

## Основные научные достижения кафедры теории вероятностей за 2002–2012 гг.

Ширяев А.Н.<sup>1</sup>, Лебедев А.В.<sup>2</sup>

Сделан краткий обзор основных научных достижений кафедры теории вероятностей.

За последнее десятилетие сотрудниками кафедры теории вероятностей получены новые интересные и практически значимые результаты в области теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, а также их различных приложений в естественных науках, медицине, информационных технологиях, сферах транспорта и массового обслуживания, экономике, страховании и финансах.

Основные направления научной деятельности академика А.Н.Ширяева были связаны как с развитием общей теории статистических решений на базе стохастического анализа и теории мартингалов, так и с решением многих задач общего характера, непосредственно решаемых в рамках этой теории. В рассматриваемых задачах оптимизации ключевым является поиск оптимального момента принятия решения (например, о продаже акции, коррекции движущегося объекта и т.п.). В теории эти моменты отождествляются с «моментами останова», что объясняет общее название исследований как развитие теории «оптимальных правил останова». Далеко продвинутая теория построена здесь для процессов диффузионного типа, где выяснено, что для решения соответствующей оптимизационной задачи надо уметь решать задачи Стефана (задачи с подвижными неизвестными границами останова) для параболических уравнений, отвечающих диффузионным процессам. Теория с многочисленными примерами изложена в книге [1].

Широкую известность оптимизационные результаты А.Н.Ширяева получили у прикладников, в частности, в задачах о разладке и финансовой математике применяются «процесс Ширяева-Робертса», индекс «Ширяева-Зу». Вместе с учениками – выпускниками кафедры А.А.Муравлевым и М.В.Житлухиным решен ряд задач оптимизационного характера для фрактального броуновского движения и задач о разладке в предположении, что момент разладки равномерно распределен на конечном интервале. Последние результаты дали возможность объяснения «проблемы финансовых пузырей», когда происходит сильное движение цен, а затем их падение, что надо как можно быстрее обнаруживать.

---

<sup>1</sup>Ширяев Альберт Николаевич, albertsh@mi.ras.ru, академик РАН, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

<sup>2</sup>Лебедев Алексей Викторович, avlebed@yandex.ru, доцент, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

---

В 2003 г. под непосредственным руководством А.Н.Ширяева прошла конференция «Колмогоров и современная математика» с участием почти тысячи человек. К этой конференции А.Н.Ширяевым и Н.Г.Химченко были изданы три книги мемориального издания «Колмогоров». А.Н.Ширяев был также организатором ряда других международных конференций («Лидеры и их ученики», «Optimal stopping and stochastic optimization», «Теория вероятностей и ее приложения» и др.). За рассматриваемый период им опубликовано более 50 статей, учебников и монографий.

Ученицей А.Н.Ширяева, ассистентом А.Т.Абакировой доказаны аналоги неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева для безгранично-делимых случайных величин и процессов с независимыми приращениями, найдены неупрощаемые оценки. Получены двусторонние версии неравенств. В случае обобщенных гиперболических процессов получено выражение оценок через параметры. В бесконечномерном случае для процессов с независимыми приращениями установлены неравенства для Ф-энтропий. Доказаны оценки для дисперсии с кратными производными. Получены также версии неравенств для скошенного броуновского движения.

Основными направлениями работы творческого коллектива из профессоров Л.Г.Афанасьевой и Е.В.Булинской, доцента Е.Б.Яровой и ассистента Е.Е.Баштовой, были следующие:

1. Граничные функционалы на траекториях случайных процессов в случайной среде.
2. Асимптотическое поведение и анализ устойчивости многокомпонентных стохастических моделей сложной структуры.
3. Стохастические системы с циклическими управляющими процессами.
4. Предельные теоремы для ветвящихся случайных блужданий.

Понятие циклического потока и системы обслуживания в обновляющейся случайной среде были введены Л.Г.Афанасьевой в работе 1989 г., где доказаны условия стохастической ограниченности одноканальной системы с циклическими управляющими процессами. Более общие результаты для систем в случайной среде и иерархических систем обслуживания получены в ее работе 2005 г. Дальнейшее развитие эти исследования нашли в статье Е.Е.Баштовой о малой загрузке и совместных работах Л.Г.Афанасьевой и Е.Е.Баштовой (2004–2012). В них получены асимптотические разложения для характеристик одноканальной системы обслуживания с дважды стохастическим пуассоновским процессом в качестве входного потока в условиях малой загрузки и предельные теоремы, в том числе теоремы о  $S$ -сходимости в условиях высокой загрузки. Изучено также поведение многоканальных систем с различными дисциплинами обслуживания в условиях высокой загрузки и выявлено влияние этих дисциплин на асимптотическое поведение длины очереди. Введение понятия регенерирующего потока позволило исследовать также и различные системы с ненадежными приборами и применить эти исследования к решению прикладных задач. Например, Л.Г.Афанасьевой и Е.В.Булинской (2008–2012) были изучены транспортные потоки на автомобильных трассах методами теории массового обслуживания. Исследовалось несколько видов транспортных систем, в основе которых лежит модель перекрестка. Изучено влияние таких факторов, как наличие или отсутствие светофора, количество мест между двумя светофорами и необходимость движения за лидером на дороге. Для этого рассмотрены системы обслуживания с бесконечным числом каналов и идентичным временем обслуживания на периоде занятости. Для процесса, определяющего число требований в системе, найдено предельное распределение и условие эргодичности. Также получена функция распределения периода занятости системы. Результаты применяются к анализу процесса образования очередей на неуправляемых перекрестках автомобильных дорог. Для предложенных моделей найдены предельные характери-

ки, изучено функционирование в условиях высокой загрузки. Установлено также, что в условиях высокой загрузки фактор регулируемости перекрестка имеет большое значение. Найдены параметры предельных процессов при наличии и отсутствии регулировки.

Е.В.Булинская продолжила исследование стохастических моделей, возникающих в теории запасов и страховании. Изучена модель многоцелевого водохранилища с альтернирующим процессом восстановления, описывающим приток воды. Установлено существование периодического режима. Доказано, что оптимальная политика имеет пороговый характер. Изучена модель управления запасами с несколькими поставщиками и сезонным спросом. Выработан алгоритм для расчета оптимального поведения. Предложенное Е.В.Булинской (2003) использование стоимостного подхода в страховании позволило найти оптимальные стратегии перестрахования, инвестирования и выплаты дивидендов. Особое внимание было уделено моделям с периодическим принятием решений, поскольку они описывают реальные ситуации более точно, чем модели с непрерывным мониторингом (страховые компании обычно заключают договоры перестрахования в конце года, тогда же определяется размер выплачиваемых дивидендов). Был проведен локальный и глобальный анализ чувствительности моделей к малым возмущениям описывающих их случайных процессов и флуктуациям неслучайных параметров модели. Введенное Е.В.Булинской понятие асимптотически оптимальной эмпирической стратегии позволило распространить исследования на случай неполной информации.

Для объяснения основных эффектов эволюции ансамбля частиц в неоднородных средах Е.Б.Яровая изучила различные модели ветвящихся случайных блужданий (ВСБ). Проведена классификация моментов численностей частиц и вероятностей продолжения процесса для ВСБ в зависимости от интенсивности источника, свойств блуждания и размерности пространства, как для симметричного блуждания, так и для блуждания с нарушением симметрии в источнике. Впервые введена общая модель ВСБ с конечным числом источников различных типов как с нарушением, так и без нарушения симметрии блуждания в источниках. Для таких ветвящихся случайных блужданий выявлены фазовые переходы в надкритическом случае, что существенно отличает их от моделей с одним источником. Обнаружены новые эффекты в ветвящихся случайных блужданиях, связанные с отказом от конечности дисперсии скачков. Получены явные асимптотики переходных вероятностей симметричного случайного блуждания при совместном росте пространственных координат и времени. Установлены предельные теоремы о поведении функции Грина переходных вероятностей для произвольного положительного значения параметра, что позволяет исследовать фронт популяции. Для полного числа частиц в популяции или числа частиц внутри фронта найдены предельные распределения. Замечательный факт состоит в том, что эти предельные распределения совпадают. Для моделей однородного и неоднородного симметричного ветвящегося случайного блуждания в случайной среде получены условия, при которых асимптотическое поведение усредненных по среде моментов совпадает для обеих моделей. Показано, что таким условиям удовлетворяют распределения Гумбеля и Вейбулла. Установлен прогрессивный рост для старших (случайных) моментов поля по сравнению с младшими моментами.

Основное направление исследований профессора А.В.Булинского – предельные теоремы для случайных процессов и полей, их приложение к анализу различных стохастических моделей. Им установлены оптимальные моментные и максимальные неравенства для сумм зависимых мультииндексированных случайных величин, позволившие доказать сильный принцип инвариантности для широкого класса случайных полей. В монографии А.В.Булинского и А.П.Шашкина [2] содержатся недавние результаты авторов, а также впервые отражаются достижения в данной области за последние 30 лет. В 2009 г.

---

за этот труд А.В.Булинский и А.П.Шашкин были удостоены Ломоносовской премии в области науки. В 2011 г. А.В.Булинским найден критерий, показывающий, как следует видоизменить известную гипотезу Ньюмена об асимптотической нормальности случайных полей для того, чтобы эта гипотеза стала верной. Кроме того, за последние три года А.В.Булинским получены глубокие результаты, относящиеся к центральной предельной теореме с самонормировкой, изучению случайных поверхностей, а также разработке новых статистических методов анализа генетических данных. Из учеников А.В.Булинского на кафедре работают доценты М.М.Мусин и А.П.Шашкин, ассистент П.А.Яськов.

Доцентом А.П.Шашкиным был получен ряд важных результатов, относящихся к исследованию асимптотического поведения случайных систем с зависимыми компонентами. Им дан окончательный ответ на гипотезу Ньюмена о достаточных условиях центральной предельной теоремы для ассоциированных стационарных случайных последовательностей. Тем самым показана оптимальность условий классической теоремы Ньюмена. Доказан ряд моментных и максимальных неравенств для ассоциированных случайных полей и их обобщений, что позволило вывести новые варианты принципа инвариантности. С помощью техники идеальных вероятностных метрик установлены новые мощные результаты о приближении ассоциированных случайных векторов наборами независимых случайных величин и доказан сильный принцип инвариантности, обобщающий все известные ранее аналогичные результаты для положительно ассоциированных случайных полей. Подробно исследовано асимптотическое поведение случайных процессов, построенных по мерам множеств уровня гауссовских случайных полей. Для таких процессов впервые доказаны функциональные предельные теоремы в гильбертовом пространстве и пространстве непрерывных функций.

Ассистентом П.А. Яськовым были получены приоритетные результаты в области предельных теорем теории вероятностей, стохастического исчисления и их приложений. А именно, установлены новые варианты усиленных законов больших чисел для квазиортгональных случайных величин. Найлены неулучшаемые необходимые условия в законе больших чисел для мартингалов в схеме серий. Расширена теория стохастического интегрирования процессов с ограниченной вариацией. Построены аппроксимации типа среднего поля для актуальных стохастических моделей эпидемий. Предложен новый подход к выбору наилучшей статистической модели временного ряда в задаче прогноза. Описано асимптотическое поведение плотностей сверток бесконечного числа бернуллиевских величин со полиномиально убывающими абсолютными значениями. Обоснована применимость стандартных методов оценивания в модели обобщенной аддитивной модели регрессии в том случае, когда регрессионные ошибки образуют слабо-зависимое случайное поле.

Профессором А.Ю.Веретенниковым найдены общие условия робастности нелинейного фильтра при ошибках в начальных данных [3]; результат важен в теории фильтрации. Найлены условия разрешимости уравнения Пуассона «во всем пространстве» и его гладкости относительно параметра [4, 5]; результаты важны в теории предельных теорем типа диффузионной аппроксимации. Найлены условия, при которых дискретизованное стохастическое уравнение имеет ту же скорость перемешивания, что и исходное [6]; результат важен в теории аппроксимаций и предельных теорем. Найлены асимптотики больших уклонений в принципе усреднения и условия робастности больших уклонений при дискретизациях стохастических дифференциальных уравнений [7, 8].

Профессором О.П.Виноградовым обнаружена связь между теорией чисел и независимостью событий; получены результаты по теории риска, которые могут найти приложение в актуарной математике; разрабатывались методические вопросы преподавания теории

вероятностей и математической статистики в средней школе. Основные результаты опубликованы в работах [9]–[12].

Профессором А.А.Гузиным в совместных работах с У.Кюхлером развита теория аффинных стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и их статистики: для моделей наблюдений за стационарным решением исследовано асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия и байесовских оценок (как в случае регулярной зависимости от параметра, так и в нерегулярных случаях). В совместных работах с Э.Валкейла получила развитие теория предельных теорем для процессов отношения правдоподобия с акцентом на необходимость используемых условий. Предложен двойственный подход к определению  $f$ -дивергенции вероятностных мер, позволивший распространить это понятие на случай конечного числа конечно аддитивных функций множества и линейных функционалов на некоторых других функциональных пространствах, что, в свою очередь, позволило существенно ослабить условия в классических теоремах о достижении минимума  $f$ -дивергенций на семействах вероятностных мер. Развита двойственная теория в стохастических задачах максимизации робастной полезности в финансовой математике; в частности, при минимальных предположениях доказана минимаксная теорема. Основные результаты опубликованы в работах [13]–[17].

Профессор А.Г.Дьячков опубликовал монографию [18], где были изложены результаты и приложения, полученные за предыдущие годы, в теоретико-вероятностных и комбинаторных задачах планирования отсеивающих экспериментов и группового тестирования, а в обзоре [19] были представлены достижения в данной области за последнее время. Основные теоретико-вероятностные и комбинаторные результаты А.Г.Дьяčkова и его учеников (Виленкин П.А., Исмагилов И.К., Сарбаев Р.С., Воронина А.Н.), полученные в теории кодирования ДНК-последовательностей и ее приложениях, опубликованы в статье [20], написанной в соавторстве с американскими биологами, и статье [21].

Профессор В.Д.Конаков создал и развивал метод доказательства локальных предельных теорем о сходимости последовательности марковских цепей к диффузионному процессу. Метод представляет собой, по существу, дискретный аналог хорошо известного в теории уравнений с частными производными метода параметрикса. Дана оценка скорости сходимости, получены разложения типа Эджворта, которые переходят в разложения Эджворта в классическом случае суммирования независимых случайных векторов. В качестве приложений исследуются различные дискретные схемы, аппроксимирующие решения СДУ, а именно: схема Эйлера, схема Мильштейна, схемы, соответствующие стохастическим разложениям Тейлора высших порядков. Основные результаты опубликованы в статьях [22]–[26].

Работы профессора В.И.Осеledца (в соавторстве с З.И.Бежаевой) относятся к эргодической теории скрытых марковских цепей и их приложениям. Было получено новое удобное представление для скрытых марковских цепей, которое было применено к задаче Эрдеша о свойствах мер Эрдеша и привело к эффективному алгоритму вычисления хаусдорфовой размерности меры Эрдеша для ряда чисел Пизо и произвольного значения параметра Бернулли. Последовательно была решена задача вычисления хаусдорфовой размерности меры Эрдеша для золотого сечения, псевдозолотого сечения третьего порядка и псевдозолотого сечения любого порядка. Для коэффициентов степенного ряда, образующих марковскую цепь второго порядка, и золотого сечения были найдены все случаи абсолютной непрерывности меры Эрдеша. Для некоторых других чисел Пизо была вычислена хаусдорфова размерность носителя меры Эрдеша. Все эти результаты были получены с помощью вычисления метрической и топологической энтропии софических мер (скрытых марковских цепей), открытых в работах В.И.Осеledца и З.И.Бежаевой при ре-

---

шении задачи Эрдеша. Для скрытых марковских цепей типа Блекуэлла была вычислена их энтропия и инвариантная мера Блекуэлла.

В статье профессоров В.А.Мальшева и С.А.Пирогова [27] изучены свойства обратимости, необратимости и квазиобратимости (унитарности) случайных блужданий химической кинетики. Рассмотрена также роль этих свойств в понимании некоторых биологических процессов.

Профессором В.В.Сенатовым рассматривалась новая постановка задачи о скорости сходимости в законе больших чисел, в которой функции распределения средних арифметических независимых случайных величин и вырожденная предельная функция распределения сравнивались в средней метрике и в метрике Леви. Оказалось, что скорости сходимости в этих метриках при усилении условий на моменты случайных величин вначале возрастают, а затем становятся постоянными. Доказана неулучшаемость полученных результатов. Предложены квазинеравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме (ЦПТ), которые оказались значительно точнее как равномерных, так и неравномерных оценок. Выделено несколько классов распределений, для которых точность аппроксимации в ЦПТ существенно выше, чем в общем случае. Это – класс решетчатых и два класса непрерывных распределений. Введены и исследованы многомерные аналоги многочленов Чебышева–Эрмита, с их помощью построены асимптотические разложения в ЦПТ в многомерных пространствах, получены явные оценки точности аппроксимации, которую гарантируют эти разложения. Предложена новая форма асимптотических разложений в ЦПТ, из которой получаются все известные формы разложений и для которой оценки точности аппроксимации точнее, чем для других форм. Построены асимптотические разложения в ЦПТ с неулучшаемыми оценками остаточных частей. Эти разложения аппроксимируют распределения нормированных сумм независимых случайных величин на несколько порядков точнее, чем известные аппроксимации. Они позволяют при достаточно широких условиях для данного распределения и заданного числа исходных случайных величин указывать явный вид разложения, обеспечивающего нужную точность аппроксимации. По результатам опубликована монография [28] и ряд статей.

Профессором В.Н.Тутубалиным проведено сопоставление с реальными данными ряда моделей и результатов стохастической финансовой математики в отношении:

- а) оценки величины риска финансовых активов и соответствующих расчетов банковских резервов согласно рекомендациям Базельского комитета по банковскому надзору;
- б) хеджирования опционов с помощью самофинансируемых портфелей, в частности, экспериментально поддержано предложение Вовка и Шейфера о введении актива, уплачивающего некоторые специальным образом определяемые дивиденды.

Профессорами В.Н.Тутубалиным и Д.Д.Соколовым с учениками предложен и реализован численно на суперкомпьютере «Чебышев» алгоритм вычисления инвариантной меры для произведения случайных независимых унимодулярных матриц [29]. Эта инвариантная мера играет важную роль в теории произведения случайных матриц Ферстенберга, которая, в свою очередь, широко используется во многих областях математической физики и, прежде всего, в теории случайных сред.

Творческий коллектив из профессора Ю.Н.Тюрина, доцентов М.В.Болдина и Г.И.Симоновой, с учениками, получил важные результаты в области математической статистики и ее приложений.

Профессором Ю.Н.Тюриным разработана теория и создан метод для проверки статистических гипотез о неравенствах [30]. При общем подходе это гипотезы о принадлежности к конусам в многомерных пространствах. Для многомерных наблюдений создана геометрическая теория общих линейных моделей [31, 32], что потребовало разработки но-

вых алгебраических конструкций взамен линейной алгебры, на которой изложена классическая теория для одномерных наблюдений. Это модули матриц, снабженные матрично-значным скалярным умножением.

На этой основе ученица Ю.Н.Тюрина, ассистент Е.М.Ряднова (бывш. Суханова) ввела понятие матричных коэффициентов корреляции для многомерных случайных величин [33]. В [32] с помощью понятия матричной корреляции и упомянутой выше геометрической теории линейных моделей была изложена корреляционная теория.

Доцентом М.В.Болдиным было продолжено исследование статистических методов анализа семипараметрических моделей временных рядов (линейных и нелинейных) с помощью остаточных эмпирических процессов и полей. Для ARMA модели произвольного порядка построены и исследованы непараметрические локально оптимальные знаковые тесты для линейных гипотез [34]. Тем самым, методы, развитые ранее в монографии [35], перенесены на наиболее распространенную в приложениях линейную модель. Начато и продолжается систематическое исследование устойчивости знаковых тестов в авторегрессионных схемах против грубых выбросов. А именно, установлена локальная качественная робастность знакового теста в авторегрессии первого порядка [36]. Результаты распространены на авторегрессию произвольного порядка и на проверку гипотез о порядке авторегрессии знаковым способом [37]. Получены и опубликованы некоторые результаты о робастности обобщенных M-тестов в авторегрессионных схемах. Результаты о робастности в том или ином смысле статистических тестов во временных рядах — содержательная и перспективная тема исследований. Эти исследования будут продолжены. Для ARMA и ARCH моделей общего вида были исследованы остаточные последовательные процессы и поля, точнее, установлены их равномерные асимптотические разложения. Это позволило построить несколько новых тестов для задач типа change-point. Примеры подобных исследований можно найти в работе [38]. Существенно, что удалось построить тестовые статистики, асимптотически свободные при гипотезе от параметров моделей. Некоторые любопытные и содержательные исследования были проведены аспирантами М.В.Болдина. Выделим, в частности, серию работ А.А. Сорокина об оценках и тестах минимального расстояния в ARCH моделях, опубликованных в Math. Methods Statist. и УМН.

Ученик М.В.Болдина, ассистент И.Г.Эрлих получил новые результаты в области статистического анализа временных рядов. А именно, предложены новые непараметрические оценки типа минимального расстояния для параметров общей ARMA( $p, q$ ) модели, доказана их асимптотическая гауссовость и устойчивость к грубым выбросам. Выяснены условия, при которых такие оценки асимптотически эквивалентны оценкам максимального правдоподобия. Показано, что в случае, когда инновации имеют распределение с тяжелыми хвостами, предложенные оценки оказываются эффективнее общепринятых оценок наименьших квадратов. Предложены тесты для проверки адекватности наблюдений общей ARMA( $p, q$ ) модели. Посчитана асимптотическая относительная эффективность теста при близких альтернативах.

Доцент Г.И.Симонова занималась созданием численных алгоритмов и программ знаковых и ранговых методов в линейных моделях независимых наблюдений и в авторегрессионных моделях временных рядов. Методом математического моделирования ею проводилось исследование мощностей двухвыборочных критериев Колмогорова-Смирнова и Андерсона-Дарлинга в случае засорения одной из выборок. Проводилось также изучение стохастических процессов и явлений, протекающих в компьютерных сетях (прикладные статистические задачи по исследованию поведения скорости передачи данных в сетевых каналах, изучение изменения загрузки магистральных каналов, робастное оценивание

---

статистических моделей трафиков магистральных каналов).

Профессор Г.И.Фалин изучал стохастические модели систем передачи информации со сложными протоколами (системы с повторными вызовами, системы в случайной среде, с ненадежными каналами, последовательные сети). Для марковских процессов, описывающих их функционирование, получены необходимые и достаточные условия эргодичности и найдены стационарные распределения, вычислены разнообразные характеристики эффективности функционирования систем. Кроме того, изучались оптимизационные задачи для неоднородных страховых портфелей. Результаты опубликованы в работах [39]–[47].

Доцентом С.В.Жуленевым в работах [48]–[50] предложен новый, нетрадиционный подход к большим уклонениям. Большими уклонениями называют, скажем, представления для «правого (или левого) хвоста» распределения некоторой одномерной случайной величины. В обычном подходе при записи такого представления используется так называемая функция уклонений, а в предложенном в этих работах подходе хотя при их записи и не удается уйти от функции уклонений полностью (неявно она присутствует), но оказывается возможным уйти от использования семиинвариантов, ряда Крамера и др.

Доцент А.В.Лебедев основное внимание уделял развитию теории максимальных ветвящихся процессов [51]. Данные процессы были введены Дж.Ламперти в 1970-е годы, а затем незаслуженно забыты. Различие с обычными ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона состоит в замене суммирования численностей потомков частиц в поколении на максимум. Можно сказать, что в максимальном ветвящемся процессе выживает потомство только наиболее плодovitой частицы (или одной из таких). Было произведено обобщение максимальных ветвящихся процессов по области значений с целых чисел на любые неотрицательные. Доказаны эргодические теоремы и предельные теоремы для стационарных распределений. Подобные процессы возникают, в частности, при описании вентиляных бесконечнолинейных систем массового обслуживания (например, при многопроцессорной или распределенной компьютерной обработке данных), изучение которых проводилось рядом исследователей в 1990-2000-е годы другими методами. В последние годы были введены и рассмотрены максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц, для которых также доказаны некоторые эргодические и предельные теоремы [52]. Кроме того, были получены другие интересные результаты в области стохастической теории экстремумов: о максимумах сумм случайных величин (в том числе, на случайных графах), максимумах случайных признаков частиц в ветвящихся процессах (в том числе, с учетом наследственности), экстремумах полей дробового шума, статистике MARMA-процессов, одной модели топа новостей и др.

Ассистент А.А.Голдаева под руководством А.В.Лебедева занималась изучением линейных стохастических рекуррентных последовательностей и их характеристик: хвостового и экстремального индексов. Предложен новый подход, связанный с рассмотрением стохастических разностных последовательностей как последовательностей наблюдений (в детерминированные или случайные моменты времени) процесса с непрерывным временем, заданного стохастическим дифференциальным уравнением. С использованием этого подхода в некоторых случаях найден явный вид хвостового индекса, а также верхняя и нижняя границы экстремального индекса. Исследованы случаи, когда экстремальный индекс считается в явном виде и доказаны предельные теоремы для получения приближенных значений экстремального индекса. Начаты исследования хвостового и экстремального индексов в многомерном случае.

Доцентом А.Д.Манитой предложен ряд новых многомерных вероятностных моделей многокомпонентных систем с синхронизацией [53]–[60]. Получены результаты об асимптотических свойствах таких моделей при больших временах и растущих размерностях, в том



числе, для некоторых систем, доказано существование фазовых переходов. Решены многие новые задачи [61]–[64], относящиеся к многомерным и бесконечномерным марковским процессам и к смежным областям. Проведенные исследования могут послужить основой при построении математических моделей для многих современных приложений в информатике, коммуникациях, физике, биологии, а также при моделировании многоагентных систем в экономике. А.Д.Манита активно сотрудничает с Лабораторией больших случайных систем (см. их обзор).

Основные научные результаты старшего преподавателя А.В.Селиванова — структура множества мартингалльных мер и фильтрация волатильности в моделях, основанных на процессах Леви; расчет когерентных мер риска в ряде моделей; результаты о предельном поведении некоторых дискретных когерентных мер риска (совместно с Р. Кайнхофером, Технический Университет Вены); результаты об оптимальном хеджировании рисков количества в некоторых моделях (совместно с А.В. Куликовым, МФТИ).

В последние 5 лет на кафедре активно развивается направление, связанное с исследованиями в области вероятностной комбинаторики и теории случайных графов (доцент М.М.Мусин, ассистент Д.А.Шабанов, м.н.с. М.Е.Жуковский). Хорошо известно, что многие классические задачи экстремальной комбинаторики (например, задачи рамсеевского и турановского типа) являются весьма простыми по постановке, но, на сегодняшний день, практически не поддающимися хоть сколько-нибудь удовлетворительному решению. Одной из таких знаменитых задач является проблема нахождения функции Ван дер Вардена. Сама теорема Ван дер Вардена, что для любых натуральных чисел  $n$  и  $r$  найдется такое число  $N$ , что в любой раскраске начального отрезка натурального ряда от 1 до  $N$  в  $r$  цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины  $n$ . Функцией же Ван дер Вардена  $W(n, r)$  называется минимальная граница в теореме Ван дер Вардена, после которой выполняется вышеуказанное свойство. Замечательным результатом, полученным Д.А.Шабановым, является доказанная с помощью вероятностного метода случайной перекраски новая нижняя оценка функции Ван дер Вардена. Данная оценка улучшает предыдущий наилучший результат, полученный более 20 лет назад. Стоит особо отметить, что вероятностный метод, использованный Д.А.Шабанов при доказательстве оценки функции Ван дер Вардена, позволил также получить ему ряд интересных результатов в других классических задачах экстремальной комбинаторики, связанных с раскрасками гиперграфов (такими, как проблемы Эрдеша–Хайнала и Эрдеша–Ловаса). Исследования в области теории случайных графов представлены на кафедре в работах М.М.Мусина и М.Е.Жуковского. Теория случайных графов — очень активно развивающаяся область вероятностной комбинаторики. На сегодняшний день предложено огромное количество различных моделей случайных графов для изучения самых разных реальных сетей, а особенный интерес в последние 10 лет к данной области связан с изучением моделей Интернета. Одна из таких наиболее популярных моделей была предложена Б.Боллобашем и О.Риорданом в начале 2000-х. Хорошо известно, что отличительной особенностью графа Интернета является его малый диаметр. Самими Боллобашем и Риорданом был установлен закон больших чисел для диаметра случайного графа в их модели, однако ими были получены достаточно слабые оценки скорости сходимости в данном законе. Этот вопрос был решен М.М.Мусиным, которому удалось получить гораздо более сильную оценку скорости сходимости диаметра в случайном графе Боллобаша–Риордана, эффективную с точки зрения применения на практике. Наконец, еще одно направление теории случайных графов, изучаемое на кафедре, связано с законами нуля или единицы в классической модели Эрдеша–Реньи. М.Е.Жуковскому удалось решить стоявший более 20 лет вопрос о точном значении границы вероятности появления ребра в случайном графе, до которой

---

случайный граф Эрдеша–Реньи обладает любым свойством первого порядка с фиксированной кванторной глубиной  $k$  с асимптотической вероятностью 0 или 1.

Более подробно с жизнью кафедры теории вероятностей можно ознакомиться на ее сайте <http://www.math.msu.su/departament/probab/>, а с публикациями и другой деятельностью сотрудников — в системе ИСТИНА (Наука-МГУ) <http://istina.imec.msu.ru/organizations/departament/275918/workers/>.

## Список литературы

- [1] *Peskir G., Shiryaev A.* Optimal stopping and free-boundary problems / Lectures in Mathematics. ETH Zürich (closed). Birkhäuser Basel, 2006. 500 p.
- [2] *Бултинский А.В., Шапкин А.П.*, Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008; 477 с.
- [3] *Veretennikov A.Yu, Kleptsyna M.L.*, On discrete time filters with wrong initial data // Probability Theory and Related Fields, 2008, v. 141, p. 411–444.
- [4] *Веретенников А.Ю.*, О соболевских решениях уравнения Пуассона в  $R^d$  с параметром (К 70-летию профессора Н.В.Крылова) // Проблемы математического анализа, 2011, v. 61, p. 43–68.
- [5] *Pardoux E., Veretennikov A. Yu.*, On Poisson equation and diffusion approximation 2 // Annals of Probability, 2003, v. 31, №3, p. 1166–1192.
- [6] *Веретенников А.Ю., Клоков С.А.*, Об условиях локального перемешивания для аппроксимаций стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения, 2012, т. 57, №1, с. 35–61.
- [7] *Veretennikov A.Yu.*, On large deviations in the averaging principle for SDE’s with a “full dependence”, revisited // Discrete and Continuous Dynamical Systems ser. B, 2013, v. 18, №2, p. 523–549.
- [8] *Veretennikov A.Yu.*, On large deviations for approximations of SDEs // Probability Theory and Related Fields, 2003, v. 125, №1, p. 135–152.
- [9] *Виноградов О.П.*, Задача о баллотировке для случайных потоков и ее связь с задачами теории риска // Вестник Московского Университета, сер.15, Вычислительная математика и Кибернетика, 2010, №3, с.37–43
- [10] *Виноградов О.П.*, Простые числа и независимость // Современные проблемы математики и механики, 2011, т. 7, №1, с. 16–21. <http://mech.math.msu.su/probab/cheb190.pdf>
- [11] *Виноградов О.П.*, Что такое закон больших чисел? / Математика в Колмогоровской школе. М.: СУНЦ МГУ, 2009, с.35–46
- [12] *Виноградов О.П.*, О равномерной независимости дискретных распределений // Дискретная математика (в печати)
- [13] *Gushchin A. A., Kuchler U.*, On parametric statistical models for stationary solutions of affine stochastic delay differential equations // Math. Methods Statist, 2003, v. 12, №1, p. 31–61.

- [14] *Gushchin A. A., Valkeila E.*, Approximations and limit theorems for likelihood ratio processes in the binary case // *Statistics and Decisions*, 2003, v. 21, №3, p. 219–260.
- [15] *Гущин А. А.*, О расширении понятия  $f$ -дивергенции // *Теория вероятностей и ее применения*, 2007, т. 52, №3, с. 468–489.
- [16] *Гущин А. А.*, Двойственная характеристика цены в задаче максимизации робастной полезности // *Теория вероятностей и ее применения*, 2010, т. 55, №4, с. 680–704.
- [17] *Gushchin A. A., Kuchler U.*, On estimation of delay location // *Stat. Inference Stoch. Process*, 2011, v. 14, №3, p. 273–305.
- [18] *D'yachkov A.G.*, Lectures on designing screening experiments / *Lecture Note Series 10*, Feb. 2003, Combinatorial and Computational Mathematics Center, Pohang University of Science and Technology (POSTECH), Korea Republic, (monograph, pp. 112).
- [19] *D'yachkov A.G, Rykov V.V., Deppe C., Lebedev V.S.*, Superimposed Codes and Threshold Group Testing / *Lecture Notes in Computer Science*, 2013, Volume in Memory of R.Ahlsvede.
- [20] *Дьячков А.Г., Виленкин П.А., Исмагилов И.К., Сарбаев Р.С., Макула А., Торни Д., Уайт С.*, О ДНК-кодах // *Проблемы передачи информации*, 2005, т. 41, №4, с. 57–77.
- [21] *Дьячков А.Г., Воронина А.Н.* ДНК-коды для аддитивного стебельного сходства // *Проблемы передачи информации*, 2009, т. 45, №2, с. 56–77.
- [22] *Konakov V., Mammen E.*, Edgeworth type expansions for transition densities of Markov chains converging to diffusions // *Bernoulli*, 2005, v.11, №4, p. 591–641.
- [23] *Konakov V., Mammen E.*, Small time Edgeworth-type expansions for weakly convergent nonhomogeneous Markov chains // *Probability Theory and Related Fields*, 2009, v. 143, №1, p. 137–176.
- [24] *Konakov V., Menozzi S., Molchanov S.*, Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes // *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 2010, v. 46, №4, p. 908–923.
- [25] *Konakov V., Menozzi S.*, Weak error for stable driven SDES: expansion of the densities // *Journal of Theoretical Probability*, 2011, v. 24, №2, p. 454–478.
- [26] *Konakov V., Menozzi S., Molchanov S.*, The diffusion processes on the solvable groups of  $2 \times 2$  upper triangular matrices and their approximations // *Dokl. Math.*, 2011, v. 439, №5, p. 585–588.
- [27] *Мальшев В.А., Пирогов С.А.*, Обратимость и необратимость в стохастической химической кинетике // *Успехи матем. наук*, 2008, т. 63, №1, с. 3–36.
- [28] *Сенатов В.В.*, Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009.
- [29] *Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.*, Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // *Вычислительные методы и программирование*, 2012, т. 13, с. 218–225.

- 
- [30] *Тюрин Ю.Н.*, Проверка конических гипотез / Математика. Механика. Информатика: тр. конф. посвящ. 10-летию РФФИ. М.: Физматлит, 2005, с. 289–307.
- [31] *Тюрин Ю.Н.*, Многомерный статистический анализ: геометрическая теория // Теория вероятностей и её применения, 2010, т. 55, №1, с. 36–58.
- [32] *Тюрин Ю.Н.*, Многомерная статистика: гауссовские линейные модели. М.: МГУ, 2011, 136 с.
- [33] *Суханова Е.М.*, Матричная корреляция // Теория вероятностей и её применения, 2009, т. 54, №4, с. 383–391.
- [34] *Болдин М.В., Штутте В.*, О знаковых тестах в ARMA модели с возможно бесконечной дисперсией ошибок // Теория вероятностей и ее применения, 2004, т. 40, №3, с. 436–460.
- [35] *Boldin M.V., Simonova G.I., Tyurin Yu.N.*, Sign-based Methods in Linear Statistical Models. Providence, IMS, 1997.
- [36] *Boldin M.V.*, Local robustness of sogn tests in AR(1) against outliers // Math. Methods Statist., 2011, v. 20, №1, p. 1–13.
- [37] *Болдин М.В.*, Робастность знаковых тестов для гипотез о порядке авторегрессии // Теория вероятностей и ее применения, 2012, т. 57, №4, с. 761–768.
- [38] *Boldin M.V.*, On sequential residual empirical processes in heteroscedastic time series // Math. Methods Statist., 2002, v. 11, №4, p. 453–464.
- [39] *Falin G.*, Stability of the multiserver queue with addressed retrials // Annals of Operations Research, 2012, v.196, №1, p. 241–246.
- [40] *Falin G.*, On a tandem queue with retrials and losses // Operational Research, 2012, DOI 10.1007/s12351-012-0126-x
- [41] *Falin G.*, An  $M|G|1$  retrial queue with unreliable server and general repair times // Performance Evaluation, 2010, v.67, №7, p. 569–582.
- [42] *Falin G.*, A single-server batch arrival queue with returning customers // European Journal of Operational Research, 2010, v. 201, p. 786–790.
- [43] *Falin G.*, The  $M|M|\infty$  queue in a random environment // Queueing Systems, 2008, v. 58, №1, p. 65–76.
- [44] *Falin G.*, The  $M|M|1$  retrial queue with retrials due to server failures // Queueing Systems, 2008, v. 58, №3, p. 155–160.
- [45] *Falin G.*, On the optimal pricing of a heterogeneous portfolio // ASTIN Bulletin, 2008, v. 38, №1, p. 161–170.
- [46] *Artalejo J., Falin G.*, Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis // Revista Matematica Complutense, 2002, v. 15, p. 101–129.

- [47] *Artalejo J.R., Falin G.I., Lopez-Herrero M.J.*, A second order analysis of the waiting time in the  $M|G|1$  retrial queue // *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2002, v. 19, p. 131–148.
- [48] *Жуленев С.В.*, О больших отклонениях, I // *Теория вероятностей и ее применения*, 1999, т. 44, №1, с. 34–54.
- [49] *Жуленев С.В.*, О больших отклонениях, II // *Теория вероятностей и ее применения*, 2004, т. 49, №4, с. 672–694.
- [50] *Жуленев С.В.*, Большие отклонения. Простейшая ситуация // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, 2005, №1, с. 16–25.
- [51] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы // *Современные проблемы математики и механики*, 2009, т. 4, №1, с. 93–106. <http://mech.math.msu.su/probab/svodny2.pdf>
- [52] *Лебедев А.В.*, Максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, 2012, №3, с. 8–13.
- [53] *Manita A., Shcherbakov V.*, Asymptotic analysis of a particle system with mean-field interaction // *Markov Processes Relat. Fields*, 2005, v. 11, №3, p. 489–518.
- [54] *Мальшиев В.А., Манита А.Д.*, Фазовые переходы в модели синхронизации времени // *Теория вероятностей и ее применения*, 2005, т. 50, №1, с. 150–158.
- [55] *Manita A., Simonot F.*, Clustering in stochastic asynchronous algorithms for distributed simulations / *Lecture Notes in Computer Science*, 2005, v. 3777, Nov 2005, p. 26–37.
- [56] *Манита А.Д.*, Марковские процессы в непрерывной модели стохастической синхронизации // *Успехи математических наук*, 2006, т. 61, №5, с. 187–188.
- [57] *Мальшикин А.Г.*, Предельная динамика для вероятностных моделей обмена информацией в сетях параллельных вычислений // *Проблемы передачи информации*, 2006, т. 42, №3, с. 78–96.
- [58] *Манита А.Д.*, Коллективное поведение в многомерных вероятностных моделях синхронизации // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2007, т. 14, №6, с. 1001–1021.
- [59] *Манита А.Д.*, Стохастическая синхронизация в большой системе однотипных частиц // *Теория вероятностей и ее применения*, 2008, т. 53, №1, с. 162–168.
- [60] *Manita A.*, Brownian particles interacting via synchronizations // *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2011, v. 40, №19-20, p. 3440–3451.
- [61] *Замятин А.А., Мальшиев В.А., Манита А.Д.*, Явление гомеостаза в сетях химических реакций // *Теория вероятностей и ее применения*, 2006, т. 51, №4, с. 793–801.
- [62] *Мальшиев В.А., Манита А.Д.*, Стохастическая микромодель течения Куэтта // *Теория вероятностей и ее применения*, 2008, т. 53, №4, с. 798–809.
- [63] *Malyshev V.A., Manita A.D.*, Dynamics of phase boundary with particle annihilation // *Markov Processes Related Fields*, 2009, v. 15, №4, p. 575–584.

- 
- [64] *Malyshev V., Manita A., Zamyatin A.*, Multi-agent model of the price flow dynamics / Proceedings of the conference «Traffic and Granular Flow 11» (TGF 11), 28 September - 01 October, 2011, Moscow, Russia. Springer 2012. 10 pages