Теория вероятностей (весенний семестр 2012/2013 учебного года)
лектор – профессор Е.В.Булинская

1. Краткая история теории вероятностей. По этому поводу рекомендовано прочитать очерки в учебниках [1], [2].

2. Роль теории вероятностей и математической статистики в исследовании реальных систем и процессов.

3. Статистическая интерпретация вероятности. Аксиоматика Колмогорова. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – математическая модель случайного эксперимента.

4. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

5. Алгебры и сигма-алгебры событий. Правила действия с событиями, диаграммы Венна. (Соотношения де Моргана без док-ва). Существование наименьшей сигма-алгебры, содержащей алгебру. Геометрическое определение вероятности.

6. Измеримые пространства. Мера, вероятность. Эквивалентность счетной аддитивности конечной аддитивности и непрерывности в нуле.

7. Свойства вероятности (монотонность, субаддитивность, вероятность объединения двух событий).

8. Условные вероятности. Формула умножения (для совместного наступления нескольких событий).

9. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Априорные и апостериорные вероятности. Примеры.

10. Независимость событий и систем событий (попарная независимость и взаимная независимость, примеры).

11. Дискретные вероятностные пространства. Случайные величины и действия над ними. Распределение случайной величины.

12. Независимые случайные величины. Математическое ожидание и его свойства, дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции.

13. Законы распределения дискретных случайных величин (равномерный, гипергеометрический, биномиальный, пуассоновский, геометрический, отрицательный биномиальный).

14. Неравенства Чебышева и Маркова. Закон больших чисел.

15. Производящие функции и их свойства. Теорема Пуассона.

16. Закон больших чисел в форме Бернулли и вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса.

17. Борелевская сигма-алгебра. Меры на прямой. Функция распределения меры, ее свойства.

18. Построение меры по функции распределения. Теорема Каратеодори (без док-ва).

19. Плотность (кусочно непрерывные функции). Основные абсолютно непрерывные законы распределения (равномерный, нормальный, экспоненциальный, Коши, гамма и др).

20. Мера в пространстве R^n. Многомерные функции распределения.

21. Произведения пространств. Случайные элементы со значениями в сепарабельных метрических пространствах. Подпространства.

22. Простые случайные величины. Расширенные случайные величины, приближение последовательностью простых. Замкнутость класса расширенных случайных величин относительно поточечной сходимости.

23. Математическое ожидание – интеграл Лебега. Определение и его корректность.

24. Свойства математического ожидания.

25. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема о мажорируемой сходимости).

26. Неравенства Коши-Буняковского-Шварца, Иенсена и Ляпунова.

27. Независимость случайных величин и их систем. Необходимое и достаточное условие независимости компонент случайного вектора в терминах функций распределения.

28. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.

29. Математическое ожидание борелевских функций от случайных величин. Замена переменных в интеграле Лебега.

30. Характеристические функции и их свойства.

31. Теорема единственности. Формула обращения (без док-ва).

32. Необходимое и достаточное условие независимости случайных величин (в терминах характеристических функций). Теоремы Бохнера-Хинчина и Пойа (без док-ва).

33. Многомерные гауссовские распределения. Некоррелированность компонент гауссовского вектора эквивалентна их независимости. Необходимое и достаточное условие гауссовости случайного вектора.

34. Лемма Бореля-Кантелли.

35. Виды сходимости случайных величин (с вероятностью 1, по вероятности, в среднем порядка p, по распределению). Соотношения между ними. Примеры.

36. Необходимое и достаточное условие сходимости (фундаментальности) почти наверное. Достаточные условия.

37. Критерий Коши сходимости почти наверное. Связь сходимости почти наверное и по вероятности. Критерий Коши сходимости по вероятности.

38. Банахово пространство L^p.

39. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости рядов из случайных величин (Колмогоров и Хинчин).

40. Леммы Теплица и Кронекера. Теорема Колмогорова об усиленном законе больших чисел.

41. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин (необходимое и достаточное условие).

42. Слабая сходимость вероятностных мер в метрических пространствах, сходимость в основном. Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости.

43. Относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер. Теорема Хелли. Теорема Прохорова (доказательство для R^1).

44. Теорема непрерывности и вспомогательные леммы.

45. Закон больших чисел в форме Хинчина (док-во с помощью характеристических функций). Из сходимости по распределению к константе следует сходимость по вероятности.

46. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин (док-во с помощью характеристических функций). Равномерная сходимость к предельной функции.

47. Центральная предельная теорема (ЦПТ) в форме Линдеберга.

48. ЦПТ в форме Ляпунова.

49. ЦПТ для одинаково распределенных случайных величин как следствие теоремы Линдеберга. Неравенство Берри-Эссеена (без док-ва).

Основные учебники, рекомендуемые по курсу теории вероятностей:

[1] А.Н.Ширяев. Вероятность 1, 2. М: МЦНМО, 2007. Главы 1-4 и очерк истории становления математической теории вероятностей.

[2] Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей. Изд. 8, М: УРСС, 2005. Главы 1,2, 4-8 и дополнения 1-3.

Для развития вероятностной интуиции полезно также использовать учебник

[3] В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М: МИР, 1984.