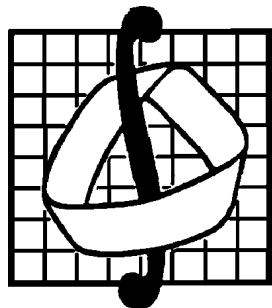


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет

А.В.ЛЕБЕДЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ДЕМОГРАФИИ

М о с к в а 2004 год

**Лебедев А.В.**

**Сборник задач по математической демографии**

Учебное пособие. — Издательство механико-математического факультета МГУ, Москва, 2004. — 96 стр.

Настоящий сборник включает в себя более ста задач в различных областях математической демографии. Представлены основные теоретические модели рождаемости и смертности, а также модели движения населения. Помимо классических разделов, сборник содержит дополнения, относящиеся к вопросам роста численности населения Земли, социально-экономическим аспектам демографии и страхованию жизни. Приведены таблицы различных демографических показателей. Используются данные Госкомстата России.

Для студентов экономического потока механико-математического факультета МГУ, а также всех интересующихся математическими моделями демографии.

Рецензенты

Главный научный сотрудник ЦЭМИ РАН, д.ф.-м.н., профессор *О.В.Староверов*

Кафедра народонаселения экономического факультета МГУ, зав. кафедрой, д.э.н., профессор *В.А.Ионцев*

Лаборатория анализа и прогнозирования смертности Центра демографии и экологии человека ИНП РАН,

зав. лабораторией, к.ф.-м.н. *Е.М.Андреев*

старший научный сотрудник, к.ф.-м.н. *Е.Л.Сороко*

---

© (2004) А.В.Лебедев

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
1. Модели роста численности населения .....	8
2. Модели смертности .....	11
3. Модели рождаемости .....	16
4. Модели движения активного населения .....	22
5. Модели естественного движения населения .....	26
6. Общие модели движения населения .....	30
7. Объединение и расщепление групп .....	34
8. Регулирование движения населения .....	37
9. Мотивация движения населения .....	41
10. Социально-экономическое расслоение .....	44
11. Некоторые модели страхования .....	47
Ответы и решения .....	51
Приложение .....	84
Список литературы .....	94

## Введение

В своем выступлении при представлении ежегодного Послания Федеральному Собранию 8 июля 2000 года Президент Российской Федерации В.В.Путин, в частности, сказал:

*”Мы привыкли смотреть на Россию как на систему органов власти или как на хозяйственный организм. Но Россия — это прежде всего люди, которые считают ее своим домом. Их благополучие и достойная жизнь — главная задача власти, любой власти. Однако сегодня в нашем доме далеко до комфорта. Еще очень многим трудно растить детей, обеспечивать достойную старость своим родителям. Трудно жить.*

*Нас, граждан России, из года в год становится все меньше и меньше. Уже несколько лет численность населения страны в среднем ежегодно уменьшается на 750 тысяч человек. Если верить прогнозам — а прогнозы основаны на реальной работе людей, которые в этом разбираются, — уже через 15 лет россиян может стать меньше на 22 миллиона человек.*

*Вдумайтесь в эту цифру: это — седьмая часть населения страны. Если нынешняя тенденция сохранится, выживаемость нации окажется под угрозой. Нам реально грозит стать дряхлеющей нацией. Сегодня демографическая ситуация — одна из тревожных.”*

Таким образом, актуальной и жизненно важной задачей сегодня в нашей стране оказывается развитие демографической науки, осознание закономерностей динамики народонаселения и противодействие существующим

ющим негативным тенденциям в этом плане.

Немаловажной для будущего задачей является также передача молодому поколению накопленных в этой сфере знаний и понимания серьезности демографических проблем в России и за рубежом.

Преподавание предмета "Математические модели демографии" на экономическом потоке механико-математического факультета МГУ было введено в 1995 году. Настоящий сборник задач создан доцентом А.В.Лебедевым на основе семинарских занятий, которые проводились им в 1998–2004 гг. (сначала в дополнение к лекционному курсу профессора О.В.Староверова, а затем к собственному курсу). По своей структуре и содержанию сборник в основном соответствует учебнику О.В.Староверова "Азы математической демографии" [1], а также содержит дополнения, относящиеся к вопросам роста численности населения Земли [3], социально-экономическим аспектам демографии [2] (в частности, проблеме расслоения общества по доходам в условиях рыночной экономики) и страхованию жизни [9, 10]. Представлены основные теоретические модели рождаемости и смертности [4, 11, 12]. Приложение содержит таблицы различных демографических показателей. Используются данные источников [1, 2, 3, 9, 12], а также информация из официальных изданий Госкомстата [5, 6].

В сборник включены как "абстрактные" теоретические задачи, посвященные математическому анализу моделей и выводу формул, так и "конкретные" прикладные, опирающиеся на реальные (или правдоподобные) данные, требующие вычисления определенных де-

мографических показателей. При этом студенты имеют возможность применить полученные ранее знания в математическом анализе, решении дифференциальных и разностных уравнений (в том числе векторно-матричных), теории вероятностей и математической статистике [7], теории случайных процессов [8]. Ряд задач посвящен проверке статистических гипотез, что имеет немаловажное значение в демографии.

Другой аспект задач связан со введением в реальную проблематику. В частности, проводится иллюстрация "с цифрами в руках" демографической ситуации в современной России.

Некоторые задачи относятся не к человеческому населению, а к так называемым эксплуатируемым популяциям (животных) [1]. Кроме определенной значимости в сельском хозяйстве и природопользовании, такие модели позволяют легче выявить и объяснить закономерности, свойственные и более сложным системам (нароdonаселению).

Более ста задач сгруппировано в одиннадцать тематических разделов, причем имеются ссылки из последующих на предыдущие. Результаты некоторых задач используются для решения других. Буквой "Т" отмечены задачи теоретического характера, буквой "В" — вычислительного (для их решения разумно использовать компьютер).

В заключение, автор выражает надежду, что его труд поможет новым поколениям студентов овладеть важным, актуальным и интересным предметом — *математической демографией*.

Всем интересующимся современной демографией,

ее проблемами и достижениями, автор рекомендует сайт "Демоскоп Weekly" (<http://www.demoscope.ru>).

Автор благодарен профессору О.В.Староверу (Центральный экономико-математический институт РАН), доценту Е.В.Чепурину (механико-математический факультет МГУ), профессору В.А.Ионцеву (экономический факультет МГУ), доценту Д.М.Эдиеву (Карачаево-Черкесская Государственная технологическая академия), к.ф.-м.н. Е.М.Андрееву и Е.Л.Сороко (Центр демографии и экологии человека Института народнохозяйственного прогнозирования РАН), а также заведующему кафедрой теории вероятностей, чл.-корр. РАН, профессору А.Н.Ширяеву за полезные замечания и предложения при подготовке сборника.

## 1. Модели роста численности населения.

Простейшей моделью чистого размножения (без смертности) с дискретным временем, учитывающей возраст элементов популяции, является *модель Фибоначчи* (для пар кроликов, порождающих новые пары и т.д.).

Традиционной в математической демографии является модель с непрерывным временем, в которой скорость роста населения пропорциональна текущей численности (*модель Мальтуса*), т.е.

$$x'(t) = kx(t),$$

где  $k$  — некоторый коэффициент (*показатель роста, естественный прирост*). Решением этого уравнения, очевидно, является экспонента:  $x(t) = x(0)e^{kt}$ ,  $t \geq 0$ .

В более общих моделях допускается зависимость показателя роста от времени и численности населения:  $k = k(t, x)$ . Например, в модели *демографического взрыва* полагают  $k(x) = cx$ ,  $c > 0$ , при этом  $x(t)$  достигает бесконечности за конечное время  $T$ . В других моделях, где  $k$  убывает до нуля с ростом  $x$ , может происходить стабилизация численности населения при  $t \rightarrow \infty$ .

- 1.1.** В начальный момент  $t = 0$  имеется одна пара взрослых кроликов. Найти число пар всех кроликов в любой момент  $t$ , если каждая взрослая пара на каждом шагу рождает одну пару молодых, а молодые становятся взрослыми за единицу времени (*задача Фибоначчи*).



- 1.2.** В начальный момент  $t = 0$  имеется 2 пары взрослых кроликов. Найти число пар взрослых кроликов в любой момент  $t$ , если каждая взрослая пара на каждом шагу рождает 4 пары молодых, а молодые становятся взрослыми за 2 единицы времени.
- 1.3.** Определить рост численности населения  $x(t)$  с показателем  $k = k(x)$ , где
- а)  $k(x) = l - x$ ,
  - б)  $k(x) = l^\alpha - x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ;
  - в)  $k(x) = \ln(l/x)$ ,
- с начальным условием  $x(0) = x_0$  при  $0 < x_0 < l$ .
- 1.4.** В модели "демографического взрыва" найти зависимость между начальным значением численности населения  $x_0$  и моментом взрыва  $T$ .
- 1.5.** (Т) Докажите, что в модели с запаздыванием

$$x'(t) = f(x(t - \varepsilon)), \quad \varepsilon > 0,$$

где  $f$  — функция, ограниченная на любом отрезке, а  $x(t)$  ограничено при  $t \leq 0$ , невозможен "взрыв" (т.е. достижение бесконечного значения за конечное время).

- 1.6.** Имеются две модели роста численности населения Земли [3]:
- I) гиперболическая —  $x(t) = C_1/(T_1 - t)$ ,  $t < T_1$ , при  $C_1 = 2 \times 10^{11}$ ,  $T_1 = 2025$ ;
  - II) тригонометрическая

$$x(t) = \frac{C_2}{\tau} \operatorname{arcctg} \frac{T_2 - t}{\tau}$$

при  $C_2 = 1,85 \times 10^{11}$ ,  $T_2 = 2005$ ,  $\tau = 45$ . Найти:

- а) прогноз на 2000 год в обеих моделях;
  - б) момент прохождения уровня 10 млрд. в обеих моделях<sup>1</sup>;
  - в) (В) наибольшее расхождение в прогнозах до 1975 г.;
  - г) предельное значение численности в модели II;
  - д) какая из моделей лучше соответствует данным табл. 1.1 в различные периоды XX века?
- 1.7.** Имеются две изолированные популяции, экспоненциально растущие с показателями 0,2% и 2% (в год). Пусть в начальный момент отношение их численностей 2:1.
- а) Найти отношение численности первой к второй через 10 лет.
  - б) Когда численности популяций сравняются?
- 1.8.** Имеется две изолированные популяции с показателями роста  $-2\%$  и  $+2\%$  (в год). Пусть в начальный момент их численности 100 и 10 млн. чел. Найти минимум суммарной численности населения и момент его прохождения.
- 1.9.** Популяция экспоненциально растет с показателем  $k$ , который оценивается с относительной ошибкой  $\varepsilon$ . По начальному условию  $x_0$  делают прогноз на  $t$  лет вперед. Найти интервал возможных значений для  $x(10)$ , если  $x_0 = 100$  млн. чел.,  $k = 0,01$  (в год),  $\varepsilon = 0,1$ .
- 1.10.** Пусть показатель роста  $k$  — случайная величина.

---

<sup>1</sup> Есть и другие модели. Так, по расчетам Лутца, Сандерсона и Щербова (Nature, 2001), численность населения Земли достигнет лишь 9 млрд. в течение ближайших 70 лет, а затем начнет сокращаться.

Найти среднюю численность населения  $\tilde{x}(t)$ , если

- а)  $k$  принимает значения  $k_1, \dots, k_n$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_n$ ;
- б)  $k$  имеет нормальное распределение со средним  $k_0$  и дисперсией  $\sigma^2$ ;
- в)  $k$  имеет показательное распределение со средним  $k_0$ .

## 2. Модели смертности.

*Силой смертности*  $d$  называют предел отношения вероятности смерти человека на промежутке  $(t, t + h)$ , к  $h$ , при  $h \rightarrow 0$ .

*Силой смертности*<sup>2</sup>  $d(x)$  в возрасте  $x$  называется отношение вероятности того, что человек, доживший до возраста  $x$ , умрет в возрасте до  $x + h$ , к  $h$ , при  $h \rightarrow 0$ .

*Функция дожития*<sup>3</sup>  $\bar{F}(x)$  описывает вероятность дожить до возраста  $x$ . Функция дожития представляет собой "хвост" функции распределения времени жизни  $F$ , т.е.  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ . Имеет место соотношение:

$$\bar{F}(x) = \exp \left\{ - \int_0^x d(u) du \right\}.$$

*Средней продолжительностью предстоящей жизни в возрасте  $y$*   $M(y)$  называется среднее время до смерти человека, дожившего до возраста  $y$ . Имеют место соотношения:

$$M(y) = \frac{1}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty \bar{F}(u) du = e^{D(y)} \int_0^\infty e^{-D(u+y)} du;$$

---

<sup>2</sup> В специальной литературе часто обозначается через  $\mu(x)$ .

<sup>3</sup> В специальной литературе часто обозначается через  $l(x)$ .

$$D(y) = \int_0^y d(u) du.$$

Суммарное среднее время жизни (прошлой и предстоящей) обладает свойством расти с возрастом.

*Средняя продолжительность жизни*  $T_0$  равна средней продолжительности предстоящей жизни в возрасте ноль (т.е. для новорожденного).

Если предполагается, что смерть может наступить от различных причин, образующих полную группу событий (несовместных и учитывающих все возможности), то выделяют *силы смертности по причинам* (аналогично общей силе смертности). Имеет место соотношение

$$d = \sum_{i=1}^n d_i,$$

где  $d_i$  — сила смертности по  $i$ -ой причине из  $n$  возможных. Здесь также можем полагать  $d_i = d_i(x)$ .

При статистико-демографических исследованиях население обычно разбивается на 5-летние возрастные группы:  $[x_{k-1}, x_k)$  и  $[x_n, +\infty)$ ,  $x_k = kh$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $h = 5$ ,  $n = 17$ ,  $x_n = 85$ . Оценками сил смертности по группам являются *возрастные коэффициенты смертности*  $t_k$  (числа умерших на определенное число людей данного возраста). Вводятся также оценки  $l_k$  для вероятностей дожития  $\bar{F}(x_k)$  (числа доживших до данного возраста из определенного числа родившихся). Для оценки интегралов от функции дожития можно применить кусочно-линейную аппроксимацию на двусторонних интервалах и показательную — на одностороннем,

т.е.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{F}(u) du \approx h \frac{l_{k-1} + l_k}{2}, \quad \int_{x_n}^{\infty} \bar{F}(u) du \approx \frac{l_n}{m_n}.$$

- 2.1.** (Т) Найти функцию дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в следующих моделях силы смертности<sup>4</sup> (при  $0 \leq x < b$ ):

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad d(x) &= a/(b-x); \\ \text{б)} \quad d(x) &= \begin{cases} c/(l+x), & x < x_0 \\ a/(b-x), & x \geq x_0 \end{cases}, \quad c < 1. \end{aligned}$$

- 2.2.** Пусть  $d(x) = a/(b-x)$ ,  $0 \leq x < b$ , и средняя продолжительность жизни 60 лет. Найти вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте  $y$  лет, если:

- а)  $a = 1/2$ ,  $y = 50$ ;  
б)  $b = 90$ ,  $y = 80$ .

- 2.3.** Пусть  $F(x) = (x/b)^a$ ,  $0 \leq x \leq b$ ,  $a > 0$ . Найти силу смертности и среднюю продолжительность предстоящей жизни. Вычислить вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте  $y$  лет, если:

- а)  $y = 45$ ,  $b = 90$ ,  $T_0 = 72$  (года);  
б)  $y = 54$ ,  $a = 2$ ,  $T_0 = 60$  (лет).

- 2.4.** В модели смертности Хелигмена-Полларда [4, с.165] полагают

$$d(x) = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x / (1 + GH^x).$$

---

<sup>4</sup> Формула а) соответствует гиперболической модели смертности Ж.Буржуа-Пиша; формула б) учитывает также детскую смертность в возрасте  $x < x_0$ .

Пусть  $A = 0,0088$ ;  $B = 0,3707$ ;  $C = 0,2864$ ;  
 $D = 0,0008$ ;  $E = 8,37$ ;  $F = 25,5$ ;  $G = 0,0002$ ;  
 $H = 1,0834$  (СССР, 1985–1986). Найти силу  
 смертности в возрасте: а) 40 лет; б) 60 лет; в)  
 80 лет.

- 2.5.** По силе смертности  $d(x) = a + be^{cx}$  (*модель Гомпертца-Мэйкхэма*):  
 а) найти функцию дожития;  
 б) вычислить  $\bar{F}(90)$ , если  $a = 0$ ,  $\bar{F}(40) = 0,9$  и  $\bar{F}(80) = 0,11$ .
- 2.6.** Для трех групп населения А, В и С возможны три причины смерти (1, 2 и 3). На группу А действуют 1 и 2, на В — 1 и 3, на С — 2 и 3. Известны силы смертности по группам  $d_A$ ,  $d_B$ ,  $d_C$  и функции дожития  $\bar{F}_A$ ,  $\bar{F}_B$ ,  $\bar{F}_C$ . Найти силы смертности по причинам  $d_1, d_2, d_3$  и соответствующие им функции дожития.
- 2.7.** Пусть в условиях задачи **2.6**  $d_A = 3\text{‰}$ ,  $d_B = 4\text{‰}$ ,  $d_C = 5\text{‰}$ . Найти ожидаемую суммарную силу смертности в группе  $D$ , где действуют все три причины, если влияние первой из них удастся сократить на 10%.
- 2.8.** (Т) Вывести дифференциальное уравнение:

$$M'(y) = d(y)M(y) - 1.$$

- 2.9.** (Т) Доказать следующую формулу (в модели с непрерывным временем):

$$M(y_1) = e^{D(y_1)} \int_{y_1}^{y_2} e^{-D(u)} du + e^{D(y_1)-D(y_2)} M(y_2),$$

для любых  $y_1 < y_2$ . Как преобразуется эта фор-

- мула, если сила смертности  $d$  постоянна на интервале  $(y_1, y_2)$ ? Как выразить  $M(y_2)$  через  $M(y_1)$ ?
- 2.10.** Найти  $M(25)$ , если  $M(20) = 48$  (лет) и сила смертности в возрасте 20–24 лет составляет 3 ‰ (в год). Каково приращение средней суммарной продолжительности жизни на этом отрезке возрастов?
- 2.11.** (В) Оценить среднюю продолжительность жизни мужчин, женщин и всего населения (с точностью до года):
- а) по данным табл. 2.4;
  - б) по данным табл. 2.5.
- 2.12.** (В) Оценить среднюю продолжительность предстоящей жизни мужчин, женщин и всего населения в возрасте 60 лет (с точностью до года):
- а) по данным табл. 2.4;
  - б) по данным табл. 2.5.
- 2.13.** По данным табл. 2.1 и 2.2 определить, в каких возрастных группах смертность всего населения возросла более чем на 50%.
- 2.14.** Имеются группы населения А и Б со значениями средней продолжительности жизни 60 и 70 лет, причем их численности относятся как 6:4. Найти среднюю продолжительность жизни всего населения. Как она изменится, если соотношение численностей станет равным 8:2, а средняя продолжительность жизни в каждой группе увеличится на 1 год?
- 2.15.** По данным табл. 2.3 выделить доминирующую причину смерти в каждой возрастной группе и объединить их по этому признаку.

- 2.16.** По данным табл. 2.4 для мужчин и женщин найти вероятности:  
 а) дожить до 60 лет, будучи в возрасте 20 лет;  
 б) дожить до 80 лет, будучи в возрасте 60 лет.
- 2.17.** Решить задачу **2.16** по данным табл. 2.5.
- 2.18.** Пусть функции распределения продолжительности жизни имеют общий вид  $F(x) = (x/90)^a$ ,  $0 \leq x \leq 90$ , и средние для мужчин и женщин составляют 60 лет и 72 года. Найти вероятность того, что из случайно выбранных мужчины и женщины одного года рождения мужчина умрет раньше.
- 2.19.** В модели смертности У.Брасса [11, 12] предполагается, что

$$\text{logit } F(x) = \alpha + \beta \text{logit } F_0(x), \quad \text{logit } u = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{1-u},$$

где  $F_0(x)$  — некая ”стандартная” функция распределения продолжительности жизни. При  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$  с помощью табл. 2.6 найти вероятности дожить до: а) 45 лет; б) 55 лет; в) 65 лет.

- 2.20.** В городе с населением в 0,5 млн. чел. смертность составляет 2% в год. Построить 95%-доверительный интервал для числа смертей за год.

### 3. Модели рождаемости.

*Интенсивностью демографических событий* называется предел отношения вероятности наступления события на промежутке  $(t, t+h)$ , к  $h$ , при  $h \rightarrow 0$ . Предполагается, что наступление более одного события имеет



вероятность  $o(h)$ . Если интенсивность событий  $\lambda$  постоянна, то число событий за время  $t$  имеет распределение Пуассона со средним  $\lambda t$ .

*Возрастной функцией фертильности* (фертильностью)  $f(x)$  называется предел отношения вероятности рождения ребенка женщиной в возрасте  $(x, x + h)$ , к  $h$ , при  $h \rightarrow 0$ . Возможностью многодетных рождений пренебрегаем (пропорционально увеличивая фертильность).

*Брутто-коэффициентом рождаемости*<sup>5</sup> (или просто средним числом детей, без учета смертности матерей) называется величина

$$N_b = \int_0^\infty f(x) dx.$$

*Нетто-коэффициентом рождаемости*<sup>6</sup> называется величина

$$N_n = \int_0^\infty f(x) \bar{F}(x) dx,$$

где  $\bar{F}(x)$  — функция дожития женщин. Таким образом учитывается возрастная смертность женщин, способная сократить число рождений.

В нормальных условиях нетто и брутто-коэффициенты мало отличаются между собой.

*Средним возрастом матерей* называется средний возраст женщины в момент рождения ребенка (независимо от очередности рождения). Для определения этой

---

<sup>5</sup> Эту величину также называют *коэффициентом суммарной рождаемости* (КСР).

<sup>6</sup> В современной демографии чаще рассматривают *нетто-коэффициент воспроизводства*, равный произведению нетто-коэффициента рождаемости на долю девочек среди родившихся; см. также задачу 5.4.

величины (в непрерывной модели) обычно используется формула

$$T_m = \frac{1}{N_b} \int_0^\infty x f(x) dx,$$

не учитывающая смертность.

При демографических исследованиях рождаемости женское население обычно разбивается на 5-летние возрастные группы (от 15 до 50 лет). Оценками фертильности являются *возрастные коэффициенты рождаемости* (числа рождений на определенное число женщин данного возраста). При оценивании остальных показателей фертильность в каждой группе полагается постоянной. В качестве значений возрастов для простоты можно взять середины интервалов.

*Когортой* называют совокупность людей, вступивших в некоторый промежуток времени в некоторое демографическое состояние (возможно, обладающих также некоторым дополнительным набором признаков). Часто рассматривают когорты по годам рождений (например, 5-летние).

Динамика отдельной семьи (по поколениям) иногда описывается ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона [8]. Если к семье причисляются все потомки (как мужского, так и женского пола), то необходимо также предположить, что члены семьи образуют пары только с людьми извне (не являющимися их родственниками ни в каком поколении), причем этих людей всегда достаточно для образования пар. Более реалистичны модели описания ветвящимся процессом мужских и женских линий по отдельности (при этом степень родства в паре не играет роли).

*Вероятностью вырождения ветвящегося процесса*  $q$  называется вероятность обращения процесса в нуль, начиная с какого-то момента времени. Таким образом, речь идет не о вырождении в биологическом или медицинском смысле слова, а о понятии из теории ветвящихся процессов, которому соответствует просто вымирание (семьи, рода, линии). Если среднее число потомков больше единицы, то вероятность вырождения равна единственному на промежутке  $[0, 1)$  решению уравнения

$$s = g(s),$$

где  $g(s)$  — производящая функция числа потомков, а именно

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,$$

где  $p_k$  — вероятность иметь  $k$  потомков (эти вероятности могут оцениваться статистически, при обследовании определенного числа семейных пар). В случае, если среднее число потомков не больше единицы, вероятность вырождения равна единице.

**3.1.** Проверить гипотезу о пуассоновости потока рождений<sup>7</sup> по данным из таблицы (Эстония, 1980) с помощью критерия  $\chi^2$  на уровне значимости 1%.

январь	февраль– март	апрель– июнь	июль– октябрь	ноябрь– декабрь
1824	3647	5757	7272	3704

---

<sup>7</sup> Зависимостью от меняющейся общей численности населения и сезонными колебаниями здесь пренебрегаем.

- 3.2.** Найти среднее число детей и средний возраст матерей в следующих моделях возрастной фертильности:
- а)  $f(t) = Ae^{-b(t-t_0)}, t \geq t_0$ ;
  - б)  $f(t) = A_1e^{-b_1(t-t_0)} + A_2e^{-b_2(t-t_0)}, t \geq t_0$ ;
  - в)  $f(t) = A(t-t_0)^\alpha(t_1-t)^\beta, t \in [t_0, t_1], \alpha, \beta > 0$ .
- Указание:* использовать определение и свойства бета-функции.
- 3.3.** В *полиномиальной модели рождаемости У.Брасса* [4, с.169] возрастная фертильность описывается формулой из **3.2в** с  $\alpha = 1, \beta = 2, t_1 = t_0 + 33$ . В этих предположениях:
- а) выразить неизвестные параметры модели через среднее число детей и средний возраст матерей.
  - б) при  $N_b = 2, T_m = 26, 2$  найти точку максимума фертильности и его значение.
- 3.4.** Найти вероятности вырождения для следующих распределений числа детей в семье:
- а) трехточечного —  $\{p_0, p_1, p_2\}$ ;
  - б) четырехточечного —  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}, p_3 > 0$ ;
  - в) геометрического (от нуля) со средним  $\mu$ .
- 3.5.** Оценить вероятности вырождения по данным табл. 3.3 для каждой из когорт, объединяя вероятности числа детей  $\geq 3$ .
- 3.6.** Пусть распределение числа детей задано вероятностями:  $p_0 = 0, 1, p_1 = 0, 2, p_2 = 0, 3, p_3 = 0, 25, p_4 = 0, 15$ . Найти среднее число детей и средний возраст матерей, если первый ребенок рождается (в среднем) в 23 года, второй — через 4 года, третий — через 3 года, четвертый — через 2 го-

- да (смертностью пренебрегаем, численность возрастных групп матерей полагаем одинаковой).
- 3.7.** Найти распределение числа мальчиков в семье, если вероятность рождения мальчика 0,515, а распределение общего числа детей в семье:
- а) биномиальное с параметрами  $n = 4$ ,  $p = 0,6$ .
  - б) пуассоновское со средним 2.
- 3.8.** В модели Лотки [8, с.23] распределение числа мужских потомков (продолжающих фамилию) описывается формулами:  $p_k = bc^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ ,  $p_0 = 1 - b/(1 - c)$ ,  $b, c > 0$ ,  $b + c < 1$ .
- а) Найти среднее число мужских потомков  $\mu$  и вероятность вырождения фамилии  $q$ .
  - б) Решить задачу при  $b = 0,2$ ,  $c = 0,6$  (США, 1920).
- 3.9.** Пусть распределение числа детей в семье пуассоновское со средним  $\lambda = 3$ , первый ребенок рождается в среднем в 22 года, а каждый следующий — в среднем через 2 года (смертностью пренебрегаем, численность возрастных групп матерей полагаем одинаковой).
- а) Найти средний возраст матерей.
  - б) Как изменится средний возраст матерей, если первый ребенок будет заводиться в среднем на год позже, а среднее число детей сократится в два раза?
- 3.10.** (В) По данным табл. 3.1:
- а) оценить брутто-коэффициент рождаемости и средний возраст матерей;
  - б) оценить нетто-коэффициент рождаемости с учетом табл. 2.4.

- 3.11.** (В) Решить задачу **3.10** по данным табл. 2.5 и 3.2.
- 3.12.** За год в городе родилось 10268 мальчиков и 9742 девочки. На уровне значимости 5% проверить гипотезу о том, что:
- а) рождения мальчиков и девочек равновероятны;
  - б) вероятности рождения для мальчиков и девочек равны 0,51 и 0,49.
- 3.13.** В городе А с населением 1 млн. чел., за год родилось 10,2 тыс. детей, а в соседнем городе Б с населением 2 млн. чел. в тот же год родилось 19,8 тыс. детей. Можно ли утверждать, что средняя рождаемость в А больше, чем в Б (на уровне значимости 5%)?
- 3.14.** В городе с населением 1 млн. чел. рождаемость составляет 1% в год. Построить 95%-доверительный интервал для числа рождений за год.
- 3.15.** Построить 99%-доверительный интервал для числа мальчиков на 100 тыс. рождений, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

#### **4. Модели движения активного населения.**

*Экономически активное население* определяется по признакам активного участия в экономической деятельности, производстве материальных и духовных благ (в отличие от детей, учащихся и неработающих пенсионеров), а также движения (перехода между группами) по своей воле. Группы могут выделяться по признакам места проживания, сферы деятельности, профессии и квалификации и т.д.

Если группы делятся по территориальному призна-

ку, то речь идет о простейших *моделях миграции*.

Главным отличием модели движения экономически активного населения от других демографических моделей является предположение о постоянстве общей численности населения (смертностью и рождаемостью пренебрегаем, население замкнуто).

*Интенсивностью перехода*  $\lambda_{ij}$ , где  $i \neq j$ , называется предел отношения вероятности перехода человека из группы  $i$  в группу  $j$  на промежутке  $(t, t + h)$ , к  $h$ , при  $h \rightarrow 0$ . Предполагается, что вероятность более одного перехода имеет вероятность  $o(h)$ , и переходы людей происходят независимо.

Далее в задачах интенсивность иногда определяется как вероятность перехода в единицу времени, поскольку эту единицу полагаем достаточно малой.

Численность населения по группам описывается вектором  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)^T$ , где  $m$  — число групп. Если исходной моделью является стохастическая, то это вектор средних значений (математических ожиданий) численностей групп.

В непрерывной модели динамика описывается системой дифференциальных уравнений:

$$n'_i(t) = - \left( \sum_{j=1, j \neq i}^m \lambda_{ij} \right) n_i + \sum_{l=1, l \neq i}^m \lambda_{li} n_l, \quad 1 \leq i \leq m,$$

которая может быть приведена к векторно-матричной форме

$$\vec{n}'(t) = C \vec{n}(t), \quad C = (\lambda_{ij})^T, \quad \lambda_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^m \lambda_{ij}.$$

Интенсивности переходов можно выразить через интенсивности  $r_i$  выхода из групп и вероятностей последующих переходов  $p_{ij}$ , а именно:

$$\lambda_{ij} = r_i p_{ij}, \quad p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{r_i}, \quad r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^m \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ii} = -r_i.$$

Тогда получаем  $C = (P^T - E)R$ , где  $P = (p_{ij})$ ,  $R = (r_i \delta_{ij})$ .

В дискретной модели с шагом времени  $h$  получаем рекуррентное уравнение

$$\vec{n}(t+h) = A\vec{n}(t), \quad A = E + hC,$$

где обычно полагают  $h = 1$ .

В непрерывной модели одно из собственных значений матрицы  $C$  равно нулю, а остальные имеют отрицательные действительные части, поэтому всегда имеет место сходимость к равновесному состоянию. В дискретной модели это необязательно (при больших интенсивностях переходов она может оказаться неустойчивой и не отражающей реальности).

*Структурой населения* называется его описание через отношения численностей групп к общей численности населения. В частности, для дискретной модели можем определить вектор

$$\vec{s}(t) = \frac{\vec{n}(t)}{N(t)}, \quad N(t) = \sum_{i=1}^m n_i(t).$$

**4.1.** Имеются две группы (1 и 2). Интенсивность переходов из 1 в 2 равна  $a$ , из 2 в 1 —  $b$ , причем



- $a, b > 0$ . При неотрицательном, отличном от нуля начальном условии  $\vec{n}(0) = (n_1^0, n_2^0)^T$ :
- а) в модели с непрерывным временем найти решение  $\vec{n}(t)$ ;
  - б) в модели с дискретным временем найти решение  $\vec{n}(t)$  и условия, при которых это решение всегда неотрицательно;
  - в) при каких  $a$  и  $b$  решение в модели с дискретным временем стабилизируется, начиная с  $t = 1$ ?
- 4.2.** Имеются три группы (1, 2 и 3). Интенсивность переходов из 1 в 2 и 3 равна  $a$ , из 2 в 1 и 3 —  $b$ , из 3 в 1 и 2 —  $c$ , причем  $a, b, c > 0$ .
- а) Найти предельную структуру населения. При начальном условии  $\vec{n}(0) = (1, 0, 0)^T$ ;
  - б) найти решение при  $a = b = c = 1$ ;
  - в) найти решение при  $a = 1, b = 4, c = 9$ ;
- 4.3.** Имеются три группы. Интенсивность переходов из 1 в 2 равна  $a$ , из 2 в 3 —  $b$ , причем  $a, b > 0, a \neq b$ . Найти:
- а) общее решение;
  - б) решение при  $a = 2, b = 1, \vec{n}(0) = (1, 0, 0)^T$ ;
- 4.4.** Имеются три группы активного населения А, Б и В, вероятности выхода из которых составляют 1, 6 и 9% (в месяц). При выходе из группы человек равновероятно переходит в одну из двух других. При начальных численностях групп в 0,3, 1,3 и 0,7 млн. человек:
- а) найти  $\vec{n}(t)$ , используя дискретную модель;
  - б) найти численности групп через год;
  - б) найти предельные численности групп.
- 4.5.** Активное население делится на работающих (А)

и безработных (Б). Вероятность потерять работу составляет 2% (в месяц), а вероятность найти ее — 18% (в месяц).

- а) Найти равновесный уровень безработицы;
- б) Во сколько раз сократится безработица, если благодаря государственной программе занятости среднее время поиска работы уменьшится вдвое?

## 5. Модели естественного движения населения.

Под *естественным движением населения* понимается его движение, приращение и убывание по возрастным группам. Население предполагается замкнутым.

Численность населения по возрастным группам описывается вектором (средних значений)  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)$ , где  $m$  — предельный возраст. В модели с двумя полами вводятся также отдельные компоненты вектора, описывающие число мужчин и женщин каждого возраста.

Дискретная модель с единичным шагом времени может быть записана в векторно-матричной форме

$$\vec{n}(t+1) = L\vec{n}(t),$$

где  $L$  называется *матрицей Лесли*.

Непрерывная детерминированная демографическая модель с одним полом описывается системой интегродифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = -d(t, x)z, \\ z(t, 0) = \int_0^\infty b(t, x)z(t, x) dx, \\ z(0, x) = g(x). \end{cases}$$

Здесь  $z(t, x)$  — плотность населения в возрасте  $x$  в момент  $t$ , т.е. предел отношения числа людей в возрасте  $(x, x+h)$  к  $h$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $b(t, x)$  — фертильность в возрасте  $x$  в момент  $t$  в расчете на одного человека (а не на одну женщину, как ранее),  $d(t, x)$  — сила смертности,  $g(x)$  — начальное условие (определяемое из переписи населения). При этом явное введение предельного возраста не обязательно.

Модель с двумя полами<sup>8</sup> имеет аналогичный вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial x} = -d_1(t, x)z_1, & \frac{\partial z_2}{\partial t} + \frac{\partial z_2}{\partial x} = -d_2(t, x)z_2, \\ z_1(t, 0) = \int_0^\infty b_1(t, x)z_1(t, x) dx, \\ z_2(t, 0) = \int_0^\infty b_2(t, x)z_2(t, x) dx, \\ z_1(0, x) = g_1(x), \quad z_2(0, x) = g_2(x). \end{cases}$$

Здесь индекс 1 означает описание функцией женского, 2 — мужского населения, а через  $b_1(t, x)$  и  $b_2(t, x)$  обозначены интенсивности рождений девочек и мальчиков соответственно у женщины в возрасте  $x$  в момент времени  $t$ .

В непрерывной модели структура населения описывается функцией

$$s(t, x) = \frac{z(t, x)}{N(t)}, \quad N(t) = \int_0^\infty z(t, x) dx.$$

*Стабильным населением* называется население, которое растет, сокращается или остается постоянным

---

<sup>8</sup> Без учета влияния на рождаемость численности мужского населения, которая предполагается достаточной.

как единое целое, без изменения своей структуры. Частным случаем стабильного является *стационарное население*, сохраняющее как структуру, так и численность. Понятно, что равновесие здесь динамическое.

*Средним возрастом населения* называется средний возраст людей, входящих в население. В непрерывной модели он находится по формуле

$$T_e(t) = \int_0^{\infty} x s(t, x) dx.$$

*Репродуктивным потенциалом Фишера* в возрасте  $x$  называется показатель, отражающий относительный средний вклад человека за его оставшуюся жизнь в дальнейший рост населения. В непрерывной модели с одним полом он вычисляется по формуле

$$c(x) = \frac{e^{kx}}{\bar{F}(x)} \int_x^{\infty} b(u) \bar{F}(u) e^{-ku} du,$$

где  $k$  — показатель роста стабильного населения<sup>9</sup>. При постоянных параметрах модели суммарный потенциал населения меняется экспоненциально с показателем  $k$ , независимо от структуры населения.

**5.1.** Пусть на каждом шагу каждая взрослая пара кроликов либо рождает в среднем  $\mu$  пар молодых, либо погибает с вероятностью  $p$  (не оставив потомства), а каждая молодая становится взрослой. Выписать матрицу Лесли и рекуррентную

---

<sup>9</sup> В специальной литературе он называется также *коэффициентом Лотки*.

формулу. Найти среднее число пар взрослых кроликов в любой момент времени  $t$ , если в начальный момент  $t = 0$  имеется одна пара взрослых кроликов, для следующих значений параметров:

- а)  $\mu = 1, p = 0, 1$ ;
- б)  $\mu = 3, p = 0, 2$ ;
- в)  $\mu = 4, p = 0, 1$ ;
- г)  $\mu = 6, p = 0, 5$ ;
- д)  $\mu = 1, p = 0, 5$ .

При каких начальных условиях среднее число пар кроликов меняется строго в геометрической прогрессии? При каких значениях параметров оно стремится к конечному ненулевому пределу?

- 5.2.** (Т) Найти стабильное население в модели естественного движения с одним полом в предположении, что фертильность и сила смертности не зависят от времени. Найти условие роста населения. *Указание:* решение искать в виде  $z(t, x) = e^{kt}u(x)$ ; использовать выражение функции дожития через силу смертности.
- 5.3.** Найти средний возраст стабильного населения из задачи **5.2** при  $F(x) = (x/100)^2$ ,  $0 \leq x \leq 100$ , и естественном приросте: а)  $+1\%$ ; б)  $-1\%$  (в год).
- 5.4.** (Т) Найти стабильное население в модели естественного движения с двумя полами в предположении, что фертильность и силы смертности для обоих полов не зависят от времени. Найти условие роста населения. *Указание:* решение искать в виде  $z_1(t, x) = e^{kt}u_1(x)$ ,  $z_2(t, x) = e^{kt}u_2(x)$ .
- 5.5.** (Т) Найти средний возраст стационарного населения из **5.2**, если: а)  $\bar{F}(x) = (1 - (x/b))^a$ ,

- б)  $F(x) = (x/b)^a$ ;  $0 \leq x < b$ ,  $a > 0$ .
- 5.6.** По данным табл. 5.1 оценить:
- вероятности рождения мальчиков и девочек;
  - в каком возрасте доли мужчин и женщин выравниваются.
- 5.7.** По данным табл. 5.1 найти локальные максимумы и минимумы (всего населения), с соответствующими годами рождения.
- 5.8.** (В) Оценить предполагаемое число рождений в 2000 году по данным табл. 5.1 и табл. 3.2 (рождаемость полагаем неизменной).
- 5.9.** (В) Оценить предполагаемое число смертей в 2000 году по данным табл. 5.1 и табл. 2.5 (смертность полагаем неизменной).
- 5.10.** (В) Пусть в модели с одним полом имеется стабильное население с естественным приростом 1% (в год), рождаемостью по модели У.Брасса с  $T_m = 25,2$  (лет) и функцией распределения времени жизни  $F(x) = (x/100)^2$ . Вычислить репродуктивный потенциал в возрасте: а) 20 лет; б) 30 лет; в) 40 лет.

## 6. Общие модели движения населения.

Общая модель движения населения с непрерывным временем имеет вид

$$\vec{n}'(t) = C\vec{n}(t) + \vec{a}(t),$$

где  $C$  — матрица интенсивностей (возможно, учитывающая рождаемость и смертность) и  $\vec{a}(t)$  — вектор, описывающий связь с внешним миром (приток извне или, напротив, отъем населения).

Если группы делятся по территориальному признаку, речь идет о *моделях миграции* (с учетом рождаемости и смертности).

Пусть  $b_{ij}$  — интенсивность рождений детей группы  $j$  на человека из группы  $i$ , и  $d_i$  — сила смертности в группе  $i$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ . Определим матрицы  $B = (b_{ij})$  и  $D = (d_i \delta_{ij})$ , тогда

$$C = B^T - D + \Lambda^T, \quad \Lambda = R(P - E).$$

Матрица  $D$  диагональна всегда. Матрица  $B$  диагональна, если дети остаются в группе родителей. В последнем случае обозначим  $b_i = b_{ii}$  и  $k_i = b_i - d_i$ , тогда  $k_i$  — естественный прирост в группе  $i$  (какой наблюдался бы, если бы группы были изолированы).

Под показателем роста (популяции в целом) будем понимать величину  $k$  такую, что  $N(t) \sim ce^{kt}$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Если матрица  $C$  неразложима, то при неотрицательном (отличном от нуля) начальном условии  $k$  оказывается наибольшим собственным значением  $C$ , а предельная структура — соответствующим собственным вектором. Величина  $k$  лежит на отрезке между наименьшим и наибольшим из  $k_i$ .

Модель с дискретным временем может быть представлена в виде

$$\vec{n}(t+h) = A\vec{n}(t) + \vec{d}(t), \quad A = E + hC.$$

В ней при "неудачных" составляющих может наблюдаться расходимость.

Область применимости моделей определяется неотрицательностью текущих численностей населения в

группах. В модели с непрерывным временем без отъема населения это условие выполняется всегда при неотрицательных начальных условиях.

- 6.1.** Пусть имеется популяция кроликов двух возрастов. За один шаг времени каждая взрослая пара рождает  $\mu$  пар молодых, каждая молодая пара становится взрослой, и кроме того, производится изъятие  $l$  пар взрослых кроликов (после рождений и переходов). Найти равновесные значения чисел молодых и взрослых пар. Предполагая, что в начальный момент  $t = 0$  имеется  $\nu$  пар взрослых кроликов:
- а) найти числа пар молодых и взрослых кроликов в любой момент  $t$  в общем случае (без учета требования неотрицательности);
  - б) найти условия, при которых популяция кроликов растет, вымирает, стремится к конечному ненулевому пределу.
- 6.2.** Пусть имеется популяция кроликов трех возрастов. За один шаг каждая молодая пара становится взрослой, каждая взрослая рождает 3 молодых и становится старой, из старых  $1/2$  умирает. Кроме того, происходит изъятие 4 молодых, 2 взрослых и 1 старой пары (после рождений, гибели и переходов). Найти равновесное состояние.
- 6.3.** (Т) Имеется две группы (1 и 2). Естественный прирост в группе 1 равен  $a$ , в группе 2 —  $b$ . Кроме того, имеется постоянный поток со скоростью  $l$  из первой группы во вторую (пока группа 1 не пуста). Рассмотреть все случаи развития собы-



тий.

- 6.4.** (Т) Имеется 2 группы (1 и 2). Естественный прирост в группе 1 равен  $k_1$ , в 2 —  $k_2$ , интенсивность переходов из 1 в 2 равна  $l_1$ , из 2 в 1 —  $l_2$ . Найти условия, при которых популяция растёт, вымирает, стремится к конечному ненулевому пределу (при неотрицательном, отличном от нуля начальном условии).
- 6.5.** В условиях задачи **6.4** найти общее решение, показатель роста и предельную структуру при неотрицательном, отличном от нуля начальном условии, если заданы параметры:
- а)  $k_1 = 5, l_1 = 4, k_2 = 2, l_2 = 1$ ;
  - б)  $k_1 = 2, l_1 = 1, k_2 = 4, l_2 = 2$ ;
  - в)  $k_1 = 6, l_1 = 4, k_2 = 8, l_2 = 5$ ;
  - г)  $k_1 = 5, l_1 = 3, k_2 = 9, l_2 = 2$ ;
  - д)  $k_1 = 1, l_1 = 3, k_2 = -5, l_2 = 2$ .
- 6.6.** В условиях задачи **6.4** найти вектор  $\vec{n}(t)$ , асимптотику  $N(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  и предельную структуру населения при  $k_1 = 4, l_1 = 1, k_2 = 8, l_2 = 3$ , начальном условии  $\vec{n}(0) = (1, 1)^T$  и дополнительном предположении, что в группу 1 поступает поток со скоростью  $e^{at}$ , если:
- а)  $a = 1$ ;
  - б)  $a = 4$ ;
  - в)  $a = 8$ .
- 6.7.** В городе живет 4,4 млн. мужчин и 5,6 млн. женщин. Смертность среди них  $8\text{‰}$  и  $7\text{‰}$  (в год); рождаемость у женщин  $30\text{‰}$  (в год); мальчиков и девочек рождается поровну. Дать прогноз численностей мужчин и женщин города на 10 лет

вперед.

- 6.8.** В регионе А естественный прирост составляет  $-5\text{‰}$  (в год), в регионе Б  $+10\text{‰}$  (в год), интенсивность переездов из Б в А равна  $5\text{‰}$  (в год). Пусть в А и Б живут 8 и 2 млн. чел. соответственно. Дать прогноз численностей населения регионов на 20 лет вперед:
- а) без учета внешней миграции;
  - б) если в А идет приток извне со скоростью 30 тыс. чел. в год.
- 6.9.** В регионах А и Б естественный прирост составляет  $12\text{‰}$  и  $8\text{‰}$  (в год); интенсивность переездов из А в Б равна  $7\text{‰}$  (в год), из Б в А —  $5\text{‰}$  (в год), исходные численности населения регионов 10,6 и 9,4 млн. чел. Дать прогноз на 10 лет вперед.
- 6.10.** В городах А и Б живет 2 и 3 млн. чел. За год из А в Б переехало 16 тыс. чел., из Б в А — 36 тыс. чел., причем численность населения в А выросла на 40 тыс. чел., а в Б сократилась на 5 тыс. чел. Оценить интенсивности переездов и естественный прирост в городах А и Б.

## 7. Объединение и расщепление групп.

*Объединением*  $U$  называется линейное отображение вектора численностей групп в пространство меньшей размерности, при котором некоторые компоненты складываются, образуя численности новых групп (без пересечений множеств объединяемых компонент). *Матрица объединения*  $U$  состоит из 0 и 1, причем в каждом столбце стоит ровно одна 1.

*Расщеплением*  $S$  называется линейное отображение вектора численностей групп в пространство большей размерности, обратное некоторому объединению  $U$  в том смысле, что  $US = E$  (согласованность). Кроме того, *матрица расщепления*  $S$  должна быть неотрицательна, иметь суммы элементов по столбцам, равные единице, и не иметь нулевых строк.

*Ведущим вектором* называется такой положительный вектор  $\vec{x}$ , что  $SU\vec{x} = \vec{x}$  (т.е. он восстанавливается без искажений).

По ведущему вектору  $\vec{x}$  матрица  $S$  однозначно строится следующим образом. Пусть  $M_j$  — множество индексов групп, объединяющихся в группу  $j$ , а всего новых групп  $m$ , тогда полагаем  $S = (s_{ij})$ , где

$$s_{ij} = \frac{x_i}{\sum_{l \in M_j} x_l}, \quad i \in M_j, \quad 1 \leq j \leq m,$$

а остальные элементы матрицы равны нулю.

Рассмотрим модель движения замкнутого населения с непрерывным временем  $\vec{n}'(t) = C\vec{n}(t)$ , и пусть  $\tilde{n}(t) = U\vec{n}(t)$ ,  $\tilde{C} = UCS$ , тогда для того, чтобы выполнялось  $\tilde{n}'(t) = \tilde{C}\tilde{n}(t)$ , необходимо и достаточно выполнения *условия сводимости (совершенного агрегирования)*

$$UC = UCSU.$$

В таком случае говорят, что можно объединять группы (в соответствии с  $U$ ). Поскольку  $S$  не определяется по  $U$  однозначно, речь идет о существовании такого  $S$ , что условие сводимости выполняется.

В качестве ведущего вектора можно взять структуру стабильного населения (даже если условие сводимо-

сти в модели не выполняется, это должно вести к убыванию искажений со временем), либо начальное условие (получаемое, например, из переписи населения).

- 7.1.** Шесть групп объединяются в три: первая, вторая и четвертая — в первую, третья и пятая — во вторую, шестая — в третью. Найти:
- а) матрицу объединения  $U$ ;
  - б) матрицу расщепления  $S$  с ведущим вектором  $(1, 3, 2, 4, 6, 5)^T$ ;
  - в) результат объединения и расщепления для  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)^T$ .
- 7.2.** В условиях задачи **6.7.** объединить группы мужчин и женщин и дать прогноз на 10 лет вперед, используя в качестве ведущего вектора:
- а) начальное условие;
  - б) структуру стабильного населения.
- При каком выборе прогноз ближе к ранее полученному результату?
- 7.3.** В условиях задачи **6.9.** объединить региональные группы и дать прогноз на 10 лет вперед, используя в качестве ведущего вектора начальное условие. Сравнить с ранее полученным результатом.
- 7.4.** (Т) Определить условия, при которых можно объединять группы:
- а) для модели с двумя группами;
  - б) для модели с тремя группами, если объединяются первые две;
  - в) в общем случае.
- 7.5.** Путем объединения свести модель к наименьшему возможному числу групп и найти матрицу  $\tilde{C}$ ,

если

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 8. Регулирование движения населения.

Задача регулирования движения населения ставится преимущественно в моделях движения кадров в организациях, разделенных на группы.

Целью регулирования является (асимптотическое) достижение заданной наперед *целевой структуры* населения  $\vec{d}$ . Средствами регулирования могут быть различные параметры модели.

Регулирование называется *достижимым*, если необходимые значения регулируемых параметров лежат в области возможных изменений (например, неотрицательны) и все промежуточные значения численностей групп от начала до желаемой структуры возможны (положительны и не слишком велики).

Регулирование называется *допустимым*, если при нем общая численность населения со временем не стремится к нулю.

В постоянных условиях, как правило, ищется также постоянное регулирование (не зависящее от времени). В этом случае целевая структура населения должна быть стабильной и устойчивой при соответствующих значениях регулируемых параметров. Иногда этого оказывается достаточно для определения их значений.

В задаче *регулирования набором* предполагается, что переходы между  $m$  группами описываются неко-

торой матрицей  $C$ , и кроме того, задан вектор интенсивностей выходов вовне из групп:  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$ . Обозначим  $W = (w_i \delta_{ij})$ . Взамен вышедших из организации производится набор новых сотрудников, причем в  $i$ -ую группу принимается доля  $q_i$  от всех вышедших (в единицу времени),  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ . Получаем

$$\vec{n}'(t) = (C - W)\vec{n}(t) + \vec{q}(\vec{w}, \vec{n}(t)).$$

Тогда для достижения целевой структуры  $\vec{g}$  при постоянной численности организации получаем *вектор регулирования набором*

$$\vec{q} = \frac{(W - C)\vec{g}}{(\vec{w}, \vec{g})},$$

а для организации с показателем роста  $\alpha$ , т.е.  $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$ , верно

$$\vec{q} = \frac{(\alpha E + W - C)\vec{g}}{(\vec{w}, \vec{g})}.$$

Условием достижимости здесь является  $\vec{q} \geq 0$ .

В задаче *регулирования перемещением* вектор набора  $\vec{q}$  предполагается заданным, а средствами регулирования являются интенсивности (или вероятности) переходов между группами (т.е. элементы матрицы  $C$ ) — все или часть их.

При *регулировании внешним перераспределением* для общей модели движения населения

$$\vec{n}'(t) = C\vec{n}(t) + \vec{a}(t)$$

средством регулирования является вектор  $\vec{a}(t)$ . При общей численности населения  $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$  получаем

$$\vec{a}(t) = N(t)(\alpha E - C)\vec{g}.$$

В формальной модели регулирования внешним перераспределением возможен выход  $\vec{n}(t)$  из области неотрицательных значений, что накладывает дополнительные условия достижимости.

- 8.1.** Пусть в организации имеются две группы (1 и 2), интенсивности переходов между которыми равны  $1/3$ , а интенсивности уходов из них во внешний мир равны  $1/6$ . Найти вектор регулирования набором  $\vec{q}$  и проверить его достижимость для следующих целевых структур:
- а)  $\vec{q} = (1/2, 1/2)^T$ ;
  - б)  $\vec{q} = (2/5, 3/5)^T$ ;
  - в)  $\vec{q} = (1/3, 2/3)^T$ .
- 8.2.** (Т) Доказать, что множество достижимых структур в модели регулирования набором (с постоянным или растущим населением), всегда непусто и выпукло.
- 8.3.** Решить задачу **8.1** при помощи регулирования внешним перераспределением  $\vec{a}$  в предположении, что самостоятельных уходов во внешний мир не происходит.
- 8.4.** Решить задачу **8.1** для организации, растущей экспоненциально с показателем  $\alpha = 1/6$ .
- 8.5.** Решить задачу **8.3** для организации, растущей экспоненциально с показателем  $\alpha = 1/6$ .
- 8.6.** (Т) В модели регулирования набором для населения из двух групп с интенсивностями переходов  $l_1$  из 1 в 2,  $l_2$  из 2 в 1, и интенсивностями выбытия  $w_1$ ,  $w_2$  найти наименьший показатель роста  $\alpha \geq 0$ , при котором достижима целевая структу-

ра  $\vec{g} = (g_1, g_2)^T$ .

- 8.7. В организации работают три группы специалистов по квалификации: А (низкая), Б (средняя), В (высокая). Вероятности выбытия из них  $w_1, w_2, w_3$ ; интенсивности переходов  $l_1$  из А в Б,  $l_2$  из Б в В. Оптимальное соотношение численностей задано вектором  $\vec{g}$ . Специалистов можно нанимать извне, причем их общая численность должна оставаться постоянной.
- а) Найти набор для поддержания целевой структуры.
  - б) При каких интенсивностях повышения квалификации будет достаточно набирать только в группу А?
  - в) При каких интенсивностях выбытия будет достаточно набирать только в группу А?
- 8.8. Имеется три группы, интенсивности выходов из которых равны. Вероятность перехода из 1 в 2 равна  $p$ , из 1 в 3 —  $1 - p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ ; переходы для каждой из групп 2 и 3 в остальные две группы равновероятны. В предположении, что можно регулировать  $p$ :
- а) найти предельную структуру  $\vec{s}$  для любого  $p$ ;
  - б) найти  $p$ , обеспечивающее целевую структуру  $\vec{g}$ ;
  - в) описать множество достижимых структур в данной модели.
- 8.9. Имеется три группы, интенсивности выходов из которых равны. Вероятность перехода из 1 в 2 равна  $p_1$ , из 1 в 3 —  $1 - p_1$ , из 2 в 1 —  $p_2$ , из 2 в 3 —  $1 - p_2$ ,  $0 \leq p_{1,2} \leq 1$ ; переходы из груп-



пы 3 в остальные две группы равновероятны. В предположении, что можно регулировать  $p_1$  и  $p_2$ :

а) найти предельную структуру  $\vec{s}$  для любых  $p_1, p_2$ ;

б) найти  $p_1$  и  $p_2$ , обеспечивающие целевую структуру  $\vec{g}$ ;

в) описать множество достижимых структур в данной модели.

**8.10.** Пусть имеется замкнутая система из двух сообщаемых групп с показателями роста  $+1$  и  $-1$ . Будет ли допустимым регулирование, направленное на достижение целевой структуры:

а)  $\vec{g} = (3/5, 2/5)^T$ ;

б)  $\vec{g} = (1/3, 2/3)^T$ .

## 9. Мотивация движения населения

Предполагается, что условия жизни в каждой группе населения могут быть охарактеризованы определенным набором факторов, и движение людей между группами мотивируется желанием улучшить эти условия.

*Условия жизни* в группе могут описываться либо вектором значений факторов  $\vec{x}$ , либо единым показателем — *уровнем жизни*  $u$ , который, в свою очередь, либо просто совпадает с уровнем доходов (как главным фактором выбора), либо представляет собой значение некоторой функции  $u(\vec{x})$ , оценивающей влияние различных факторов и называемой *функцией полезности*.

*Функция предпочтения*  $f(\vec{x}, \vec{y})$  описывает численно предпочтение, оказываемое человеком условиям  $\vec{y}$  пе-

ред  $\vec{x}$ .

Простейшей функцией предпочтения является линейная:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = a + (\vec{b}, \vec{y} - \vec{x}), \quad \vec{b} \geq 0.$$

В этой модели предполагается, что интенсивности переходов между группами  $\lambda_{ij}$  могут зависеть от предпочтений нелинейно, но поддаются линеаризации, т.е. существуют такие строго возрастающие выпуклые вниз функции  $G_i(x)$ ,  $x > 0$ , что

$$G_i(\lambda_{ij}) = f(\vec{x}_i, \vec{x}_j), \quad \lambda_{ij} = G_i^{-1}(f(\vec{x}_i, \vec{x}_j)),$$

где  $\vec{x}_i$  — условия в  $i$ -ой группе. Тогда для любых  $i, j, k$  выполнено тождество:

$$G_i(\lambda_{ij}) = G_k(\lambda_{kk}) - G_k(\lambda_{ki}) + G_k(\lambda_{kj}).$$

В других моделях учитывается возможное разнообразие условий в группах, характеризуемое некоторыми распределениями случайных наборов факторов. Пусть, для простоты, условия характеризуются единым показателем, уровнем жизни. Рассмотрим функцию предпочтения

$$f(u, v) = \begin{cases} 1, & u < v, \\ 1/2, & u = v, \\ 0, & u > v. \end{cases}$$

*Коэффициентом групповой привлекательности*  $q_{ij}$  тогда называется величина  $\mathbf{M}f(\xi_i, \xi_j)$ , где  $\xi_i$  — случайный уровень жизни в  $i$ -ой группе. Если уровни жизни имеют непрерывные распределения  $F_i$ , то

$$q_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_j(u)) dF_i(u).$$

Для любых  $i, j$  выполнено тождество  $q_{ij} + q_{ji} = 1$ . Интенсивности переходов определяются как  $\lambda_{ij} = c_i q_{ij} a_j$ , где  $c_i \geq 0$  (способность людей уйти из  $i$ -ой группы) и  $0 \leq a_j \leq 1$  (доступность  $j$ -ой группы).

Коэффициенты групповой привлекательности инвариантны относительно любого монотонно возрастающего непрерывного преобразования над уровнем жизни во всех группах одновременно.

Возникающие в описанных моделях величины  $\lambda_{ii} > 0$  можно интерпретировать как интенсивности переходов внутри групп (переездов в пределах города, региона и т.п.) либо игнорировать (при расчетах межгруппового движения населения).

- 9.1.** Пусть уровень жизни определяется функцией полезности вида  $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ ,  $\alpha_{1,2} > 0$ . Найти распределение уровня жизни, если факторы  $x_1, x_2$  независимы и имеют распределения:
- а) равномерные на  $[0, r_1]$  и  $[0, r_2]$ ,  $r_{1,2} \geq 0$ ;
  - б) логнормальные с параметрами  $(\mu_1, \sigma_1^2)$  и  $(\mu_2, \sigma_2^2)$ .
- 9.2.** Имеются три группы. Интенсивности переходов из первой составляют 0,2; 0,4 и 0,8 соответственно. Восстановить матрицу интенсивностей переходов для модели с линейной функцией предпочтения, если линеаризующие функции  $G_1(x) = x^2$ ,  $G_2(x) = e^x - 2$ ,  $G_3(x) = (x - 2)/(3 - x)$ ,  $x > 0$ .
- 9.3.** Пусть в группе А средний уровень жизни  $a$  и в группе Б —  $b$ . Найти коэффициент групповой привлекательности  $q_{AB}$ , если распределения уровня жизни в А и Б:

- а) показательные;
  - б) равномерные (начиная от нуля);
  - в) Парето, т.е. вида  $F(x) = 1 - (\lambda/x)^\alpha$ ,  $x \geq \lambda$ , с одинаковым параметром формы  $\alpha > 1$ ;
  - г) нормальные с дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ .
- 9.4.** (Т) При каком числе групп представление интенсивностей в виде  $\lambda_{ij} = c_i q_{ij} a_j$  сокращает число независимых параметров?
- 9.5.** (В) Найти величины  $c_i$  и  $q_{ij}$ , в предположении, что все группы полнодоступны (т.е. все  $a_j = 1$ ), по матрице интенсивностей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 10 & 15 & 18 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

## 10. Социально-экономическое расслоение.

*Коэффициентом фондов  $k_f$*  называется отношение среднего дохода самых богатых 10% населения к среднему доходу самых бедных 10%. Коэффициент фондов принимает любые значения, не меньшие 1.

*Кривая Лоренца* определяется как множество точек вида  $(x, y)$ , каждая из которых означает, что доле  $x$  самого бедного населения принадлежит доля  $y$  всего дохода. Кривая Лоренца заключена в единичном квадрате под его диагональю, проходит через ее концы и выпукла вниз. Если известна функция распределения доходов  $F(w)$ ,  $w \geq 0$ , кривая задается параметрически по формуле

$$\{(F(w), L(w), w \geq 0\}, \quad L(w) = \frac{1}{W} \int_0^w u \, dF(u),$$

где  $W$  — средний доход. Если таким образом получается множество из отдельных точек, их соединяют отрезками прямых (кусочно-линейная аппроксимация).

*Коэффициент Джини*  $G$  равен отношению площади между диагональю и кривой Лоренца к половине площади единичного квадрата. Таким образом, получаем

$$G = 1 - 2 \int_0^\infty L(w) dF(w).$$

Коэффициент Джини принимает значения от 0 до 1.

При социально-экономических исследованиях население иногда делят на группы одинаковой численности по возрастанию доходов. Если имеется  $n$  групп, доли дохода которых составляют  $r_1, \dots, r_n$ , то коэффициент Джини можно оценить по формуле, следующей из кусочно-линейного приближения<sup>10</sup>:

$$G = 1 - \frac{1}{n} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} s_i \right), \quad s_i = \sum_{j=1}^i r_j.$$

Коэффициенты фондов и Джини вводятся как меры социально-экономического расслоения общества и оценивают степень неравномерности распределения доходов у населения (чем она выше, тем коэффициенты больше).

*Уровень бедности*  $z$  называют величину, лица с доходами не выше которой считаются бедными. Если уровень бедности установлен, то можно определить различные *показатели бедности*, например

$$P_\alpha = \int_0^z \left( 1 - \frac{w}{z} \right)^{\alpha-1} dF(w), \quad \alpha \geq 1.$$

---

<sup>10</sup> В силу выпуклости вниз кривой Лоренца оценка получается немного заниженной.

В частности,  $P_1 = H$  — доля бедных во всем населении,  $P_2 = D$  — относительная нехватка доходов.

- 10.1.** (Т) Найти коэффициент фондов и коэффициент Джини  $G$  при фиксированных наименьшем доходе  $a$  и среднем доходе  $W$  для следующих распределений:
- а) равномерного;
  - б) Парето.
- Построить соответствующие кривые Лоренца.
- 10.2.** (Т) Пусть население делится на группы с доходами  $a$  и  $b$ ,  $a < b$ , доли групп в общей численности населения равны  $p$  и  $q$ . Найти коэффициент Джини.
- 10.3.** (Т) При каком соотношении численностей групп в **10.2** коэффициент Джини максимален? Найти его значение. Решить задачу при  $a = 4$ ,  $b = 9$ .
- 10.4.** Пусть население делится на две группы, численности которых относятся как 5:1, а доходы как 1:5.
- а) Найти коэффициент Джини.
  - б) Как он изменится, если вторую группу обложить 10-процентным налогом в пользу первой?
- 10.5.** При каком значении параметра формы распределения Парето 25% самых богатых людей имеют 50% всего дохода? Каковы в этом случае значения коэффициентов фондов и Джини?
- 10.6.** По табл. 10.1 оценить коэффициент Джини<sup>11</sup>.
- 10.7.** Найти показатели бедности  $P_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  при

---

<sup>11</sup> Реальное значение 0.394

уровне бедности  $z = 2$  для распределения доходов ( $W = 3$ ):

- а) равномерного на  $[1, 5]$ ;
- б) Парето  $F(x) = 1 - x^{-3}$ ,  $x \geq 1$ ;

### 11. Некоторые модели страхования.

Обозначим через  $l_x$  среднее число людей, доживших до возраста  $x$  из числа родившихся  $l_0 = 100000$ .

*Дисконтным множителем (дисконтом)* называется величина  $\nu = 1/(1+i)$ , где  $i$  — годовая процентная ставка или *норма доходности*.

*Текущей стоимостью контракта* называется взвешенная сумма всех предстоящих выплат по нему, с учетом того, что сумма, которая должна быть выплачена через  $n$  лет, имеет вес  $\nu^n$ , т.е. *дисконтируется*.

*Актuariйной (ожидаемой) текущей стоимостью* называется текущая стоимость контракта страхования с учетом смертности клиентов и перераспределения страховых взносов в пользу выживших.

Далее везде стоимость контракта, страховая сумма и т.п. понимаются именно в этом (актуарном) смысле.

*Тарифной ставкой (тарифом)* называют величину страхового взноса на единицу страховой суммы.

Введем следующие *коммутационные функции*:

$$D_x = \nu^x l_x, \quad C_x = \nu^{x+1}(l_x - l_{x+1}),$$

$$N_x = \sum_{k \geq x} D_k, \quad M_x = \sum_{k \geq x} C_k.$$

Далее будут рассмотрены различные модели страхования, где всюду через  $x$  обозначается возраст клиента, заключающего контракт.

*Страхование на чистое дожитие* заключается в страховании определенной суммы денег на определенный срок  $n$ . В случае смерти страхователя в период действия договора сумма не выплачивается и взносы не возвращаются. Тариф страхования на чистое дожитие  $A_{x:\overline{n}|}^1 = D_{x+n}/D_x$ .

*Обыкновенная пожизненная рента* выплачивается ежегодно в конце каждого года дожития в течение всей оставшейся жизни застрахованного. Тариф обыкновенной ренты  $a_x = N_{x+1}/D_x$ .

*Приведенная пожизненная рента* выплачивается ежегодно в начале каждого года дожития в течение всей оставшейся жизни застрахованного. Тариф приведенной ренты  $\ddot{a}_x = N_x/D_x$ . Отсюда  $a_x = \ddot{a}_x - 1$ .

*Срочной рентой* называется рента, выплаты которой ограничены сроком  $n$ . Тарифы для обыкновенной и приведенной срочных рент описываются формулами  $a_{x:\overline{n}|} = (N_{x+1} - N_{x+1+n})/D_x$  и  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = (N_x - N_{x+n})/D_x$  соответственно. Отсюда  $a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + D_{x+n}/D_x$ .

Величину  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$  называют также *коэффициентом рассрочки*, т.к. она равна величине стоимости контракта на единицу ежегодного страхового взноса (когда взносы делаются ежегодно, а не единовременно при заключении контракта).

*Пожизненное страхование* предполагает единовременную выплату страховой суммы в случае смерти застрахованного. Тариф пожизненного страхования  $A_x = M_x/D_x$ .

*Страхование жизни на срок* предполагает выплату страховой суммы только в случае смерти до истечения срока договора  $n$ . Тариф страхования жизни на срок



$$A_{x:\overline{n}|}^1 = (M_x - M_{x+n})/D_x.$$

В обоих моделях страхования жизни выплата предполагалась в конце года смерти застрахованного. Если выплата производится немедленно после смерти, тарифы следует умножить на  $i/\ln(1+i) \approx 1+i/2$ , а обозначаются они  $\bar{A}_x$  и  $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$ .

*Страхование жизни с ежегодными взносами* предполагает уплату взносов до наступления смерти, с последующей выплатой страховой суммы. Тариф (отношение величины ежегодного взноса к страховой сумме)  $\bar{P}_x = (i/\ln(1+i))M_x/N_x$ .

*Пенсионное страхование* в наиболее простом случае предполагает, что выплаты пожизненной ренты (пенсии) в начале каждого года начинаются по достижении определенного возраста  $p$ , до которого предусмотрен период уплаты взносов в течение  $t = p - x$  лет. Пенсионный тариф (отношение величины ежегодного взноса к величине ежегодной пенсии)  ${}_mP_x = N_p/(N_x - N_p)$ .

Далее предполагаем, что годовая процентная ставка составляет 5%, и пользуемся данными табл. 11.1.

- 11.1.** Определить стоимость контракта на дожитие сроком 5 лет на сумму 10000 руб. при заключении его в 40 лет:
  - а) для мужчин;
  - б) для женщин.
- 11.2.** Определить стоимости обыкновенной и приведенной пожизненных рент с ежегодной выплатой 50000 руб. при заключении контракта в 40 лет:
  - а) для мужчин;
  - б) для женщин.

- 11.3.** Решить задачу **11.2** для срочных рент, со сроком 10 лет.
- 11.4.** Определить стоимость контракта страхования жизни с выплатой 100000 руб. (немедленно после смерти) при заключении его в 50 лет:
- а) для мужчин;
  - б) для женщин.
- 11.5.** Решить задачу **11.4** в случае, когда страховые взносы уплачиваются ежегодно. Найти размеры взносов.
- 11.6.** Решить задачу **11.4**, если контракт заключается на 10 лет.
- 11.7.** Найти размер взносов по контракту пенсионного страхования при заключении его в 30 лет с ежегодной пенсией 25000 руб.:
- а) для мужчин, с выходом на пенсию в 60 лет;
  - б) для женщин, с выходом на пенсию в 55 лет.

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

### 1. Модели роста численности населения.

#### 1.1.

$$x(t) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}.$$

Решаем конечно-разностное уравнение  $x(t) = x(t-1) + x(t-2)$  с начальными условиями  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 2$ . Корни характеристического уравнения  $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ . График решения представлен на рис. 1.

#### 1.2.

$$x(t) = 2^t + 2^{t/2} \left( \cos \gamma t + \frac{1}{\sqrt{7}} \sin \gamma t \right), \text{ где } \gamma = \arccos \left( -\frac{1}{\sqrt{8}} \right).$$

Решаем конечно-разностное уравнение  $x(t) = x(t-1) + 4x(t-2)$  с начальными условиями  $x(0) = x(1) = x(2) = 2$ . Корни характеристического уравнения  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_{2,3} = (5 \pm i\sqrt{7})/2 = \sqrt{2}(\cos \gamma \pm i \sin \gamma)$ . График решения представлен на рис. 2.

**1.3.** Решаем соответствующие дифференциальные уравнения.

а)

$$x(t) = \frac{x_0 l e^{lt}}{(l - x_0) + x_0 e^{lt}};$$

б)

$$x(t) = \frac{x_0 l e^{l^\alpha t}}{((l^\alpha - x_0^\alpha) + x_0 e^{l^\alpha t})^{1/\alpha}};$$

в)

$$x(t) = l(x_0/l)^{e^{-t}}.$$



Рис. 1:

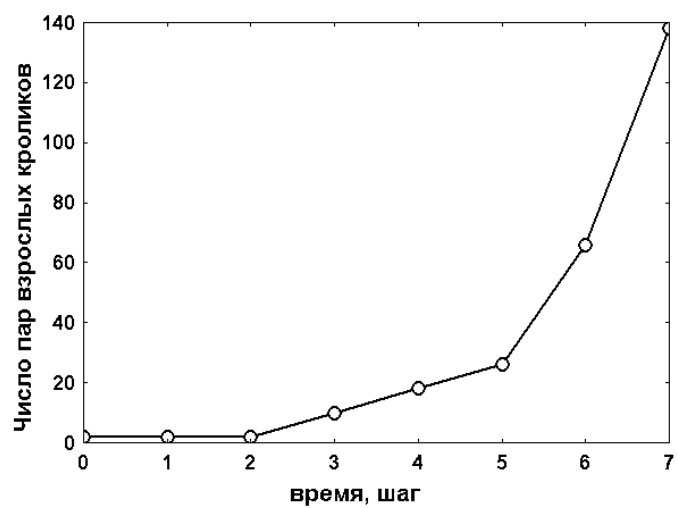


Рис. 2:

График решения **1.3а** (логистическая кривая) при  $x_0 = 0,05$ ,  $l = 1$  представлен на рис. 3.

**1.4.**  $T = 1/(cx_0)$ . Решая дифференциальное уравнение  $x'(t) = cx^2$ , получаем формально  $x(t) = x_0/(1 - cx_0t)$ .

**1.5.** *Указание:* разбить временную ось на отрезки длины  $\varepsilon$  и действовать по индукции.

**1.6.** а) 8 млрд. чел.; 6 млрд. чел.; б) 2005 год; 2057 год; в) 156 млн. чел., в 1956 г.; г) 12,9 млрд. чел.; д) до 1965 года лучше первая модель, в 1965–1990 гг. прогнозы мало отличаются от данных и друг от друга, после 1990 года лучше вторая.

Графики модельных прогнозов и реальных данных представлены на рис. 4. Через DN обозначена разность между предсказаниями моделей I и II.

**1.7.** а) примерно 5:3; б) через 38,5 лет.

**1.8.** 63,2 млн. чел.; через 57,6 лет. Находится минимум функции  $x(t) = 100e^{-0,02t} + 10e^{0,02t}$ .

**1.9.** От 109,4 до 111,6 млн. чел.

**1.10.** а)  $\tilde{x}(t) = x_0 \sum_{i=1}^n p_i e^{k_i t}$ ; б)  $\tilde{x}(t) = x_0 \exp\{k_0 t + \sigma^2 t^2 / 2\}$ ; в)  $\tilde{x}(t) = x_0 / (1 - k_0 t)$ ,  $0 \leq t < 1/k_0$ . Во всех случаях находим  $\tilde{x}(t) = x_0 \mathbf{M}e^{kt}$ .

## 2. Модели смертности.

### 2.1.

а)

$$\bar{F}(x) = \left(1 - \frac{x}{b}\right)^a, \quad M(x) = \frac{b-x}{a+1};$$



Рис. 3:

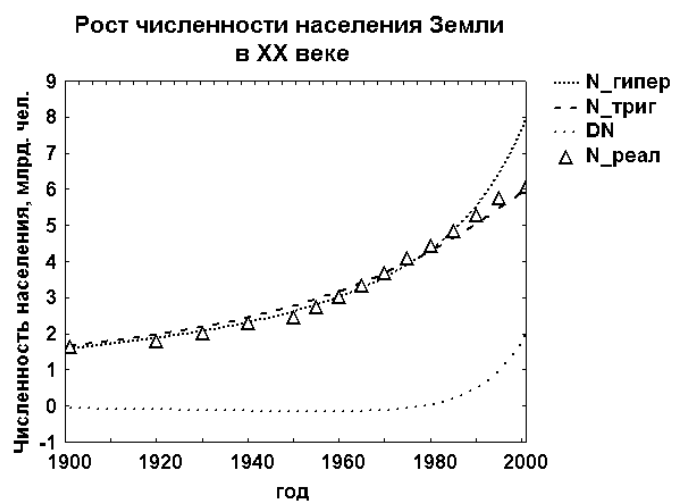


Рис. 4:

б) При  $0 \leq x < x_0$ :

$$\bar{F}(x) = \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{-c},$$

$$M(x) = \frac{b - x_0}{a + 1} \left(\frac{l + x}{l + x_0}\right)^c + \frac{l + x}{1 - c} \left(\left(\frac{l + x_0}{l + x}\right)^{1-c} - 1\right);$$

при  $x_0 \leq x < b$ :

$$\bar{F}(x) = \left(1 + \frac{x_0}{l}\right)^{-c} \left(\frac{b - x}{b - x_0}\right)^a, \quad M(x) = \frac{b - x}{a + 1}.$$

**2.2.** а)  $2/3$ ;  $26\frac{2}{3}$ ; б)  $1/3$ ;  $6\frac{2}{3}$ . Используем результаты **2.1а**, находим недостающие параметры из формулы  $T_0 = M(0) = b/(a + 1)$ .

**2.3.** Пусть  $z = x/b$ , тогда получаем

$$d(x) = \frac{ax^{a-1}}{b^a - x^a}, \quad M(x) = T_0 \left(\frac{1 - z}{1 - z^a} - \frac{z}{a}\right), \quad T_0 = \frac{ab}{a + 1};$$

а) 0,94; 29,4 лет; б) 0,64; 19,5 лет.

Формулы для  $d(x)$ ,  $M(x)$  в **2.1а** и **2.3** совпадают при  $a = 1$ .

**2.4.** а) 0,005; б) 0,024; в) 0,108.

**2.5.** а)  $\bar{F}(x) = \exp\{-ax - (b/c)(e^{cx} - 1)\}$ ; б) 0,009. Обозначим  $u = e^{40c}$ ,  $v = b/c$ , тогда  $\bar{F}(40) = e^{-v(u-1)}$ ,  $\bar{F}(80) = e^{-v(u^2-1)}$ . Логарифмируя и решая соответствующие системы уравнений, получаем  $u$  и  $v$ , а затем  $\bar{F}(90) = e^{-v(u^3-1)}$ .

**2.6.**

$$d_1 = \frac{d_A + d_C - d_B}{2}, d_2 = \frac{d_A + d_B - d_C}{2}, d_3 = \frac{d_B + d_C - d_A}{2};$$

$$\bar{F}_1 = \sqrt{\frac{\bar{F}_A \bar{F}_C}{\bar{F}_B}}, \bar{F}_2 = \sqrt{\frac{\bar{F}_A \bar{F}_B}{\bar{F}_C}}, \bar{F}_3 = \sqrt{\frac{\bar{F}_B \bar{F}_C}{\bar{F}_A}}.$$

Решаем систему трех линейных уравнений относительно  $d_1, d_2, d_3$  и пользуемся выражением функции дожития через силу смертности.

**2.7.** 5,8‰. По результатам **2.6** находим  $d_1 = 2‰$ ;  $d_2 = 1‰$ ;  $d_3 = 3‰$ . Снижая влияние первой причины на 10%, получаем  $d_1^* = 1,8‰$  и  $d_D^* = d_1^* + d_2 + d_3$ .

**2.8.** *Указание:* продифференцировать выражение для  $M(y)$ .

**2.9.** При постоянной силе смертности  $d$  на  $(y_1, y_2)$  получаем

$$M(y_1) = e^{-(y_2-y_1)d} M(y_2) + \frac{1 - e^{-(y_2-y_1)d}}{d};$$

$$M(y_2) = e^{(y_2-y_1)d} M(y_1) - \frac{e^{(y_2-y_1)d} - 1}{d}.$$

**2.10.** 43,7 лет; 0,7 лет. Пользуясь формулой из **2.9**, получаем  $M(25) \approx 43,69$  (года). С другой стороны, более простое линейное приближение  $M(y+h) \approx (1+hd)M(y) - h$ , следующее из дифференциального уравнения, дает  $M(25) \approx 43,72$  (года), так что результаты почти не отличаются.

**2.11.** а) 65, 75 и 70 лет; б) 60, 72 и 66 лет.

Данные о смертности из табл. 2.4 и 2.5 графически отображены на рис. 5 и 6.

**2.12.** а) 15, 19 и 18 лет; б) 13, 18 и 16 лет.

**2.13.** От 20 до 55 лет.

**2.14.** Уменьшится на 1 год.



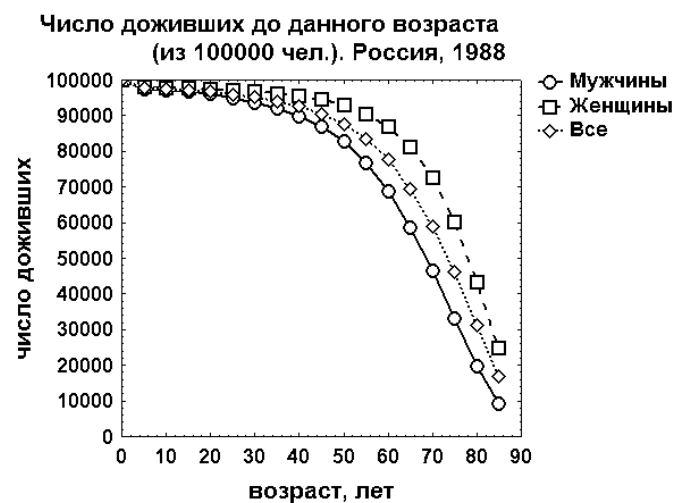


Рис. 5:

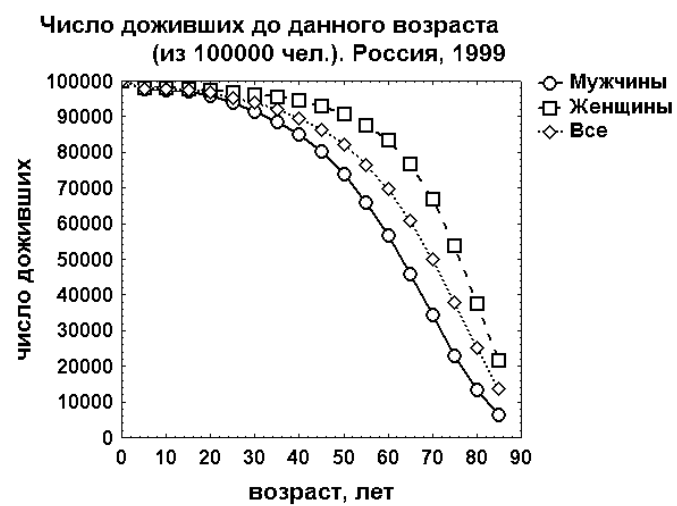


Рис. 6:

**2.15.** В возрасте 0–4 лет болезни органов дыхания, в 5–34 лет несчастные случаи, в 35–49 лет новообразования, от 50 лет болезни системы кровообращения.

**2.16.** а) 0,72; 0,89; б) 0,29; 0,50. Используем формулу условной вероятности.

**2.17.** а) 0,59; 0,86; б) 0,23; 0,45.

**2.18.** 2/3. С помощью результатов **2.3** находим неизвестные параметры для мужчин и женщин:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ . Пусть случайная продолжительность жизни мужчины  $\xi_1$ , женщины  $\xi_2$ , тогда искомая вероятность

$$p = \mathbf{P}(\xi_1 < \xi_2) = \int_0^{90} \left(\frac{x}{90}\right)^2 d\left(\frac{x}{90}\right)^4.$$

**2.19.** а) 0,9; б) 0,86; в) 0,78. Графики логитов и функции дожития представлены на рис. 7 и рис. 8.

**2.20.** От 9,8 до 10,2 тыс. смертей. Используем сначала пуассоновское, а затем нормальное приближение.

### 3. Модели рождаемости.

**3.1.** Гипотеза принимается, т.к.  $\chi_{\text{об}}^2 \approx 11,06 < \chi_{\text{cr}}^2(0,01;4) = 13,3$ .

**3.2.**

а)  $N_b = A/b$ ,  $T_m = t_0 + 1/b$ ;

б)  $N_b = A_1/b_1 + A_2/b_2$ ,

$$T_m = \frac{A_1/b_1^2 + A_2/b_2^2}{A_1/b_1 + A_2/b_2};$$

в)  $N_b = A l^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1)$ ,

$$T_m = t_0 + (t_1 - t_0) \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}.$$



Рис. 7:

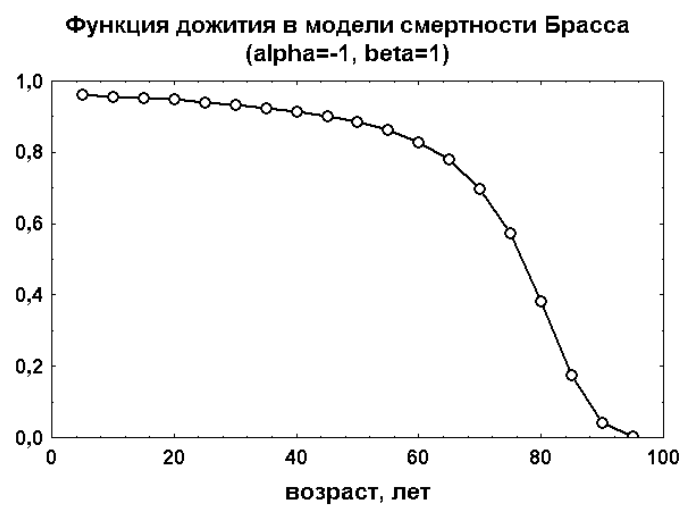


Рис. 8:

**3.3.** а)  $A = N_b/98826,75$ ;  $t_0 = T_m - 13,2$ . Используя формулы из **3.2в**, получаем  $N_b = (33^4/12)A$ ,  $T_m = t_0 + 33 \cdot (2/5)$ , откуда и выражаем параметры; б)  $f_{\max} \approx 0,108$  при  $t_{\max} = 24$  (года). Определяем параметры  $A$ ,  $t_0$  по выведенным формулам. Точку максимума находим дифференцированием. Заметим, что в модели Брасса всегда  $t_{\max} = t_0 + 11$ .

График возрастной функции фертильности в модели Брасса при условиях **3.3б** представлен на рис. 9. Видно, что модель завышает рождаемость в младших возрастах (до 15 лет).

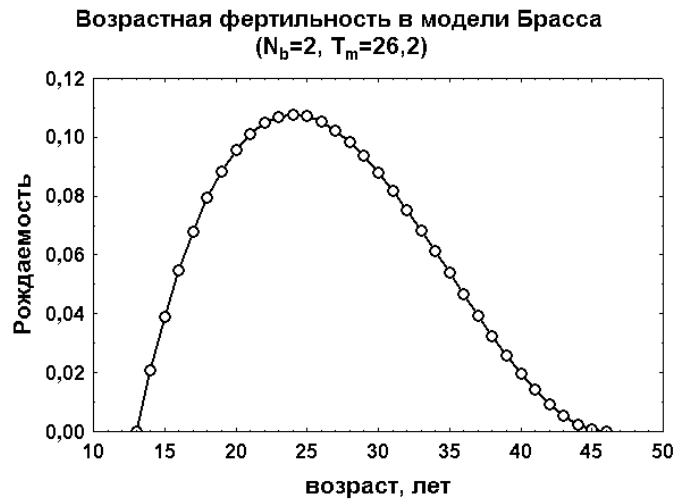


Рис. 9:

**3.4.**

а)  $q = \min\{p_0/p_2, 1\}$ ;

б)

$$q = \frac{\sqrt{(p_2 + p_3)^2 + 4p_0p_3} - (p_2 + p_3)}{2p_3};$$

в)  $q = \min\{1/\mu, 1\}$ .

**3.5.** а) 0,156; б) 0,09; в) 0,067. Во всех случаях используем результат **3.46**.

**3.6.** 2,15 детей; 25,5 лет. Для определения среднего возраста матерей можно разбить их на группы по полному числу детей, вычислить среднее в каждой, а затем взять взвешенную сумму и нормировать ее на долю женщин, имеющих детей  $(1 - p_0)$ .

**3.7.** а) биномиальное с параметрами  $n = 4$ ,  $p_{\text{мал}} = 0,309$ ; б) пуассоновское со средним 1,03. Используем формулы для случайного числа независимых случайных слагаемых (индикаторов).

**3.8.**

а)

$$\mu = \frac{b}{(1-c)^2}; \quad q = \frac{1-(b+c)}{c(1-c)} \text{ при } \mu < 1, \quad q = 1 \text{ иначе};$$

б)  $\mu = 1,25$ ;  $q \approx 0,83$ .

**3.9.** а) 24,2 года. В группе женщин, имеющих  $r \geq 1$  детей, средний возраст матерей оказывается равным  $21 + r$ . Используя формулы пуассоновского распределения, получаем  $T_m = 21 + 3/(1 - e^{-3})$ . б) Уменьшится на 0,3 года. Здесь получаем  $T_m = 22 + 1,5/(1 - e^{-1,5}) \approx 23,9$ .

**3.10.** а) 2,12 детей; 25,9 лет; б) 2,06 детей.

**3.11.** а) 1,17 детей; 25,6 лет; б) 1,13 детей.

Возможные небольшие расхождения результатов **3.10, 3.11** с другими источниками могут быть вызваны грубостью используемого приближения и/или различиями в определении и методиках вычисления.

**3.12.** а) гипотеза отвергается; б) гипотеза принимается. В обоих случаях применяем критерий хи-квадрат (как и в **3.1**).

**3.13.** Да, можно утверждать, что в городе А средняя рождаемость больше. В предположении равенства средних рождаемостей, с учетом отношения численностей населения городов, рождение очередного ребенка с вероятностью  $1/3$  происходит в А и с вероятностью  $2/3$  в Б. Всего произошло 30 тыс. рождений. Применяя критерий хи-квадрат, получаем  $\chi_{\text{об}}^2 = 6 > \chi_{\text{кр}}^2(0,05; 1) = 3,8$ .

**3.14.** От 9,8 до 10,2 тыс. рождений. Используем сначала пуассоновское, а затем нормальное приближение.

**3.15.** Примерно от 5020 до 5280 мальчиков.

#### **4. Модели движения активного населения.**

##### **4.1.**

а)

$$\vec{n}(t) = \frac{n_1^0 + n_2^0}{a + b} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \frac{an_1^0 - bn_2^0}{a + b} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-(a+b)t};$$

б)

$$\vec{n}(t) = \frac{n_1^0 + n_2^0}{a + b} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \frac{an_1^0 - bn_2^0}{a + b} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 - (a + b))^t.$$

Условия неотрицательности:

$$a + b \leq 2, \quad an_1^0 \geq (b - 1)n_2^0, \quad bn_2^0 \geq (a - 1)n_1^0.$$

Обозначим  $\lambda = 1 - (a + b)$ , тогда в любом случае верно  $\lambda < 1$ . Прежде всего, необходимо потребовать  $\lambda \geq -1$ , иначе решение идет "вразнос", неизбежно заходя в область отрицательных значений. Далее, необходимо потребовать  $\vec{n}(1) \geq 0$ . Этого оказывается достаточно, поскольку все значения  $\vec{n}(t)$  лежат либо на отрезке, соединяющем точки  $\vec{n}(0)$  и  $\vec{n}(1)$  (при  $\lambda < 0$ ), либо на отрезке, соединяющем  $\vec{n}(0)$  и  $\vec{n}(\infty) \geq 0$  (при  $\lambda > 0$ ). При  $\lambda = 0$  с момента  $t = 1$  наступает стабилизация.

в)  $a + b = 1$ .

**4.2.**

а)

$$\vec{s}(\infty) = \frac{1}{bc + ac + ab} \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix};$$

б)

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t};$$

в)

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{5}{98} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t} + \frac{1}{98} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-21t}.$$

График решения **4.2в** представлен на рис. 10.

**4.3.**

а)

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} a-b \\ -a \\ b \end{pmatrix} e^{-at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-bt}.$$

б)

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

График решения **4.3б** представлен на рис. 11.

**4.4.**

а)

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} 0,955^t \quad (\text{млн. чел.});$$

б) А: 0,9 млн. чел., Б: 0,9 млн. чел., В: 0,5 млн. чел.

в) А: 1,8 млн. чел., Б: 0,3 млн. чел., В: 0,2 млн. чел.

График решения представлен на рис. 12. На самом деле, интенсивности переходов меньше по величине, подвержены сезонным колебаниям и т.п.

**4.5.** а) 10%; б) в 1,9 раза.

**5. Модели естественного движения населения.**

**5.1.** Примем среднее число пар молодых за  $n_1$ , среднее число пар взрослых за  $n_2$ , и  $\vec{n} = (n_1, n_2)^T$ , тогда

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \mu(1-p) \\ 1 & 1-p \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(t+1) = L\vec{n}(t).$$



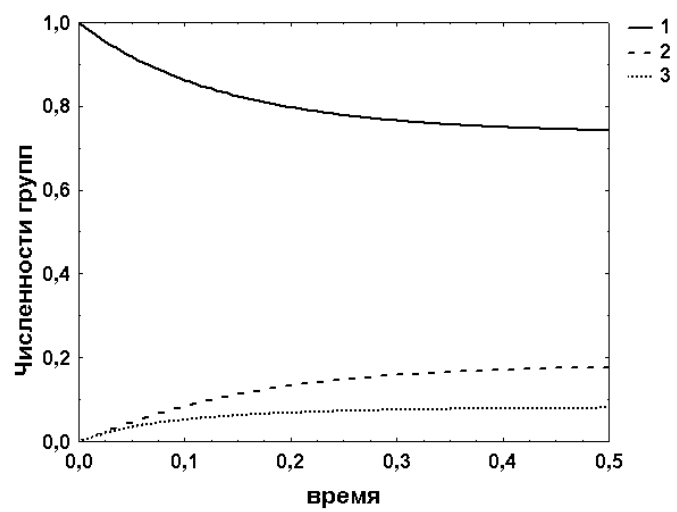


Рис. 10:

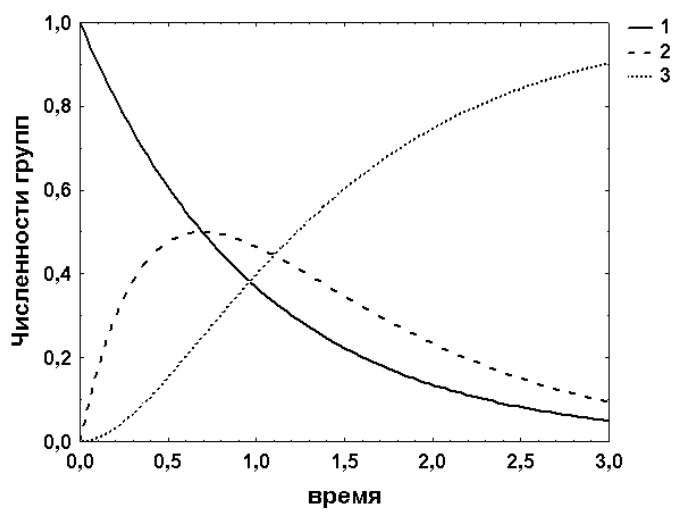


Рис. 11:

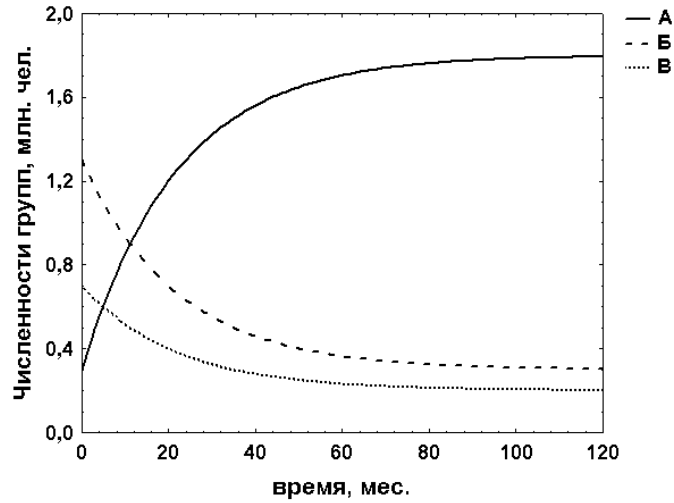


Рис. 12:

Собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = (q \pm \sqrt{q(q + 4\mu)})/2, \quad q = 1 - p.$$

- а)  $(5/7)1, 5^t + (2/7)(-0, 6)^t$ ; б)  $(5/8)2^t + (3/8)(-1, 2)^t$ ;  
 в)  $(8/13)2, 4^t + (5/13)(-1, 5)^t$ ; г)  $(4/7)2^t + (3/7)(-1, 5)^t$ ;  
 д)  $(2/3) + (1/3)(-0, 5)^t$ .

Строго в геометрической прогрессии среднее число пар (молодых и взрослых) растет при  $n_1^0 = (\lambda_1 - q)n_2^0$ , т.е. когда  $\vec{n}(0)$  — собственный вектор  $L$ , соответствующий  $\lambda_1$ . К конечному ненулевому пределу стремится при  $\mu = p/q$ ,  $0 < p < 1$ : тогда  $\lambda_1 = 1$ ,  $|\lambda_2| < 1$ .

**5.2.**  $z(t, x) = ce^{k(t-x)}\bar{F}(x)$ , где  $c > 0$ ,  $\bar{F}(x)$  — функция дожития,  $k$  — показатель роста, единственный корень уравнения

$$I(\lambda) = \int_0^\infty b(x)\bar{F}(x)e^{-\lambda x} dx = 1;$$

условие роста:

$$I(0) = \int_0^\infty b(x)\bar{F}(x) dx > 1,$$

из него следует  $k > 0$ , поскольку  $I(\lambda)$  убывает. Заметим, что  $I(0)$  есть нетто-коэффициент рождаемости (в расчете на одного человека).

**5.3.** а) 31,9 лет; б) 43,6 года. Удобно сделать замену  $u = x/100$ , тогда

$$T_e^{(a)} = 100 \frac{\int_0^1 u(1-u^2)e^{-u} du}{\int_0^1 (1-u^2)e^{-u} du}, T_e^{(б)} = 100 \frac{\int_0^1 u(1-u^2)e^u du}{\int_0^1 (1-u^2)e^u du}.$$

Графики соответствующих структур представлены на рис. 13.

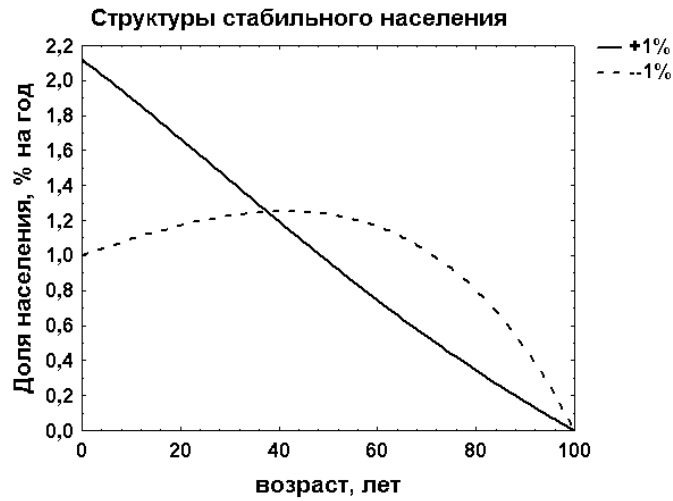


Рис. 13:

**5.4.**  $z_1(t, x) = c_1 \bar{F}_1(x) e^{k(t-x)}$ ,  $z_2(t, x) = c_2 \bar{F}_2(x) e^{k(t-x)}$ , где  $\bar{F}_1(x)$  и  $\bar{F}_2(x)$  — функции дожития женщин и мужчин,  $k$  — единственный корень уравнения

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty b_1(x) \bar{F}_1(x) e^{-\lambda x} dx = 1;$$

условие роста  $I_1(0) > 1$ . Заметим, что  $I_1(0)$  есть нетто-коэффициент рождаемости девочек, т.е. нетто-коэффициент воспроизводства.

**5.5.** а)  $b/(a+2)$ ; б)  $(b/2)(a+1)/(a+2)$ .

**5.6.** а) 0,514 для мальчиков и 0,486 для девочек; б) около 35 лет.

**5.7.** Максимумы: 10–14 лет (1986–1990 гг.), 40–44 года (1956–1960 гг.), 60–64 года (1936–1940 гг.), 70–74 года (1926–1930 гг.). Минимумы: 30–34 года (1966–1970 гг.), 55–59 лет (1941–1945 гг.), 65–49 лет (1931–1935 гг.).

Возрастная структура населения России представлена столбчатой диаграммой на рис. 14.

**5.8.** 1,2 млн. рождений.

**5.9.** 2,2 млн. смертей.

**5.10.** а) 0,92; б) 0,32; в) 0,02. График возрастной динамики репродуктивного потенциала для данной модели представлен на рис. 15. Видно, что потенциал сначала растет (что обусловлено значением  $k > 0$ ), а затем убывает до нуля.

## 6. Общие модели движения населения.

**6.1.** Равновесное состояние:  $l$  молодых и  $l/\mu$  взрослых.

а) Пусть  $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 + 4\mu})/2$ , тогда

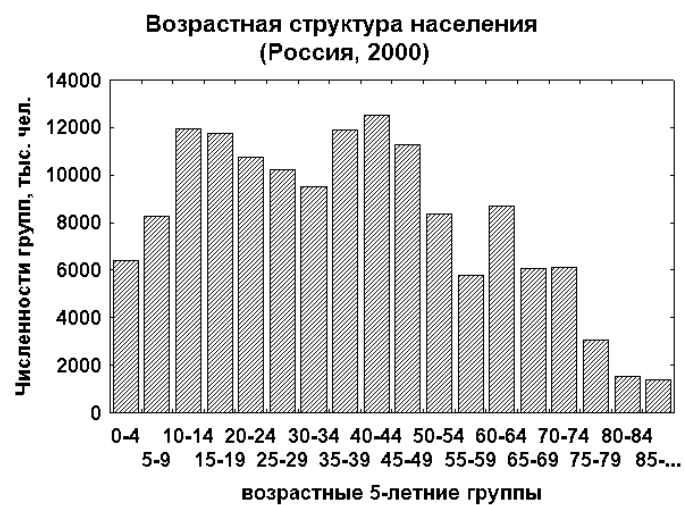


Рис. 14:

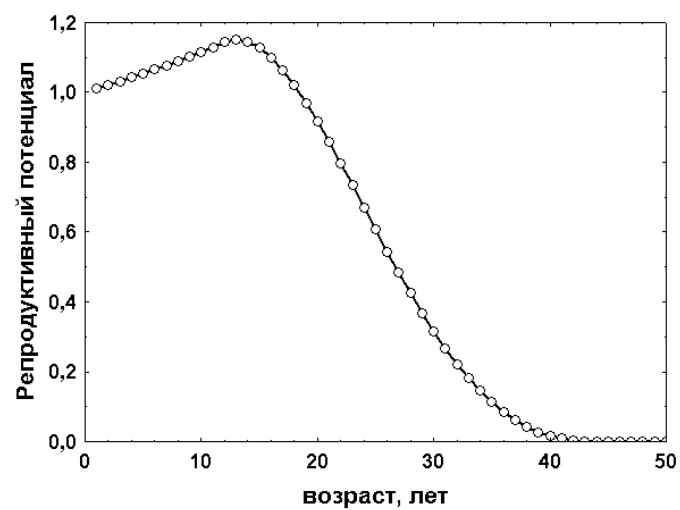


Рис. 15:

$$n_1(t) = (\mu\nu - l) \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2} + l,$$

$$n_2(t) = \left( \nu - \frac{l}{\mu} \right) \frac{\lambda_1^{t+1} - \lambda_2^{t+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{l}{\mu}.$$

б) Обозначим  $r = \nu - l/\mu$ , тогда популяция растёт при  $r > 0$ , вымирает при  $r < 0$ , стационарна при  $r = 0$  (что следует из формул).

**6.2.** 5 молодых, 3 взрослых, 4 старых.

**6.3.** Сначала динамика описывается уравнениями

$$n_1(t) = \frac{l}{a} + \left( n_1^0 - \frac{l}{a} \right) e^{at}, \quad n_2(t) = -\frac{l}{b} + \left( n_2^0 + \frac{l}{a} \right) e^{bt}.$$

Однако если  $an_1^0 < l$ , то начиная с момента

$$t_{\text{cr}} = -\frac{1}{a} \ln \left( 1 - \frac{an_1^0}{l} \right)$$

группа 1 становится пуста, и в дальнейшем

$$n_1(t) = 0, \quad n_2(t) = n_2(t_{\text{cr}}) e^{b(t-t_{\text{cr}})}.$$

**6.4.** Обозначим  $u = k_1 - l_1 + k_2 - l_2$ ,  $v = k_1 k_2 - k_1 l_2 - k_2 l_1$ . Популяция растёт, если либо  $u > 0$  и  $v \geq 0$ , либо  $v < 0$ ; вымирает, если  $u < 0$  и  $v > 0$ ; стремится к ненулевому пределу, если  $u \leq 0$ ,  $v = 0$ . Поведение определяется знаками корней характеристического уравнения, имеющего в данном случае вид  $\lambda^2 - u\lambda + v = 0$ .

**6.5.** Решаем системы линейных однородных дифференциальных уравнений:

а)

$$\vec{n}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad k = 3, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$$

б)

$$\vec{n}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k = 3, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};$$

в)

$$\vec{n}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad k = 7, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};$$

г)

$$\vec{n}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{8t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad k = 8, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix};$$

д)

$$\vec{n}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-8t}, \quad k = -1, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix};$$

**6.6.** Решаем системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

а)

$$\vec{n}(t) = \frac{21}{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t,$$

$$N(t) \sim \frac{21}{10} e^{6t}, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};$$

б)

$$\vec{n}(t) = \frac{9}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t},$$

$$N(t) \sim \frac{5}{2} e^{6t}, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};$$

в)

$$\vec{n}(t) = \frac{7}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} - \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t},$$

$$N(t) \sim \frac{1}{3} e^{8t}, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

**6.7.** 4,85 млн. мужчин; 6,06 млн. женщин. Решение имеет вид

$$\vec{n}(t) = 0,7 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} e^{0,008t} - 0,5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-0,008t}.$$

**6.8.** а) А: 7,44 млн. чел., Б: 2,21 млн. чел. Решение имеет вид

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{0,005t} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-0,005t}.$$

б) А: 8,01 млн. чел., Б: 2,21 млн. чел. В данном случае внешняя миграция компенсирует естественную убыль в группе А, но не влияет на численность группы Б, поскольку нет обратных переходов.

**6.9.** А: 11,65 млн. чел., Б: 10,47 млн. чел. Решение имеет вид

$$\vec{n}(t) = 10,1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0,01t} + 0,1 \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} e^{-0,002t}.$$



График решения представлен на рис. 16. Видно, что на рассматриваемом отрезке времени рост численностей регионов близок к линейному, так что удобнее использовать линейное приближение.

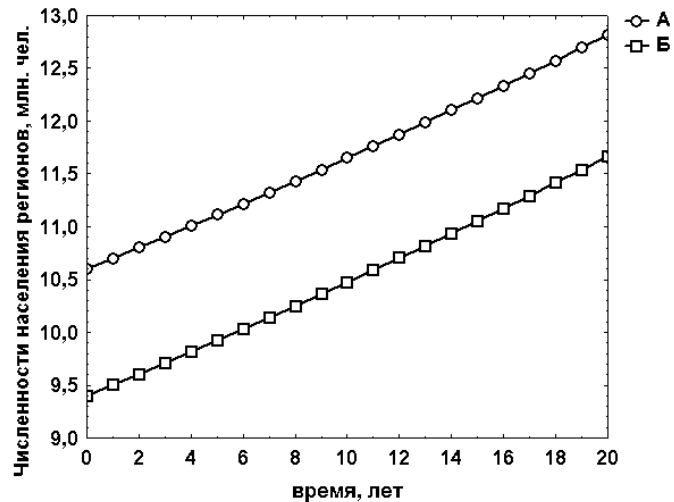


Рис. 16:

**6.10.** Интенсивность переезда из А в Б —  $8\text{‰}$ , из Б в А —  $12\text{‰}$ ; естественный прирост в А —  $10\text{‰}$ , в Б —  $5\text{‰}$  (в год). *Указание:* Чтобы найти естественный прирост в группе, надо вычесть из итогового прироста миграционный.

## 7. Объединение и расщепление групп.

### 7.1.

а)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б)

$$S = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

в)  $(7/8, 21/8, 2, 7/2, 6, 6)^T$ .

**7.2.** а) 4,83 млн. мужчин и 6,14 млн. женщин. Объединяя мужчин и женщин, получаем население с показателем роста  $9,36\%$ . б) 5,05 млн. мужчин и 5,78 млн. женщин. Структура стабильного населения имеет вид  $(7/15, 8/15)^T$ , показатель роста  $8\%$ .

На рассматриваемом отрезке времени выбор начального условия в качестве ведущего вектора дает более точный прогноз.

**7.3.** А: 11,73 млн. чел., Б: 10,40 млн. чел. Объединяя региональные группы, получаем население с показателем роста  $10,12\%$ . Относительная ошибка прогноза (по сравнению с ранее полученным) менее 1%.

**7.4.** а)  $k_1 = k_2$ ; б)  $k_1 = k_2, \lambda_{13} = \lambda_{23}$ ; в) если объединяются группы с индексами из множества  $M$ , то должны выполняться условия:

- все  $k_i, i \in M$ , равны;

- для любого  $j \notin M$  все  $\lambda_{ij}$ ,  $i \in M$ , равны.

Здесь имеем  $\lambda_{ij} = c_{ji}$ ,  $k_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}$ .

**7.5.** Можно объединить группы первую с третьей, вторую с пятой, четвертая группа остается без изменений. Нумеруя новые группы в той же последовательности, получаем

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Проверяем условия **7.4в**. Прежде всего находим  $k_1 = k_3 = k_4 = 11$  и  $k_2 = k_5 = 9$ . Имеет смысл пытаться объединять группы только с одинаковыми  $k_i$ . Далее проверяем равенства для  $\lambda_{ij}$  на каждом множестве индексов. Оказывается, в частности, что первую и третью группы объединить можно, но четвертую к ним присоединить уже нельзя, поскольку, например,  $\lambda_{12} = 2 \neq \lambda_{42} = 1$ .

## 8. Регулирование движения населения.

**8.1.** а)  $(1/2, 1/2)^T$ ; б)  $(0, 1)^T$ ; в)  $(-1/3, 4/3)^T$ , не достижимо.

**8.2.** Указание: рассмотреть условие  $\vec{q} \geq 0$ .

**8.3.** а) 0, т.е. регулирование не требуется;

б)  $N_0(-1/15, 1/15)^T$ ; в)  $N_0(-1/9, 1/9)^T$ .

**8.4.** а)  $(1, 1)^T$ ; б)  $(2/5, 8/5)^T$ ; в)  $(0, 2)^T$ .

**8.5.** а)  $N_0 e^{t/6} (1/12, 1/12)^T$ ; б)  $N_0 e^{t/6} (0, 1/6)^T$ ;

в)  $N_0 e^{t/6} (-1/18, 2/9)^T$ .

**8.6.**  $\alpha = \max\{0, l_2 g_2 / g_1 - (w_1 + l_1), l_1 g_1 / g_2 - (w_2 + l_2)\}$ .

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} (\alpha + w_1 + l_1)g_1 - l_2g_2 \geq 0 \\ (\alpha + w_2 + l_2)g_2 - l_1g_1 \geq 0 \\ \alpha \geq 0 \end{cases}.$$

**8.7.**

а)

$$\vec{q} = \frac{1}{w_1g_1 + w_2g_2 + w_3g_3} \begin{pmatrix} (w_1 + l_1)g_1 \\ (w_2 + l_2)g_2 - l_1g_1 \\ w_3g_3 - l_2g_2 \end{pmatrix};$$

б)  $l_1 = w_3g_3/g_2$ ;  $l_2 = (w_2g_2 + w_3g_3)/g_1$ ;

в)  $w_1$  любое;  $w_2 = l_1g_1/g_2 - l_2$ ;  $w_3 = l_2g_2/g_3$ .

**8.8.** а)  $\vec{s} = (1/3, 2(1+p)/9, 2(2-p)/9)^T$ ; б)  $p = 3(g_2 - g_3/2)$ ; в) отрезок, соединяющий точки  $(1/3, 2/9, 4/9)^T$  и  $(1/3, 4/9, 2/9)^T$ .

**8.9.** а)

$$\vec{s} = \frac{1}{4 + p_1 + p_2 - 2p_1p_2} \begin{pmatrix} 1 + p_2 \\ 1 + p_1 \\ 2(1 - p_1p_2) \end{pmatrix};$$

б)  $p_1 = (g_2 - g_3/2)/g_1$ ;  $p_2 = (g_1 - g_3/2)/g_2$ ;

в) область на плоскости  $g_1 + g_2 + g_3 = 1$ , ограниченная четырехугольником с вершинами  $(1/2, 1/2, 0)^T$ ,  $(1/4, 1/4, 1/2)^T$ ,  $(2/5, 1/5, 2/5)^T$ ,  $(1/5, 2/5, 1/5)^T$ . Данный четырехугольник представлен на рис. 17.

**8.10.** а) да; б) нет. *Указание:* найти показатель роста популяции с целевой структурой; население не должно убывать.

Множество достижимых структур

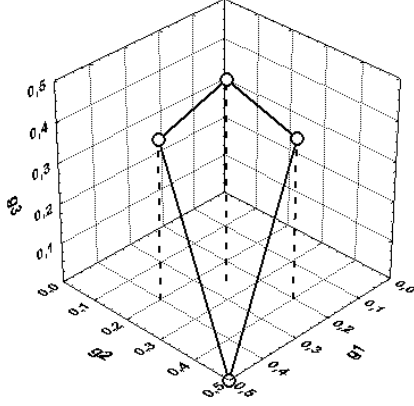


Рис. 17:

## 9. Мотивация движения населения

### 9.1. а) функция распределения

$$F(x) = \frac{\alpha_2(x/c)^{1/\alpha_2} - \alpha_1(x/c)^{1/\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \text{ при } \alpha_1 \neq \alpha_2;$$

$$F(x) = \left(\frac{x}{c}\right)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{x}{c}\right), \text{ при } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,$$

где  $c = u(r_1, r_2)$ . При расчетах удобно сделать замену  $y_1 = x_1/r_1$ ,  $y_2 = x_2/r_2$ , а также использовать графическое представление.

б) логнормальное с параметрами  $(\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2, (\sigma_1\alpha_1)^2 + (\sigma_2\alpha_2)^2)$ .

### 9.2.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,8 \\ 0,65 & 0,71 & 0,92 \\ 0,73 & 1,21 & 2,04 \end{pmatrix}.$$

Используем формулы для  $G_i(\lambda_{ij})$ , полагая  $k = 1$ , для  $i = 2$  и  $i = 3$ . Например,  $G_2(\lambda_{21}) = 0,2^2 - 0,4^2 + 0,2^2 = -0,08$ , откуда  $\lambda_{21} \approx 0,65$  и т.д.

**9.3.** а)  $b/(a+b)$ ; б)  $1 - a/(2b)$  при  $a \leq b$ ,  $b/(2a)$  при  $a > b$ ; в)  $1 - (1/2)(a/b)^\alpha$  при  $a \leq b$ ,  $(1/2)(b/a)^\alpha$  при  $a > b$ ; г)  $\Phi((b-a)/\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ , где  $\Phi(x)$  — функция стандартного нормального распределения.

Графики коэффициентов в **9.3а–в** (при  $a = 1$ ,  $\alpha = 2$ ) представлены на рис. 18. В принципе, все они ведут себя одинаково.

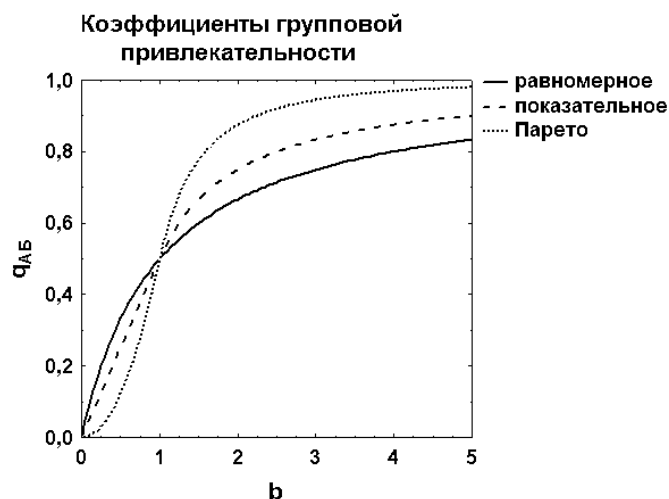


Рис. 18:

**9.4.** От четырех и больше (если учитывать диагональные элементы  $\Lambda$ )<sup>12</sup>. В случае  $n$  групп матрица  $\Lambda$  содержит  $n^2$  элементов. В представлении через коэф-

<sup>12</sup> Если не учитывать, то от шести и больше.

коэффициенты имеется  $2n$  величин  $c_i$ ,  $a_j$  и  $n(n-1)/2$  определяющих значений  $q_{ij}$  (с учетом  $q_{ij} + q_{ji} = 1$ ), так что всего  $(n^2 + 3n)/2$  параметров.

**9.5.**  $c_1 = 12$ ;  $c_2 = 30$ ;  $c_3 = 20$ ;  $q_{12} = 2/3$ ;  $q_{23} = 3/5$ ;  $q_{13} = 3/4$ .

## **10. Социально-экономическое расслоение.**

### **10.1.**

а)

$$k_f = \frac{19W - 9a}{W + 9a}, \quad G = \frac{W - a}{3W}, \quad y = \frac{(W - a)x^2 + ax}{W};$$

б)

$$k_f = \frac{0,1^{a/W}}{1 - 0,9^{a/W}}, \quad G = \frac{W - a}{W + a}, \quad y = 1 - (1 - x)^{a/W}.$$

Недостающие параметры распределений находим из выражений для среднего  $W$ : верхняя граница равномерного распределения  $2W - a$ , параметр формы распределения Парето  $\alpha = W/(W - a)$ .

Графики зависимости коэффициентов фондов и Джини от  $W/a$  представлены на рис. 19 и рис. 20.

Кривые Лоренца для указанных распределений в случаях одинакового отношения  $W/a$  и одинакового коэффициента Джини представлены на рис. 21 и рис. 22.

Видно, что при одинаковом соотношении среднего и минимального дохода распределение Парето является гораздо более "несправедливым".

**10.2.** Из геометрического представления выводим формулу

$$G = \frac{(b - a)pq}{ap + bq}.$$

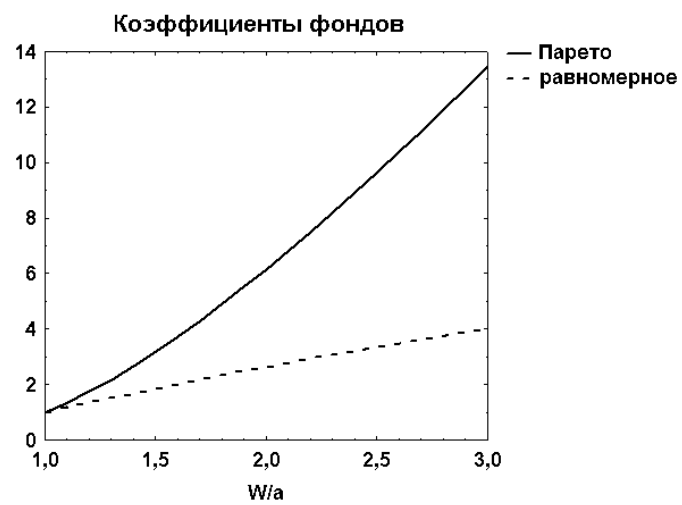


Рис. 19:

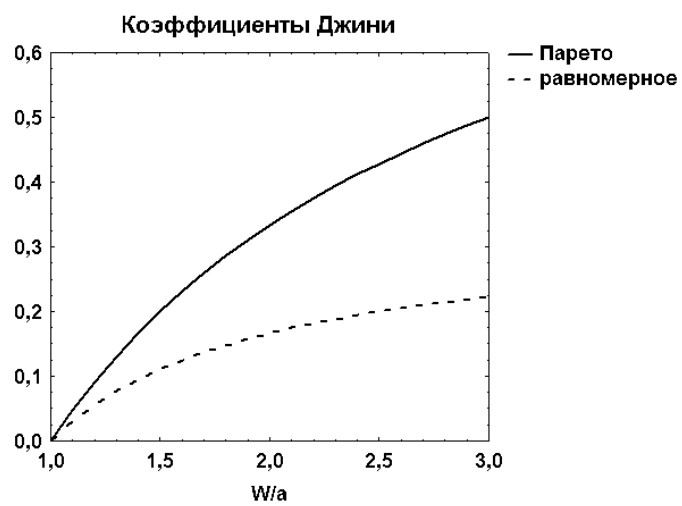


Рис. 20:



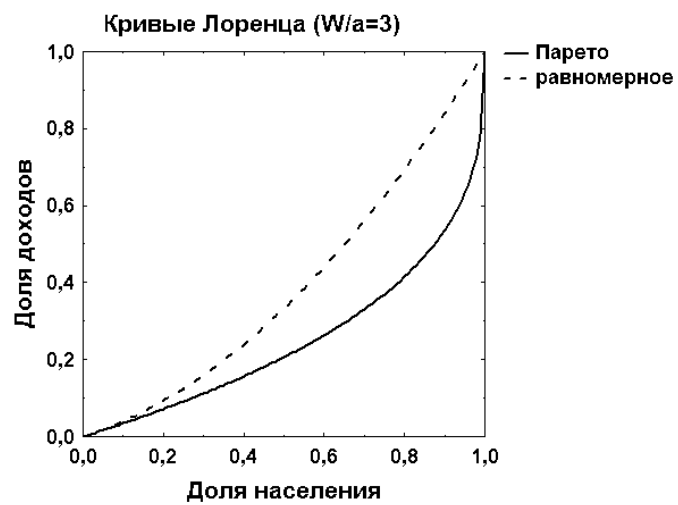


Рис. 21:

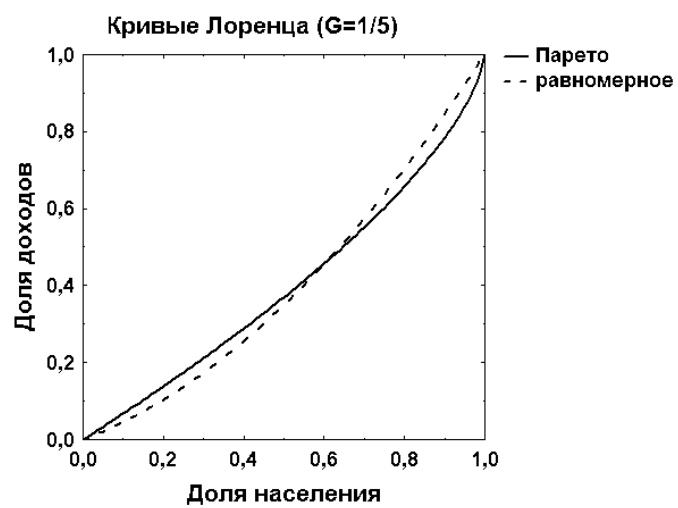


Рис. 22:

**10.3.**  $\sqrt{b} : \sqrt{a}$ ,  $(\sqrt{b} - \sqrt{a})/(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ ; 3 : 2, 1/5. Используем формулу для  $G$  из **10.2**, находим максимум дифференцированием по  $p$ . Получаем  $p = \sqrt{b}/(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ .

**10.4.** а) 1/3; б) уменьшится на 0,05.

**10.5.**  $\alpha = 2$ ;  $k_f \approx 6,16$ ;  $G = 1/3$ . Используем результаты задачи **10.16**. Кривая Лоренца должна проходить через точку  $(0,75; 0,5)$ , отсюда находим  $W/a = 2$  и т.д.

**10.6.** 0,37.

Кусочно-линейная кривая Лоренца, построенная по данным табл. 10.1, представлена на рис. 23.

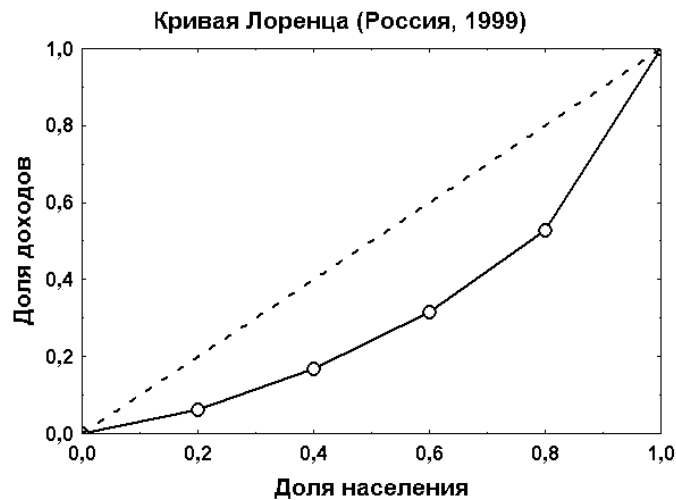


Рис. 23:

**10.7.** а) 1/4, 1/16, 1/48; б) 7/8, 5/16, 1/8. В случае распределения Парето все показатели бедности больше.

**11. Некоторые модели страхования.**

**11.1.** а) 7275 руб.; б) 7676 руб.

**11.2.** а) 619030 руб.; 669030 руб.; б) 765131 руб.;  
815131 руб.

**11.3.** а) 356956 руб.; 381064 руб.; б) 377694 руб.;  
398456 руб.

**11.4.** а) 48242 руб.; б) 32933 руб.

**11.5.** а) 4340 руб.; б) 2311 руб.

**11.6.** а) 22751 руб.; б) 8033 руб.

**11.7.** а) 2037 руб.; б) 5964 руб.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Таблица 1.1.**

Рост численности населения Земли в XX веке [3]

Год	Население, млн.
1900	1650*
1920	1811
1930	2020
1940	2295
1950	2450*
1955	2752
1960	3019
1965	3336
1970	3689
1975	4080
1980	4450
1985	4854
1990	5294
1995	5765
2000	6060

*Примечание:* \* отмечены усредненные данные по интервалу оценок.

**Таблица 2.1.**

Возрастные коэффициенты смертности в РФ в 1988 г.  
(число умерших за год на 1000 человек данного пола и  
возраста) [1]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
< 5	5,4	4,0	4,7
5–9	0,7	0,4	0,55
10–14	0,6	0,3	0,45
15–19	1,4	0,6	1,0
20–24	2,4	0,7	1,6
25–29	2,8	0,7	1,8
30–34	3,6	1,0	2,3
35–39	4,6	1,5	3,0
40–44	6,2	2,1	4,1
45–49	10,3	3,5	6,7
50–54	14,0	4,9	9,1
55–59	22,0	8,3	14,4
60–64	31,7	13,5	20,1
65–69	45,4	21,7	29,3
70–74	67,8	37,4	45,6
75–79	96,4	61,2	68,9
80–84	139,8	100,2	107,2
≥ 85	207,8	174,0	178,7

**Таблица 2.2.**

Возрастные коэффициенты смертности в РФ в 1999 г.  
(число умерших за год на 1000 человек данного пола и  
возраста) [5]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
< 5	4,8	3,7	4,3
5–9	0,6	0,4	0,5
10–14	0,6	0,3	0,5
15–19	2,0	0,8	1,4
20–24	4,5	1,1	2,9
25–29	5,2	1,3	3,3
30–34	6,5	1,7	4,1
35–39	8,4	2,2	5,3
40–44	11,5	3,2	7,3
45–49	16,2	4,8	10,3
50–54	22,3	7,2	14,2
55–59	31,5	10,7	19,8
60–64	42,5	15,4	26,7
65–69	59,0	25,4	38,2
70–74	78,5	40,7	53,1
75–79	101,3	66,2	75,3
80–84	149,9	116,1	123,5
≥ 85	203,6	206,9	208,1

**Таблица 2.3.**

Возрастные коэффициенты по основным причинам смерти всего населения СССР в 1986 г. (число умерших на 100000 человек) [1]

Возраст	1	2	3	4	Всего
0–4	2,6	8,7	246,6	51,9	664,4
5–9	1,0	6,4	6,0	16,1	44,1
10–14	1,6	5,6	2,9	11,7	32,9
15–19	3,5	6,6	2,9	21,9	51,4
20–24	7,2	9,3	3,6	23,5	68,5
25–29	9,7	13,8	3,7	25,2	79,5
30–34	14,9	25,5	4,5	30,5	104,5
35–39	26,8	45,7	5,7	35,9	147,8
40–44	53,8	78,4	8,8	47,0	229,7
45–49	99,8	124,8	12,4	52,5	339,5
50–54	202,7	181,7	22,6	57,6	535,1
55–59	371,5	276,5	36,7	60,2	842,0
60–64	705,3	373,3	60,1	58,5	1322,2
65–69	1327,3	478,9	105,7	64,4	2135,6
70–74	2615,0	599,6	193,4	79,7	3675,8
75–79	4711,5	631,5	328,8	103,4	5993,1
80–84	7879,8	545,4	514,7	130,2	9312,5
≥ 85	16489,2	477,4	1019,3	187,1	18506,0

*Основные причины смерти:*

- 1 — болезни системы кровообращения;
- 2 — новообразования;
- 3 — болезни органов дыхания;
- 4 — несчастные случаи, отравления, травмы.

**Таблица 2.4.**

Число доживающих до данного возраста в России<sup>13</sup>  
(из 100000 человек), 1988 г.

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
0	100000	100000	100000
5	97375	98049	97701
10	97031	97856	97431
15	96732	97703	97202
20	96065	97406	96715
25	94944	97083	95981
30	93598	96724	95114
35	91938	96247	94027
40	89832	95549	92604
45	86912	94497	90590
50	82687	92921	87650
55	76899	90560	83524
60	68906	86924	77644
65	58479	81118	69492
70	46376	72462	59027
75	33977	60154	46157
80	19732	43461	31240
85	9310	24690	16769

---

<sup>13</sup> Согласно данным "Демоскоп Weekly. Приложение. Справочник статистических таблиц". Колонка "Все население" рассчитана приближенно.



**Таблица 2.5.**

Число доживающих до данного возраста в России<sup>14</sup>  
(из 100000 человек), 1999 г. [5]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
0	100000	100000	100000
5	97649	98175	97904
10	97361	97987	97664
15	97011	97803	97395
20	95966	97421	96671
25	93909	96887	95353
30	91474	96282	93805
35	88565	95507	91931
40	84917	94467	89548
45	80147	92986	86373
50	73823	90768	82041
55	66071	87731	76576
60	56735	83392	69663
65	45909	76766	60874
70	34259	67030	50152
75	22918	53762	37877
80	13258	37708	25116
85	6342	21525	13705

---

<sup>14</sup> Колонка "Все население" рассчитана приближенно.

**Таблица 2.6.**  
 Логит-преобразования стандартной функции  
 распределения продолжительности жизни в модели  
 Брасса для некоторых возрастов [11, 12].

Возраст, лет	$\text{logit } F_0(x)$
5	-0,6015
10	-0,5498
15	-0,5131
20	-0,4551
25	-0,3829
30	-0,3150
35	-0,2496
40	-0,1816
45	-0,1073
50	-0,0212
55	0,0821
60	0,2100
65	0,3721
70	0,5818
75	0,8593
80	1,2375
85	1,7722
90	2,5573
95	3,7424

**Таблица 3.1.**

Возрастные коэффициенты рождаемости в РФ, 1988  
(число родившихся живыми на 1000 женщин данного  
возраста) [5]

Возраст, лет						
15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
49,6	167,9	114,1	61,8	25,6	5,6	0,2

**Таблица 3.2.**

Возрастные коэффициенты рождаемости в РФ, 1999  
(число родившихся живыми на 1000 женщин данного  
возраста) [5]

Возраст, лет						
15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
29,5	93,1	65,2	32,7	11,3	2,2	0,1

**Таблица 3.3.**

Брачная рождаемость в СССР (обследование 1985 г.,  
число детей на 1000 семейных пар)  
по годам рождения жен [1]

	0	1	2	3	4	5	$\geq 6$	Всего
1925–29	111	229	331	163	71	40	55	2267
1930–34	67	221	372	161	66	42	71	2461
1935–39	49	235	425	147	51	33	60	2358

**Таблица 5.1.**

Распределение населения РФ по полу и возрасту  
(в тыс. чел.), 2000 г. [5]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
< 1	624	589	1213
0–4	3289	3121	6410
5–9	4239	4025	8264
10–14	6082	5848	11930
15–19	5970	5800	11770
20–24	5422	5317	10739
25–29	5238	4972	10210
30–34	4804	4690	9494
35–39	5905	5975	11880
40–44	6121	6396	12517
45–49	5397	5885	11282
50–54	3893	4472	8365
55–59	2523	3264	5787
60–64	3621	5094	8715
65–69	2317	3757	6074
70–74	2034	4088	6122
75–79	744	2326	3070
80–84	335	1209	1544
≥ 85	266	1121	1387

**Таблица 10.1.**

Распределение общего объема денежных доходов  
по 20%-группам населения России в 1999 г. (%) [6]

I	II	III	IV	V
6,2	10,6	14,9	21,0	47,3

**Таблица 11.1.**

Коммутационные функции (некоторые значения)<sup>15</sup> [9]

*Мужчины*

$x$	$D_x$	$N_x$	$M_x$
30	21152	324373	5706
35	15942	229505	5013
40	11839	158413	4295
45	8613	106040	3563
50	6135	68189	2888
55	4090	41865	2096
60	2690	24439	1526

*Женщины*

$x$	$D_x$	$N_x$	$M_x$
30	22271	397183	3357
35	17293	296263	3186
40	13373	218015	2991
45	10265	157646	2758
50	7820	111444	2513
55	5831	76497	2188
60	4308	50556	1900

---

<sup>15</sup> Округление до целых.

## Список литературы

- [1] *Староверов О.В.* Азы математической демографии. М.: Наука, 1997.
- [2] *Староверов О.В., Котельникова С.Н.* Моделирование социально-экономических процессов. М.: МГИЭМ, 2001.
- [3] *Капица С.П.* Общая теория роста человечества. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. М.: Наука, 1999.
- [4] Система знаний о народонаселении / Под ред. Д.И.Валентя. М.: Высшая школа, 1991.
- [5] Демографический ежегодник России. М.: Госкомстат, 2000.
- [6] Социальное положение и уровень жизни в России. М.: Госкомстат, 2000.
- [7] *Беляев Ю.К., Чепурин Е.В.* Основы математической статистики. М.: МГУ, 1982.
- [8] *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
- [9] *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики. М.: Дело, 1998.
- [10] *Фалин Г.И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных систем. М.: Анкил, 2002.

- [11] *Брасс У.* Об одном способе выражения закономерностей смертности // Изучение продолжительности жизни / Сб. статей под ред. и с предисл. Е.М.Андреева, А.Г.Волкова. М.: Статистика, 1977. С.39–93.
- [12] United Nations. Manual X. Indirect techniques for demographic estimation. NY: UN, 1983.

ЛЕБЕДЕВ Алексей Викторович  
Сборник задач по математической  
демографии  
Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен А.В.Лебедевым  
с использованием издательской системы  $\text{\LaTeX}$ 2 $\epsilon$   
на механико-математическом факультете МГУ.

Подписано в печать 06.10.2004 г.  
Формат 60×90 1/16. Объем 6 п.л.  
Заказ Тираж 100 экз.

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом  
факультете МГУ, г. Москва, Воробьевы горы  
Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 040746  
от 12.03.1996 г.

---

Отпечатано на типографском оборудовании  
механико-математического факультета  
МГУ им. М. В. Ломоносова  
и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова