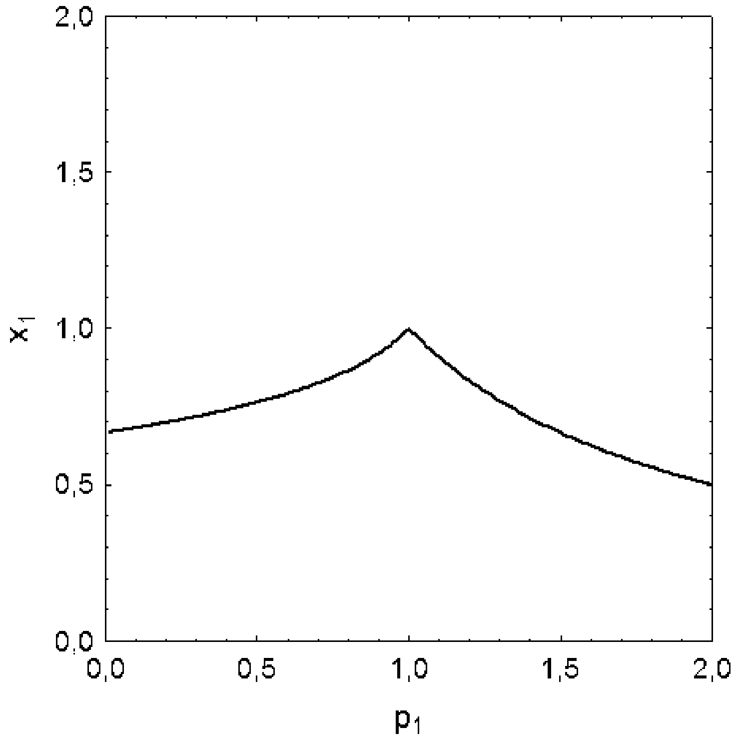

Рис. 5: График $x_1^\circ(p_1)$ в задаче **2.3**.

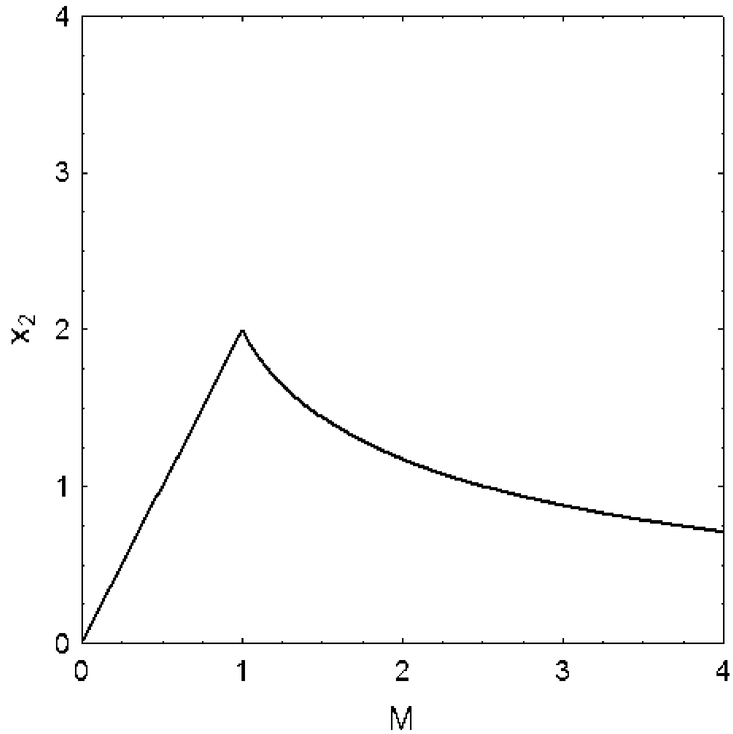

Рис. 6: График $x_2^{\circ}(M)$ в задаче **2.4**.

г) $x_1^\circ = M(M+2p_2)/(p_1(M+5p_2))$, $x_2^\circ = 3M/(M+5p_2)$. Первый товар — предмет роскоши, второй — первой необходимости.

3. Анализ характеристик

3.1. а) $(64, 28)$; б) $(0, 60)$; в) $(120, 0)$; г) $(70, 50)$.

3.2. а) 1. Проведем через точку A_1 линию безразличия и касательную к ней. Если точка A_2 лежит выше касательной, то часть отрезка A_1A_2 или весь он лежит выше линии безразличия, т.е. можно улучшить полезность за счет покупки второго товара. Если точка A_2 лежит ниже касательной, то все точки A_1A_2, кроме A_1, лежат ниже линии безразличия, и второй товар нет смысла покупать. Таким образом, граничное положение точки A_2 — на касательной. Положим для простоты $M = 1$, тогда $A_1(2, 8)$, уравнение касательной $y_2 = 16 - 4y_1$, точка $A_2(3/p_2, 4/p_2)$. Подставляя координаты точки A_2 в уравнение касательной, получаем ответ.

б) 4,6; в) 4.

3.3. Третий товар покупается в зависимости от того, лежит ли точка A_3 выше прямой A_1A_2 или нет. Если A_3 лежит к тому же выше линии безразличия, касающейся A_1A_2, то покупается только третий товар. Если A_3 лежит между A_1A_2 и линией безразличия, то он покупается совместно с товаром, чья точка A_i лежит по другую сторону от точки касания (поскольку часть соединяющего их отрезка лежит выше линии безразличия).

а) Покупается только третий товар: $x = (0, 0, 120)$. Первый и второй товары вытесняются с рынка. б)

Третий товар не покупается, потребительский набор не меняется. в) Покупаются первый и третий товар, $x = (70, 0, 50)$. Второй товар вытесняется с рынка.

3.4. а) 19/17; б) 33/17; в) 18/17.

4. Основы теории оптимизации производства

4.1. а) $\alpha x_2/(\beta x_1)$; б) $(c_1/c_2)(x_2/x_1)^{\alpha+1}$; в) $(x_2+3)/(2x_1)$; г) $2(x_2-5)/(3(x_1-2))$, $x_1 > 2$, $x_2 > 5$; д) $e^{x_2-x_1}$.

4.2. а) 1; б) $1/(\alpha+1)$; в) $1 + 1/x_2 \in (1, +\infty)$; г) $1 - 6/(5x_1) - 2/x_2 \in (0,1)$, $x_1 > 2$, $x_2 > 5$; д) $(x_1 e^{-x_1} + x_2 e^{-x_2})/(x_1 x_2 (e^{-x_1} + e^{-x_2})) \in (0, +\infty)$.

4.3. а) $(\min\{x_1, x_2\})^h$; б) $x_1^{hc_1} x_2^{hc_2}$; в) $(c_1 x_1 + c_2 x_2)^h$.

4.4. а) $5x_1^{1/4} x_2^{3/4}$; б) $3x_1^{1/2} x_2^{1/3}$; в) $(1/2) x_1^{1/6} x_2^{2/3}$.

4.5. а) $\alpha + \beta < 1$; б) $\alpha < 1$.

4.6. а) $h < 1$; б) $\alpha, h > 0$ и $\alpha \in (-1, 0), h \in (0, 1)$.

4.7. а) $x_1^\circ = p_0^6 p_1^{-4} p_2^{-2}/144$, $x_2^\circ = p_0^6 p_1^{-3} p_2^{-3}/216$, $Q = p_0^5 p_1^{-3} p_2^{-2}/72$, $PR = p_0^6 p_1^{-3} p_2^{-2}/432$, $e_{p_0}(PR) = 6$, $e_{p_1}(PR) = -3$, $e_{p_2}(PR) = -2$;

б) $x_1^\circ = (2592/3125) p_0^5 p_1^{-4} p_2^{-1}$, $x_2^\circ = (864/3125) p_0^5 p_1^{-3} p_2^{-2}$, $Q = (432/625) p_0^4 p_1^{-3} p_2^{-1}$, $PR = (864/3125) p_0^5 p_1^{-3} p_2^{-1}$, $e_{p_0}(PR) = 5$, $e_{p_1}(PR) = -3$, $e_{p_2}(PR) = -1$;

в) $x_1^\circ = (8 \cdot 2^{2/3}/9) p_0^2 p_1^{-5/3} p_2^{-1/3}$, $x_2^\circ = (4 \cdot 2^{2/3}/9) p_0^2 p_1^{-2/3} p_2^{-4/3}$, $Q = (2 \cdot 2^{2/3}/3) p_0 p_1^{-2/3} p_2^{-1/3}$, $PR = (2 \cdot 2^{2/3}/9) p_0^2 p_1^{-2/3} p_2^{-1/3}$, $e_{p_0}(PR) = 2$, $e_{p_1}(PR) = -2/3$, $e_{p_2}(PR) = -1/3$.

4.8.

а) $x_1^\circ = p_0^2/(4\sqrt{p_1}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3)$, $x_2^\circ = p_0^2/(4\sqrt{p_2}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3)$, $Q = p_0/(2(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2)$, $PR = p_0^2/(4(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2)$;

б) $x_1^\circ = (1/2)(p_0/(3p_1 + 2p_2))^{6/5}$, $x_2^\circ = (1/3)(p_0/(3p_1 + 2p_2))^{6/5}$, $Q = (p_0/(3p_1 + 2p_2))^{1/5}$, $PR = (5/6) p_0^{6/5}/(3p_1 + 2p_2)^{1/5}$.

4.9. а) $x_1^\circ = (p_0/2p_1)^2 x_2^{2/3}$, $Q = (p_0/2p_1)x_2^{2/3}$;

б) $x_1^\circ = (6p_0/5p_1)^{3/2} x_2^{1/2}$, $Q = 2^{5/2}3^{3/2}(p_0/p_1)^{3/2} x_2^{1/2}$;

в) $x_1^\circ = 8(p_0/3p_1)^{3/2} x_2^{1/4}$, $Q = 8(p_0/3p_1)^{1/2} x_2^{1/2}$.

4.10. а) $x_1^\circ = x_2\sqrt{(p_0/p_1)^{2/3} - 1}$, $Q = x_2\sqrt{1 - (p_1/p_0)^{2/3}}$ при $p_0 > p_1$; $x_1^\circ = 0$, $Q = 0$ при $p_0 \le p_1$;

б) $x_1^\circ = \min\{(p_0/3p_1)^{3/2}, x_2\}$, $Q = \min\{(p_0/3p_1)^{1/2}, x_2^{1/3}\}$.

На рис. 7 представлен график $Q(p_1)$ при $p_0 = 1$, $x_2 = 1$, а на рис. 8 — график $Q(p_0)$ при $p_1 = 1$, $x_2 = 1$ в задаче **4.10а**.

В этом примере представляет интерес тот факт, что при фиксированной цене продукта существует критическая цена труда, выше которой производство невыгодно; и наоборот, при фиксированной цене труда существует критическая цена продукта, начиная с которой производство становится выгодно и растет (сначала очень быстро, затем все медленнее).

4.11. а) $x_1^\circ = 6C/(7p_1)$, $x_2^\circ = C/(7p_2)$, $Q = (36/7^{7/3})p_1^{-2}p_2^{-1/3}C^{7/3}$; $x_2 = x_1/6$; $e_{p_1}(Q) = -2$, $e_{p_2}(Q) = -1/3$, $e_C(Q) = 7/3$;

б) $x_1^\circ = 2C/(5p_1)$, $x_2^\circ = 3C/(5p_2)$, $Q = (9 \cdot 2^{2/5}3^{3/5}/5)p_1^{-2/5}p_2^{-3/5}C$; $x_2 = (3/2)x_1$; $e_{p_1}(Q) = -2/5$, $e_{p_2}(Q) = -3/5$, $e_C(Q) = 1$;

в) $x_1^\circ = 4C/(5p_1)$, $x_2^\circ = C/(5p_1)$, $Q = (64/5^{5/6})p_1^{2/3}p_2^{1/6}C^{5/6}$; $x_2 = x_1/4$; $e_{p_1}(Q) = -2$, $e_{p_2}(Q) = -1/3$, $e_C(Q) = 5/6$.

4.12. а) $x_1^\circ = C/(p_1 + \sqrt{p_1p_2})$, $x_2^\circ = C/(p_2 + \sqrt{p_1p_2})$, $Q = C^{1/3}/(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^{2/3}$; $x_2 = (\sqrt{p_1/p_2})x_1$;

б) $x_1^\circ = 7C/(7p_1 + 4p_2)$, $x_2^\circ = 4C/(7p_1 + 4p_2)$, $Q = (28C/(7p_1 + 4p_2))^{2/3}$; $x_2 = (4/7)x_1$.

4.13. а) $x_1^\bullet = (6p_2/p_1)^{1/7}Q^{3/7}$, $x_2^\bullet = (p_1/6p_1)^{6/7}Q^{3/7}$,

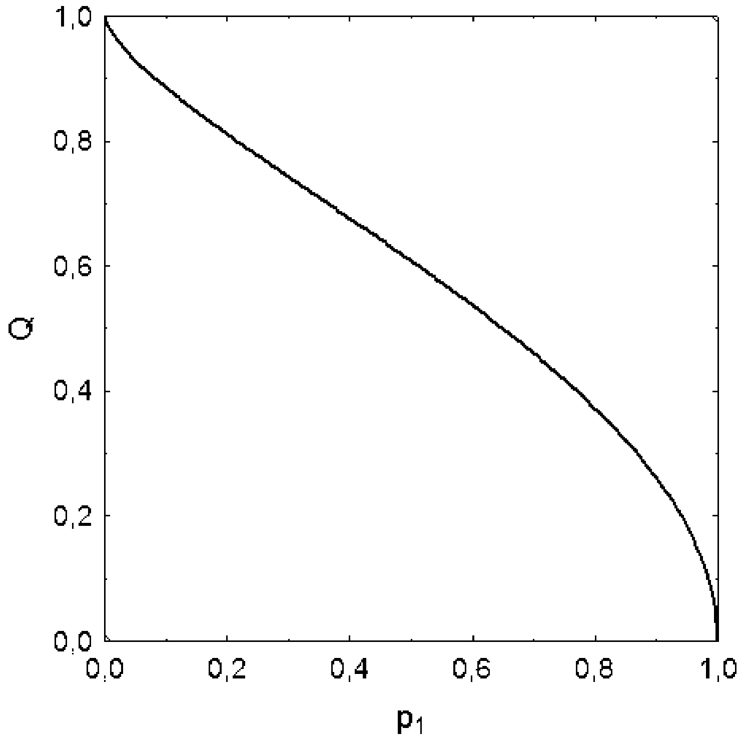

Рис. 7: График $Q(p_1)$ в задаче **4.10a**.

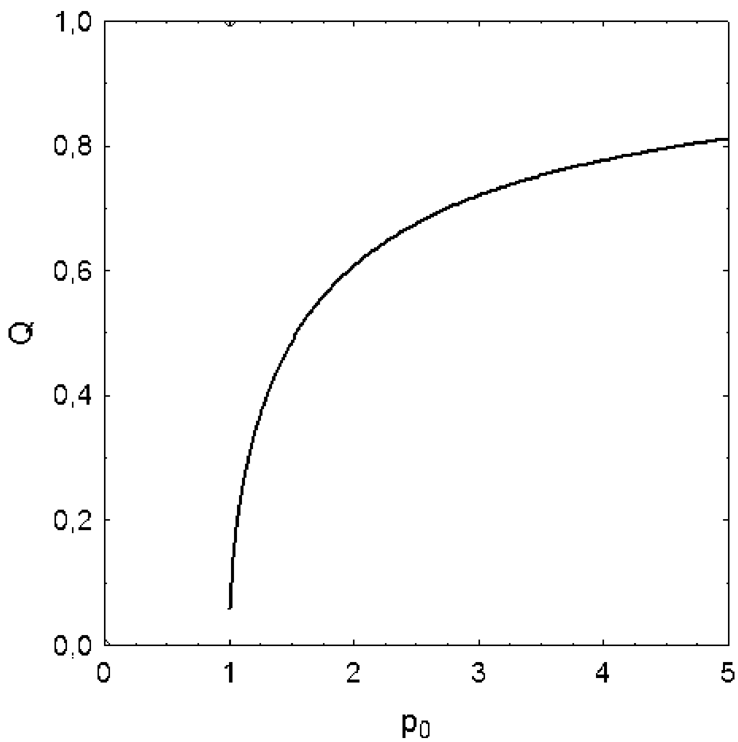

Рис. 8: График $Q(p_0)$ в задаче **4.10a**.

$C = 7 \cdot (2/3)^{6/7} p_1^{6/7} p_2^{1/7} Q^{3/7}$; $e_{p_1}(C) = 6/7$, $e_{p_2}(C) = 1/7$, $e_Q(C) = 3/7$;

б) $x_1^\bullet = (2p_2/3p_1)^{3/5} Q$, $x_2^\bullet = (3p_1/2p_1)^{2/5} Q$, $C = (5 \cdot 2^{-2/5} 3^{7/5}) p_1^{2/5} p_2^{3/5} Q$; $e_{p_1}(C) = 2/5$, $e_{p_2}(C) = 3/5$, $e_Q(C) = 1$;

в) $x_1^\bullet = (4p_2/p_1)^{1/5} Q^{6/5}$, $x_2^\bullet = (p_1/4p_1)^{4/5} Q^{6/5}$, $C = (5 \cdot 2^{7/5}) p_1^{4/5} p_2^{1/5} Q^{6/5}$; $e_{p_1}(C) = 4/5$, $e_{p_2}(C) = 1/5$, $e_Q = 6/5$.

4.14. а) $x_1^\bullet = (1 + \sqrt{p_2/p_1}) Q^3$, $x_1^\bullet = (1 + \sqrt{p_1/p_2}) Q^3$, $C = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2 Q^3$; б) $x_1^\bullet = Q^{3/2}/4$, $x_2^\bullet = Q^{3/2}/7$, $C = (7p_1 + 4p_2) Q^{3/2}/28$.

4.15. а) $Q = 0$, $PR = -3$ при $p \le 4\sqrt{2}$; $Q = p/8$, $PR = p^2/16 - 5$ при $p > 4\sqrt{2}$;

б) $Q = 0$, $PR = -1$ при $p \le 3^{5/3} 7^{1/3} 2^{-2/3}$; $Q = \sqrt{p/21}$, $PR = 2p^{2/3}/(3\sqrt{21})$ при $p > 3^{5/3} 7^{1/3} 2^{-2/3}$;

в) $Q = 0$, $PR = -2$ при $p \le 2\sqrt{2}$; $Q = p/4$, $PR = p^2/8 - 3$ при $p > 2\sqrt{2}$;

г) $Q = 0$, $PR = -4$ при $p \le 3^{5/3} 5^{1/3} 2^{-2/3}$; $Q = \sqrt{p/15}$, $PR = 2p^{2/3}/(3\sqrt{15})$ при $p > 3^{5/3} 5^{1/3} 2^{-2/3}$.

5. Статические модели рынка

5.1. а) $x_2 = (7/5)x_1$; $p_1/p_2 = 7/5$;

б) $x_2 = 27x_1/(2+4x_1)$; $p_1/p_2 = 9/(2+4x_1) \in (1/2, 9/2)$;

в) $x_2 = 10x_1/(12+x_1)$; $p_1/p_2 = 8/(12+x_1) \in (8/15, 2/3)$;

г) $x_2 = 8x_1/(21-x_1)$; $p_1/p_2 = 8/(21-x_1) \in (8/21, 4/7)$;

д) $x_2 = 96x_1/(2 + 11x_1)$; $p_1/p_2 = 24/(2 + 11x_1) \in (1, 12)$;

е) $x_2 = (5/6)x_1$; $p_1/p_2 = 5/6$.

В общем случае, если $u_1(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\beta_1}$, $u_2(y_1, y_2) = y_1^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$ при $\alpha_1/\beta_1 \ne \alpha_2/\beta_2$ контрактная линии представляет собой отрезок гиперболы (выпуклой или вогнутой), а отношение цен лежит в интервале между числами $(\alpha_1/\beta_1)(a_2/a_1)$ и $(\alpha_2/\beta_2)(a_2/a_1)$, отражающими различные взгляды потребителей на ценность товаров. При $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2$ контрактная линия становится прямой, а интервал цен стягивается в точку (взгляды совпадают).

На рис. 9 представлен график контрактной линии в задаче **5.1б**.

5.2 а) $x_2 = 3x_1$, $p_1^{\mathrm{res}}/p_2^{\mathrm{res}} = 3$, $p_1^{\mathrm{pr}}/p_2^{\mathrm{pr}} = 4^{-1/3}$, $q_1^* = 12^{1/3}5^{-2/3}$, $q_2^* = 4{\cdot}3^{1/3}5^{-2/3}$, $x^* = (2/5, 6/5)$, $y^* = (8/5, 24/5)$.

б) $x_2 = (3/7)x_1$, $p_1^{\mathrm{res}}/p_2^{\mathrm{res}} = 3/7$, $p_1^{\mathrm{pr}}/p_2^{\mathrm{pr}} = (2/3)^{1/2}$, $q_1^* = 2^{1/2}21^{1/4}5^{-1/2}$, $q_2^* = 3^{3/4}7^{1/4}5^{-1/2}$, $x^* = (14/5, 6/5)$, $y^* = (21/5, 9/5)$;

в) $x_2 = (1/2)x_1$, $p_1^{\mathrm{res}}/p_2^{\mathrm{res}} = 1/2$, $p_1^{\mathrm{pr}}/p_2^{\mathrm{pr}} = (4/3)^{1/3}$, $q_1^* = 2^{5/3}5^{2/3}7^{-2/3}$, $q_2^* = 3^{2/3}50^{1/3}7^{-2/3}$, $x^* = (40/7, 20/7)$, $y^* = (30/7, 15/7)$;

г) $x_2 = (3/2)x_1$, $p_1^{\mathrm{res}}/p_2^{\mathrm{res}} = 3/2$, $p_1^{\mathrm{pr}}/p_2^{\mathrm{pr}} = 3^{-1/2}$, $q_1^* = (3/2)^{1/4}$, $q_2^* = 3^{3/4}2^{-1/4}$, $x^* = (1, 3/2)$, $y^* = (3, 9/2)$;

д) $x_2 = 3x_1$, $p_1^{\mathrm{res}}/p_2^{\mathrm{res}} = 3$, $p_1^{\mathrm{pr}}/p_2^{\mathrm{pr}} = (2/3)^{1/3}$, $q_1^* = 2^{2/3}147^{1/3}5^{-2/3}$, $q_2^* = 3 \cdot 7^{2/3}5^{-2/3}$, $x^* = (14/5, 42/5)$, $y^* = (21/5, 63/5)$;

е) $x_2 = 4x_1$, $p_1^{\mathrm{res}}/p_2^{\mathrm{res}} = 4$, $p_1^{\mathrm{pr}}/p_2^{\mathrm{pr}} = 2$, $q_1^* = 2 \cdot (6/5)^{1/2}$, $q_2^* = (6/5)^{1/2}$, $x^* = (12/5, 48/5)$, $y^* = (3/5, 12/5)$.

На рис. 10 представлен график границы технологического множества (сплошная линия) и касающейся ее линии безразличия потребителя (пунктир) в задаче **5.2б**.

5.3. а) $p^* = (11/21, 10/21)$, $y^\circ = (-25/121, 5/11)$, $x_1^\circ = (183/484, 183/440)$, $x_2^\circ = (201/484, 201/220)$; б) $p^* = (14/23, 9/23)$, $y^\circ = (1 - 3/\sqrt{7}, 2 - 2\sqrt{7}/3)$, $x_1^\circ = (13/7 - 2/\sqrt{7}, 13/9 - 2\sqrt{7}/9)$, $x_2^\circ = (8/7 - 1/\sqrt{7}, 32/9 -$

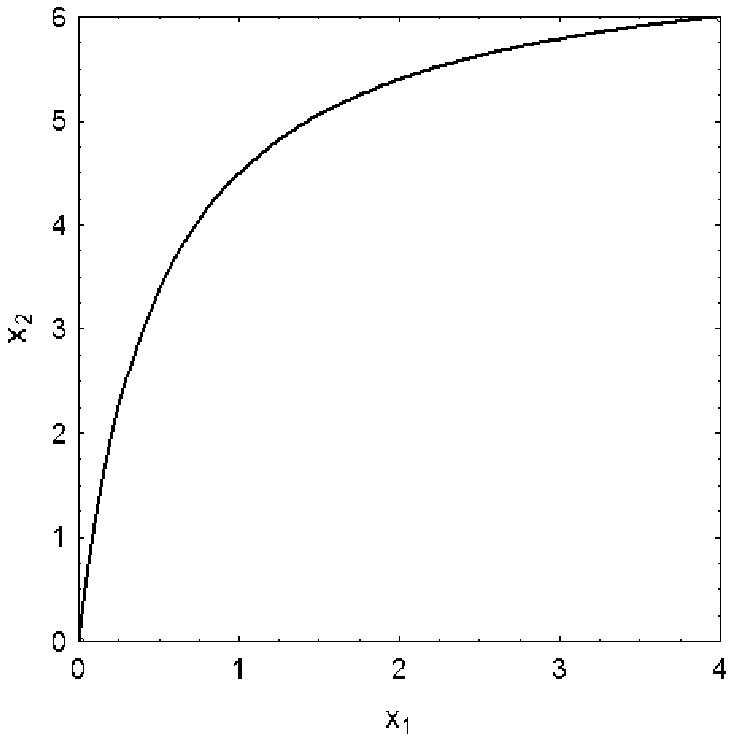

Рис. 9: График контрактной линии в задаче **5.1б**.

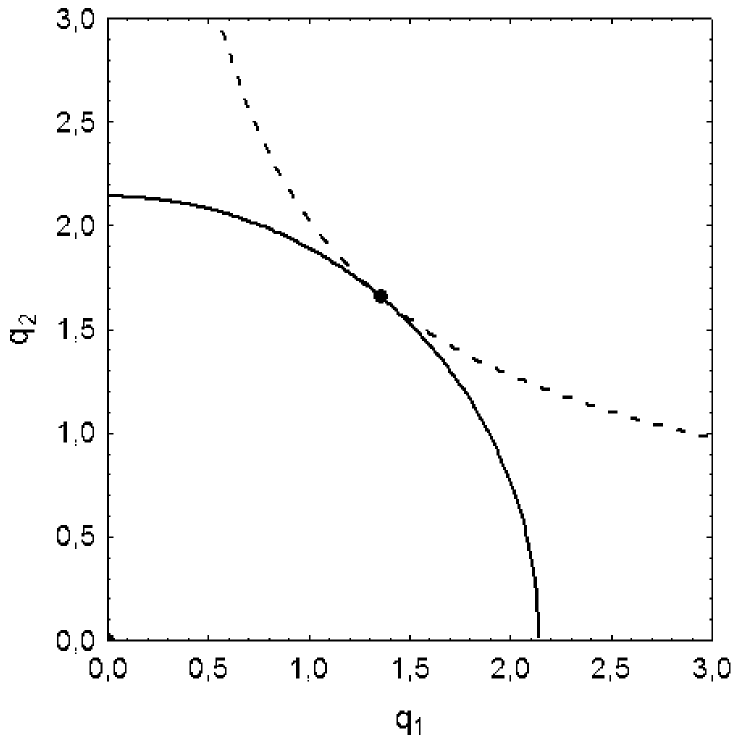

Рис. 10: График касания кривых в задаче **5.2б**.

$4\sqrt{7}/9)$; в) $p^* = (3/(3+2\sqrt{11}), 2\sqrt{11}/(3+2\sqrt{11}))$, $y^\circ = (-2/9, \sqrt{11}/3-1)$, $x_1^\circ = (38/27, 19/(18\sqrt{11}))$,
$x_2^\circ = (47/54, 47/(18\sqrt{11}))$; г) $p^* = (1/2, 1/2)$, $y^0 = (0,0)$, $x_1^\circ = (2/3, 2/3)$, $x_2^\circ = (1, 1/3)$.

6. Модели динамики рыночных цен

6.1. Точки равновесия определяются с точностью до постоянного множителя: а) $(1,2,1)$; б) $(1,3,2)$; в) $(9,16,11)$; г) $(2,1,3)$. Во всех случаях выполняется закон Вальраса, имеет место локальная и глобальная устойчивость.

6.2. а) $G_0(q_1,q_2) = q_1 + 3q_2 - 5$, $G_1(q_1,q_2) = (1 + 3q_2)/q_1 - 2$, $G_2(q_1,q_2) = (4+q_1)/q_2 - 6$; $(2,1)$;

б) $G_0(q_1,q_2) = q_1 + q_2 - 5$, $G_1(q_1,q_2) = (4+q_2)/q_1 - 2$, $G_2(q_1,q_2) = (1+q_1)/q_2 - 2$; $(3,2)$;

в) $G_0(q_1,q_2) = q_1 + q_2 - 3$, $G_1(q_1,q_2) = (1+5q_2)/q_1 - 4$, $G_2(q_1,q_2) = (2+3q_1)/q_2 - 6$; $(16,11)$;

г) $G_0(q_1,q_2) = q_1 + q_2 - 3$, $G_1(q_1,q_2) = (1+2q_2)/q_1 - 8$, $G_2(q_1,q_2) = (1+7q_1)/q_2 - 3$; $(1,3)$;

Во всех случаях имеется локальная устойчивость.

6.3. а) 4; устойчива; б) 3; неустойчива; в) 2; устойчива; г) 3; неустойчива.

6.4. а) 1; устойчива; б) 2; неустойчива; в) 2/3; устойчива; г) 5; неустойчива; д) 3; неустойчива.

6.5. а) 5; устойчива; б) 2,6; неустойчива; в) 10; устойчива; г) 9; устойчива; д) 4; неустойчива; е) 8; устойчива; ж) 3; неусточива; и) 2; устойчива.

7. Простейшие модели производственной сферы

7.1. а) $(75,75)$, $S = 375$; б) $(0,20)$, $S = 100$; в) $(10,30)$, $S = 50$.

7.2. а) $(0, 10, 0)$, $S = 100$; б) $(85, 0, 5)$, $S = 90$; в) $(0, 4, 19)$, $S = 23$.

7.3. а) $(0, 10, 50, 0$, $S = 360$; б) $(5, 10, 15)$, $S = 450$.

7.4. а) $(0; 5; 12,5; 0)$, $S = 225$; б) $(12,8; 0; 0; 0)$, $S = 384$.

7.5. а) $(5/8, 3/8)$; 1,5; б) $(2/3, 1/3)$; 1,4; в) $(1/2, 1/2)$; 1,9; г) $(2/3, 1/3)$; 1,3; д) $(1/2, 1/2)$; 1,8; е) $(5/11, 6/11)$; 2.

7.6. а) $(1/3, 2/3)$; 1; б) $(1/3, 2/3)$; $4/3$; в) $(1/4, 1/4)$; $3/4$; г) $(1/4, 3/4)$; 1; д) $(1/2, 1/2)$; $3/2$; е) $(1/2, 1/2)$; 2. Выгодно в случаях б), д), е).

8. Элементы теории игр

8.1. а) A_2B_2; б) A_2B_2; в) A_1B_1 и A_2B_2; г) нет равновесия Нэша.

8.2. а) нет; б) нет;

в) $x^0 = (1/7, 6/7)$, $y^0 = (6/7, 1/7)$, $f^0 = (17/7, 17/7)$;

г) $x^0 = (7/19, 12/19)$, $y^0 = (11/16, 5/16)$, $f^0 = (85/16, 109/19)$.

8.3. Точка угрозы, решение Нэша, средние выигрыши для смешанных стратегий: а) A_2B_2; A_1B_1; б) A_2B_2; A_1B_1; в) A_2B_1; $\mathbf{P}(A_1B_1) = \mathbf{P}(A_2B_2) = 1/2$, $f^0 = (4, 4)$; г) A_1B_1; $\mathbf{P}(A_2B_1) = 9/14$, $\mathbf{P}(A_2B_2) = 5/14$, $f^0 = (11/14, 15/14)$.

8.4. а) A_2 доминирует; б) A_3 по всем критериям; в) A_1 по критерию Вальда, A_3 по критериям Сэвиджа и Гурвица.

8.5. а) $(1/2, 1/2)$; б) $(5/9, 4/9)$; в) $(11/18, 7/18)$.

8.6. а) $(1/3, 1/3, 1/3)$; б) $(1/6, 1/6, 2/3)$;
в) $(1/12, 1/4, 1/4, 5/12)$; г) $(0, 1/3, 1/3, 1/3)$.

8.7. $(350, 475, 175)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ
Образцы контрольных работ

Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Функция полезности $u(x_1, x_2)$ имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = (9x_1^{-1} + 16x_2^{-1})^{-2}$$

Найти:

а) функции спроса по Маршаллу;

б) косвенную функцию полезности;

в) функции спроса по Хиксу;

г) функцию расходов.

2. Функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$. Пусть $M = 120$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$. Изменилась цена на 1-й товар, новая цена: $q_1 = 3$.

а) Найти ОЭ$_1$.

Найти компенсации, ЭЗ$_1$, ЭД$_1$:

б) по Хиксу,

в) по Слуцкому.

Вариант 2

1. Функция полезности $u(x_1, x_2)$ имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = (2\sqrt{x_1} + 5\sqrt{x_2})^2$$

Найти:

а) функции спроса по Маршаллу;

б) косвенную функцию полезности;

в) функции спроса по Хиксу;

г) функцию расходов.

2. Функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2$. Пусть $M = 200$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$. Изменилась цена на 1-й товар, новая цена: $q_1 = 5$.

а) Найти ОЭ$_1$.

Найти компенсации, ЭЗ$_1$, ЭД$_1$:

б) по Хиксу,

в) по Слуцкому.

Вариант 3

1. Функция полезности $u(x_1, x_2)$ имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = 3 \ln x_1 + 7 \ln x_2$$

Найти:

а) функции спроса по Маршаллу;

б) косвенную функцию полезности;

в) функции спроса по Хиксу;

г) функцию расходов.

2. Функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. Пусть $M = 180$, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$. Изменилась цена на 1-й товар, новая цена: $q_1 = 5$.

а) Найти ОЭ$_1$.

Найти компенсации, ЭЗ$_1$, ЭД$_1$:

б) по Хиксу,

в) по Слуцкому.

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Для производственной функции $f(x_1, x_2) = (2x_1^{-1} + 5x_2^{-1})^{-1/3}$ решить задачу максимизации прибыли на долгосрочном промежутке.

2. Для производственной функции $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/4}$ решить задачу максимизации выпуска Q при фиксированных издержках C. Найти эластичность выпуска по ценам ресурсов.

3. Издержки $C = 2Q^3 + 9$ при $Q > 0$ и $C = 4$ при $Q = 0$. Найти оптимальный выпуск в зависимости от цены продукта.

Вариант 2

1. Для производственной функции $f(x_1, x_2) = (x_1^{-2} + 9x_2^{-2})^{-1/4}$ решить задачу максимизации прибыли на долгосрочном промежутке.

2. Для производственной функции $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3}x_2^{1/4}$ решить задачу минимизации издержек C при фиксированном выпуске Q. Найти эластичность издержек по выпуску.

3. Издержки $C = 3Q^2 + 4$ при $Q > 0$ и $C = 1$ при $Q = 0$. Найти оптимальный выпуск в зависимости от цены продукта.

Вариант 3

1. Для производственной функции $f(x_1, x_2) = (3x_1^{-1} + 4x_2^{-1})^{-1/2}$ решить задачу максимизации прибыли на долгосрочном промежутке.

2. Для производственной функции $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/3}$

решить задачу максимизации выпуска Q при фиксированных издержках C. Найти эластичность выпуска по ценам ресурсов.

3. Издержки $C = 3Q^3 + 8$ при $Q > 0$ и $C = 6$ при $Q = 0$. Найти оптимальный выпуск в зависимости от цены продукта.

Контрольная работа №3

Вариант 1

1. Рассмотреть модель обмена с двумя потребителями, если: $u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2^3$, $u_2(y_1, y_2) = y_1^3 y_2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 9$. Найти контрактные линии и отношение цен на товары. Определить диапазон возможных отношений цен.

2. Рассмотреть модель рынка с двумя ресурсами, двумя производителями и одним потребителем, если: $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/3}$, $u(q_1, q_2) = q_1 q_2^4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 12$. Найти контрактные линии и отношения цен на ресурсы, оптимальные объемы выпуска и отношения цен на продукты, оптимальное распределение ресурсов.

3. Рассмотреть модель ненормированного процесса цен:

$$F_0(p_0, p_1, p_2) = (p_1 + 3p_2)/p_0 - 5;$$
$$F_1(p_0, p_1, p_2) = (p_0 + 3p_2)/p_1 - 2;$$
$$F_2(p_0, p_1, p_2) = (4p_0 + p_1)/p_2 - 6.$$

Проверить выполнение закона Вальраса. Найти точку равновесия, проверить ее локальную и глобальную устойчивость.

4. Рассмотреть нелинейную паутинообразную мо-

дель: $D(p) = 110/p - 2$, $S(p) = 4p$. Найти равновесную цену и проверить ее устойчивость.

Вариант 2

1. Рассмотреть модель обмена с двумя потребителями, если: $u_1(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^5$, $u_2(y_1, y_2) = y_1 y_2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 4$. Найти контрактные линии и отношение цен на товары. Определить диапазон возможных отношений цен.

2. Рассмотреть модель рынка с двумя ресурсами, двумя производителями и одним потребителем, если: $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/4}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/4}$, $u(q_1, q_2) = q_1^2 q_2^3$, $a_1 = 14$, $a_2 = 6$. Найти контрактные линии и отношения цен на ресурсы, оптимальные объемы выпуска и отношения цен на продукты, оптимальное распределение ресурсов.

3. Рассмотреть модель ненормированного процесса динамики цен:

$$\begin{gathered}F_0(p_0, p_1, p_2) = (p_1 + p_2)/p_0 - 5;\\ F_1(p_0, p_1, p_2) = (4p_0 + p_2)/p_1 - 2;\\ F_2(p_0, p_1, p_2) = (p_0 + p_1)/p_2 - 2.\end{gathered}$$

Проверить выполнение закона Вальраса. Найти точку равновесия, проверить ее локальную и глобальную устойчивость.

4. Рассмотреть нелинейную паутинообразную модель: $D(p) = 52/p$, $S(p) = 10p - 6$. Найти равновесную цену и проверить ее устойчивость.

Вариант 3

1. Рассмотреть модель обмена с двумя потребителями, если: $u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $u_2(y_1, y_2) = y_1^2 y_2^3$, $a_1 = 14$, $a_2 = 8$. Найти контрактные линии и отношение цен на товары. Определить диапазон возможных отношений цен.

2. Рассмотреть модель рынка с двумя ресурсами, двумя производителями и одним потребителем, если: $q_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$, $q_2(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{1/3}$, $u(q_1, q_2) = q_1^4 q_2^3$, $a_1 = 20$, $a_2 = 10$. Найти контрактные линии и отношения цен на ресурсы, оптимальные объемы выпуска и отношения цен на продукты, оптимальное распределение ресурсов.

3. Рассмотреть модель ненормированного процесса динамики цен:

$$\begin{aligned} F_0(p_0, p_1, p_2) &= (p_1 + p_2)/p_0 - 3; \\ F_1(p_0, p_1, p_2) &= (p_0 + 5p_2)/p_1 - 4; \\ F_2(p_0, p_1, p_2) &= (2p_0 + 3p_1)/p_2 - 6. \end{aligned}$$

Проверить выполнение закона Вальраса. Найти точку равновесия, проверить ее локальную и глобальную устойчивость.

4. Рассмотреть нелинейную паутинообразную модель: $D(p) = 310/p - 14$, $S(p) = 2p - 4$. Найти равновесную цену и проверить ее устойчивость.

Контрольная работа №4

Вариант 1

1. Затраты двух ресурсов на производство единицы продукции для трех производственных методов соста-

вляют: 2 и 4, 3 и 2, 1 и 5. Найти оптимальный план работ для максимизации выпуска продукции при объемах ресурсов 10 и 15.

2. Каждая единица производственной мощности способна произвести 9 единиц продукции в единицу времени, при этом мощность сокращается на 10%. На 10 единиц продукции можно приобрести одну единицу производственной мощности. Найти оптимальное соотношение производственных методов и максимальный показатель пропорционального роста производства.

Вариант 2

1. Затраты двух ресурсов на производство единицы продукции для трех производственных методов составляют: 3 и 8, 2 и 10, 1 и 15. Найти оптимальный план работ для максимизации выпуска продукции при объемах ресурсов 10 и 25.

2. Каждая единица производственной мощности способна произвести 7 единиц продукции в единицу времени, при этом мощность сокращается на 10%. На 10 единиц продукции можно приобрести одну единицу производственной мощности. Найти оптимальное соотношение производственных методов и максимальный показатель пропорционального роста производства.

Вариант 3

1. Затраты двух ресурсов на производство единицы продукции для трех производственных методов составляют: 5 и 4, 4 и 6, 3 и 9. Найти оптимальный план работ для максимизации выпуска продукции при объемах ресурсов 20 и 16.

2. Каждая единица производственной мощности способна произвести 9 единиц продукции в единицу времени, при этом мощность сокращается на 20%. На 5 единиц продукции можно приобрести одну единицу производственной мощности. Найти оптимальное соотношение производственных методов и максимальный показатель пропорционального роста производства.

Список литературы

[1] *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: Макс-пресс, 2005.

[2] *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1980.

[3] *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* Микроэкономика. СПб.: Экономическая школа, 1994.

[4] *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1997.

[5] Количественные методы в экономических исследованиях / Под ред. Грачевой М.В., Фадеевой Л.Н., Черемных Ю.Н. М.: ЮНИТИ, 2004.

[6] *Лебедев А.В.* Неклассические примеры функций полезности // Вестник МГУ. Сер.6. Экономика. 1999, №5, с.105–107.

[7] *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971 (переиздание: М.: Вузовская книга, 2004).

[8] *Чеканский А.Н., Фролова Н.Л.* Теория спроса, предложения и рыночных структур. М.: ТЕИС, 2003.

[9] *Черемных Ю.Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: Инфра-М, 2007.

[10] Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. Федосеева В.В. М.: ЮНИТИ, 1999.

ЛЕБЕДЕВ Алексей Викторович

Сборник задач по математической экономике

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ.

Подписано в печать 31.10.2007 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 5 п.л.
Заказ Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, г. Москва, Воробьевы горы

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова