Типовые задачи к зачету по теории вероятностей, весна 2009 (составил доц. А.П.Шашкин)

1. Случайные величины X и Y независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность случайной величины X/Y.

2. Случайная величина X имеет плотность $p(x) = 2xI(0 < x < \sqrt{2})$. Найти плотность и математическое ожидание величины $X^{-1/2}$.

3. Случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найти $\mathsf{P}(3X + Y < 3)$.

4. Случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найти $\mathsf{E}(X + Y)^{-1}$.

5. Случайным образом выбирается подстановка чисел $\{1, \ldots, n\}$. Найти дисперсию числа циклов длины 2.

6. Случайная величины ξ принимает значения $-1, 0, 1$ с вероятностями $1/4, 1/2, 1/4$ соответственно. Найти $cov(2\xi + 3\xi^2, 3\xi - \xi^2)$.

7. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей геометрическое распределение.

8. Случайные величины X и Y независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность евклидовой нормы вектора (X, Y).

9. Случайные величины X и Y независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти матрицу ковариаций случайного вектора (X^2, XY, Y^2).

10. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти матрицу ковариаций случайного вектора $(\min(X, Y), \max(X, Y))$.

11. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность $p(x, y) = C(x^2 + y^2)^{-1/2} I(x^2 + y^2 < 1)$. Найти константу C и плотность его евклидовой нормы.

12. Найти плотность суммы независимых случайных величин, одна из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а другая показательное распределение с параметром $\lambda > 0$.

13. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти матрицу ковариаций случайного вектора $(X, X^2, sgn(X))$.

14. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найти плотность и математическое ожидание дробной части X.

15. Случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение на параллелограмме $\{0 < y < 1, |x - y| < 1\}$. Найти его матрицу ковариаций.

16. Случайные величины X, Y и Z независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти $\mathsf{P}(2X + Y + Z < 1/4)$.

17. Случайная величина X имеет плотность $p(x) = 2xI(0 < x < \sqrt{2})$. Найти плотность величины $|X-1|$.

18. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность $p(x, y) = Ce^{-y}I(0 < x < y)$. Найти константу C и $\mathsf{E}XY$.

19. Случайные величины $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ независимы и принимают значения ± 1 с вероятностями $1/2$ для тех n, которые не являются полными квадратами. Если же $n = k^2$ полный квадрат, то ξ_n принимает значения $\pm k$ с вероятностями $1/2$. Доказать, что $S_n/n \to 0$ по вероятности, когда $n \to \infty$.

20. Известно, что половина авиапассажиров летает без багажа, а у всех остальных вес багажа (в кг) равномерно распределен на отрезке $[5, 15]$. В самолет садится 200 пассажиров. Приближенно найти вероятность того, что в нем более 1,1 тонны багажа (ответ выразить через функцию $\Phi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$).

21. Случайные величины ξ_n стремятся (при $n \to \infty$) по вероятности к случайной величине ξ, не равной нулю. Известно, что $a_n \xi_n \to 0$ по вероятности ($a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$). Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

22. Случайная величина ξ принимает значения $0, 1, 2, 3, 4$ с вероятностями 1/8, 1/8, 1/4, 1/4, 1/4 соответственно. Можно ли представить ее в виде суммы независимых целочисленных величин η и ζ, если ζ принимает значения $0, 1, 2$ с вероятностями 1/4, 1/4, 1/2 соответственно?

23. Случайные величины ξ_n имеют распределение Пуассона с параметром n ($n \in \mathbb{N}$). Доказать, что $(\xi_n - n)/\sqrt{n} \to N(0, 1)$ по распределению, когда $n \to \infty$.

24. Найти характеристическую функцию случайной величины с плотностью $p(x) = xe^{-x}I(x > 0)$.

25. Случайная величина X такова, что $\mathsf{P}(X = 0) > 1/2$. Доказать, что характеристическая функция X нигде не равна нулю.

26. Найти характеристическую функцию случайной величины с плотностью $p(x) = x^2 e^{-|x|}/4$.

27. Найти характеристическую функцию числа успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью одного успеха, равной p.

28. В отчете имеется 10000 чисел. При сложении их округлили до 4-й цифры после запятой. Ошибка округления равномерно распределена на отрезке $[-0,5 \cdot 10^{-4}; 0,5 \cdot 10^{-4}]$. Приближенно найти значение, которое абсолютная величина ошибки превысит с вероятностью $0,05$ (ответ выразить через функцию $\Phi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$).

29. Игральный кубик бросается до тех пор, пока сумма набранных очков не превысит 700. Приближенно найти вероятность того, что для этого потребуется от 190 до 200 подбрасываний (ответ выразить через функцию $\Phi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$).

30. Найти плотность случайной величины, имеющей характеристическую функцию $\varphi(t) = (1 - \cos 2t)/2t^2$.

31. Найти плотность случайной величины с характеристической функцией $\varphi(t) = e^{-|t|}\cos t$.

32. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и имеют одну и ту же характеристическую функцию $\varphi(t) = (1 - |t|^\alpha)I(|t| < 1)$, здесь $\alpha \in (0, 1]$. Найти такую положительную последовательность b_n, что существует невырожденный предел по распределению последовательности $(X_1 + \ldots + X_n)/b_n$ (при $n \to \infty$).

33. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность $p(x, y) = Ce^{-y}I(0 < x < y)$. Найти константу C и характеристическую функцию этого вектора.

34. Найти характеристическую функцию случайного вектора, принимающего значения $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ с равными вероятностями.

35. Антивирус обнаруживает вирусы с вероятностью $0,95$. Каждая десятая карта памяти заражена вирусами. При включении данной карты памяти антивирус не показал наличия вирусов, найти вероятность, что они на самом деле есть.

36. Каждое ребро куба представляет собой резистор, пропускающий ток с вероятностью p (все они независимы). Найти вероятность, что ток может пройти с одной вершины куба на противоположную.