Марковские процессы, разбегание геодезических и вопрос об окончательной судьбе Вселенной

В.Н. Тутубалин

(Механико-математический факультет МГУ, e-mail: vntutubalin@yandex.ru)

1. Введение: окончательная судьба Вселенной.

На протяжении XVIII-XIX веков этнографами были подвергнуты сравнительному изучению мифы различных народов, в частности, мифы, относящиеся к началу и концу мира. Оказывается, что каждая культура имела свои мифы такого рода. Например, в скандинавских мифах подробно описывается, как мир был создан из тела великана Имира, а в конце концов (в наказание за клятвопреступление асов (богов)) погибнут и асы, и весь мир через огненного великана Сурта.

В современной культуре место этих мифов занимает космология. Не вполне ясно, можно ли к выводам этой науки относиться, как к твердо установленным фактам, или, возможно, здесь имеет место новое мифотворчество, конечно, находящееся в согласии с установленными научными фактами, но все же по своей обоснованности скорее сходное не с наукой, а с мифом. Однако в любом случае мифология современной научной культуры неполна в одном важном отношении. Считается твердо установленным, что в начале нашей Вселенной был Большой Взрыв, а вот чем кончится существование Вселенной - однозначно не известно: один возможный исход состоит в том, что Вселенная схлопнется обратно в точку, а другой – в том, что она разлетится. Конечно, первое несравненно страшнее, чем змей Ёрмунганд, волк Фенрир и великан Сурт вместе взятые, но зато второй вариант означал бы, что после великолепного начала в виде Большого Взрыва наш мир должен кончиться Великой Скукой, когда погаснут все источники энергии и ничего в мире не будет происходить, кроме бесконечного разбегания в пространстве.

Такая неполнота мифологической картины, быть может, имеет тяжелые последствия для всей нашей культуры. Ведь неопределенность в основных догматах цивилизации, действуя на уровне коллективного бессознательного, возможно, вносит нежелательный вклад в дестабилизацию жизни мирового сообщества. Наука просто обязана постараться заполнить эту брешь. Ответ на вопрос – схлопнется или разлетится? – зависит от общей массы вещества в нашей Вселенной: если вещества много, то схлопнется, а если мало – то разлетится. Но можно его поставить и так: рассмотрим, чему равна кривизна двумерных геодезических подмногообразий того трехмерного пространства, в котором мы живем: если она положительна, то схлопнется, а если отрицательна, то разлетится. (Геодезические многообразия образуются лучами света.) Поскольку на кривизну немножко влияют находящиеся более-менее близко крупные массы, то эта кривизна переменная, и стало быть, вопрос – положительна или отрицательна? – надо относить к некоей средней кривизне. Понятно, что в малых масштабах (типа, например, Солнечной системы) эта средняя кривизна неотличима от нуля, так что надо думать о космологических масштабах.

Можем ли мы, живя на Земле или в ближнем космосе, сделать эту среднюю кривизну (хотя бы в принципе) наблюдаемой? До известной степени это возможно. Представим себе следующую крайне упрощенную схему опыта. Направим телескоп в какую-нибудь точку и станем пересчитывать звезды и определять расстояния до них и их массы (допустим, что это возможно) в каком-то очень узком конусе, ось которого совпадает с осью телескопа. Предположим, что Вселенная в большом масштабе однородна в смысле распределения масс. В таком случае количество массы, находящейся на определенном расстоянии от нас, будет совершенно по-разному зависеть от этого расстояния в случаях положительной и отрицательной (или нулевой) кривизны. В случае отрицательной кривизны геодезические экспоненциально разбегаются (значит, и масса будет расти с расстоянием экспоненциально); в случае положительной кривизны не разбегаются вообще, а в случае нулевой кривизны разбегаются линейно (значит, масса в поперечном сечении конуса будет расти пропорционально квадрату расстояния до сечения). Усредняя результаты по многим точкам, в которые наводится телескоп, мы можем надеяться каким-то образом оценить среднюю кривизну и тем самым придать необходимую завершенность нашей мифологии.

Однако эта идиллическая картина подвержена некоему ужасному разочарованию, которое впервые отметил Я.Б. Зельдович в 1964 году. Оказывается, переменный характер кривизны способен так исказить разбегание геодезических, что наши наблюдения получат некий систематический сдвиг в сторону отрицательной кривизны. Иными словами, мы (возможно) будем ошибочно считать, что дело кончится Великой Скукой, в то время как на самом деле нашу Вселенную ждет Великий Ужас в виде схлопывания в точку.

В последнее десятилетие подход Зельдовича развил Д.Д. Соколов, связавший рассматриваемую схему с теорией Ферстенберга для произведений случайных матриц. Из этой теории с несомненностью следует, что экспоненциальное разбегание геодезических сохраняется (в основном) и в случае положительной (но переменной) кривизны. Ученик же Соколова В.Г. Ламбурт заметил (по-видимому, впервые), что из теории Ферстенберга вытекает нечто, на первый взгляд, совсем неожиданное: вообще-то говоря, геодезические разбегаются экспоненциально быстро, но на некоторых расстояниях сближаются настолько, что пересекаются (возникают так называемые *сопряженные точки*). Понятно, что в этом случае оценка кривизны по зависимости наблюдаемой массы от расстояния вообще не имеет смысла.

Дальнейшее содержание данной работы посвящено некоторым количественным моделям и оценкам, которые, в конечном счете, должны помочь выяснить, существенны или нет для космологии все эти искажения наблюдений, возможность которых качественно предсказывает теория.

2. Уравнение Якоби для разбегания геодезических и случайная кривизна

Как известно, разбегание близких геодезических на двумерном римановом многообразии принято описывать с помощью поля Якоби. Пусть через точку O многообразия проведены две близкие геодезические, составляющие между собой небольшой угол θ. Введем на первой геодезической координату x, представляющую собой расстояние до точки O, и рассмотрим величину $y(x)$, определяемую уравнением Якоби $y''(x)+k(x)y(x)=0$ (где $k(x)$ – гауссова кривизна в точке x) и начальными условиями $y(0)=0, y'(0)=1$. Эта величина и называется полем Якоби вдоль выбранной геодезической. Связь его с расстоянием между точками двух близких геодезических следующая: если две точки лежат на близких геодезических на расстоянии x от точки O каждая, то расстояние между ними в первом приближении по θ есть $y(x)\theta$.

В частности, если кривизна $k(x)=k$ постоянна, то возможны следующие три случая. Если $\kappa>0$, то поле Якоби меняется периодически и остается ограниченным (как колебания математического маятника), а следовательно, геодезические (в первом приближении по θ) далеко не расходятся. Если $\kappa=0$, то $y(x)=x$, и геодезические разбегаются с ростом x по линейному закону (случай евклидова пространства). Наконец, если $\kappa<0$, то поле Якоби растет экспоненциально быстро и так же разбегаются геодезические. Но эта картина существенно меняется, если допустить переменную кривизну.

Модель переменной кривизны должна иметь отношение к космологии. Ориентируясь на однородность Вселенной в большом масштабе, можно предложить считать кривизну вдоль геодезической стационарным случайным процессом, который получается путем суммирования некоторого постоянного значения (от которого и зависит конечная судьба Вселенной) и некоторой случайной добавки с нулевым математическим ожиданием. В данном случае вполне допустима мысль о статистическом ансамбле многих реализаций этого случайного процесса, поскольку тот крайне упрощенный телескоп, о котором шла речь во введении, можно наводить во много различных точек. Таким образом, вероятностный подход в смысле существования ансамбля представляется возможным. Вторая мысль состоит в том, что значения случайного процесса кривизны в далеко отстоящих точках геодезической естественно считать статистически независимыми.

Следует отметить, что существующие в теории вероятностей понятия потери зависимости в далеко отстоящих точках, основанные на том или ином варианте перемешивания, не получили (насколько известно автору данной статьи) применения в физике. В физике предпочитают простейшую модель случайного процесса с обновлением. В случае кривизны это означает, что на геодезической можно выбрать так далеко отстоящие друг от друга точки $x_0=O, x_1,\ldots,x_n,\ldots$, что значения случайного процесса кривизны на отрезках между соседними точками попросту являются статистически независимыми. В таком случае получается, что фундаментальная матрица уравнения Якоби $B(n)$ на отрезке $[x_0,x_n]$ представляется в виде $B(n)=B_1B_2\ldots B_n$, где $B_к$ обозначает фундаментальную матрицу на отрезке $[x_{k-1},x_k]$, т.е. в виде произведения независимых случайных матриц. (Предполагается, конечно, что уравнение Якоби записано в виде системы двух уравнений первого порядка; при этом фундаментальные матрицы будут унимодулярными матрицами порядка 2.)

Можно напомнить, что группа таких вещественных матриц является одним из вариантов группы движений плоскости Лобачевского. Действительно, эти матрицы можно заставить действовать дробно-линейными преобразованиями на комплексной плоскости. Вещественные дробно-линейные преобразования будут сохранять вещественную ось, а следовательно, и верхнюю комплексную полуплоскость: получится хорошо известная модель плоскости Лобачевского. В свое время сам Н.И. Лобачевский искал применение своей геометрии в космосе: он использовал только что появившиеся в астрономии измерения параллаксов звезд. (Параллаксом звезды называется угол, под которым видна с расстояния до звезды большая полуось земной орбиты, если расположить ее перпендикулярно к направлению на звезду.) Эти величины для самых близких к Земле звезд несколько меньше одной угловой секунды, и такими их и определял Бессель во времена Лобачевского. Но Лобачевский пользовался наблюдениями некоего отставного капитана корабля, который давал вдесятеро большие значения. К чести Николая Ивановича, следует сказать, что, несмотря на это, он не сделал неправильного вывода о применимости своей геометрии на межзвездных расстояниях. Но вот мы видим, что геометрия Лобачевского все же должна использоваться в том числе и в космологии.

К произведению $B(n)$ независимых и одинаково распределенных (в силу гипотезы об однородности Вселенной) матриц применима теория Ферстенберга. Один из результатов этой теории состоит в том, что элементы матрицы (а стало быть, и поле Якоби) возрастают с ростом n экспоненциально быстро. Из этого правила возможно исключение лишь в том случае, когда носитель распределения вероятностей каждого из одинаково распределенных сомножителей B_i лежит в некоторой подгруппе, меньшей, чем вся группа. Однако в контексте случайных изменений кривизны такого быть не должно. Один из возможных приемов для объяснения – почему не должно - предложен ранее, когда с помощью произведений случайных матриц рассматривались радиоволноводы (см. [1]). Он состоит в следующем.

Если допустить, что на отрезках между точками обновления кривизна принимает постоянные значения (но случайно меняющиеся от отрезка к отрезку), каждая матрица B_i получит вид $B_i = \exp(h_iA_i)$, где h_i – длина i-го отрезка, A_i – матрица, с помощью которой изучаемое уравнение записано в виде системы первого порядка. В случае уравнения Якоби (записывая в строчку вектор $\{y(x),dy/dx\}$) имеем

$A_i = \begin{pmatrix} 0 & k_i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, матрица состоит из двух слагаемых, первое из которых постоянно, а второе случайно. Допустим, что случайное слагаемое имеет плотность распределения на некотором линейном подмногообразии L_0 алгебры Ли рассматриваемой группы (в нашем случае уравнения Якоби L_0 есть просто одномерное множество матриц, у которых только правый верхний элемент отличен от нуля). Далее предположим, что длина отрезка h_i также случайна и имеет плотность распределения на некотором интервале. Тогда матрица h_iA_i имеет плотность распределения на линейном подпространстве L, которое порождается вместе случайной и неслучайной частью матрицы A_i. Доказывается, что не сама матрица B_i, но произведение этих матриц в конечном числе имеет плотность распределения на подгруппе $\exp(H)$, где H – подалгебра Ли, порождаемая подпространством L. Таким образом, вопрос сводится к нахождению подалгебры H, порождаемой элементами L и их коммутаторами.

В случае уравнения Якоби неслучайная и случайная части матрицы A_i дают два элемента базиса алгебры Ли всей унимодулярной группы, а их коммутатор дает третий элемент. Таким образом, естественно считать, что матрицы B_i (либо их произведение в конечном числе) имеют плотность распределения на всей унимодулярной группе.

Таким образом, даже при строго положительной, но переменной (и случайной) кривизне геодезические должны разбегаться экспоненциально быстро.

Однако утверждение теории Ферстенберга имеет асимптотический характер. В этой теории произведение случайных матриц исследуется путем редукции к некоторым марковским цепям. Экспоненциальный рост произведения случайных матриц гарантируется с того момента, когда в этих цепях достигается стационарное распределение вероятностей. С другой стороны, в космологии имеется понятие «космологического горизонта» - это то расстояние, которое может пройти свет с сотворения мира (т.е. момента Большого Взрыва) до настоящего времени. Устремлять к бесконечности длину отрезка геодезической x за пределы космологического горизонта смысла не имеет. Поэтому возникает вопрос – раньше или позже космологического горизонта устанавливается стационарное распределение в той цепи Маркова, которая используется в теории Ферстенберга. На этот вопрос нельзя ответить, не имея каких-то оценок величины случайных колебаний кривизны.

3. Цепи Маркова и теория Ферстенберга.

Для изучения произведения случайных матриц не годятся в качестве координат сами матричные элементы. Применяются несколько другие координаты. В полном виде это преобразование координат можно посмотреть в недавней работе [2], которая удобна тем, что соответствующий журнал доступен в Интернете. Но в настоящей работе нам потребуется не полное описание произведения матриц, а лишь вырожденный вариант – результат действия произведения матриц на вектор.

Марковская цепь традиционно определяется как случайный процесс с дискретным временем такой, что его условные распределения в будущем при условии, что известно поведение в прошлом и настоящем, совпадают с условными распределениями при условии, что известно лишь настоящее. Так определил понятие цепи основоположник этой науки А.А. Марков (старший). Физический смысл этого понятия, по-видимому, не был ясен самому А.А. Маркову, и он искал марковские цепи в чередовании гласных и согласных букв русского текста. Но несколько позже был понят физический смысл:

например, в работах А.Н. Колмогорова и А.Я. Хинчина времен 30-х годов прошлого века считается без особых обсуждений, что марковская зависимость имеет очевидное сходство с понятием неслучайной динамической системы. Ведь фазовое пространство динамической системы выбирается таким образом, что при известном положении системы в какой-то момент времени ее будущее движение определяется однозначно. Для марковской же цепи однозначно определяются не сами будущие события, а их вероятности.

Однако в физических приложениях марковские цепи обычно возникают не с помощью условных вероятностей, а следующим образом. Считается, что положение системы $x(n+1)$ в момент $n+1$ есть некоторый функционал от $x(n)$ и новой независимой случайности ξ_{n+1}. В виде формулы это записывается так: $x(n+1) = F(n, x(n), \xi_{n+1})$, где $\{\xi_n,\ n=1,2,\ldots\}$ – это последовательность независимых случайных объектов. В частности, если для некоторого процесса принята модель с обновлением, то для величин, связанных с этим процессом, часто автоматически возникает модель марковской цепи.

Применительно к полю Якоби рассмотрим вектор $w(n) = \{y(x_n), y'(x_n)\} = w(0)B(n) = w(0)B_1B_2...B_n = r(n)u(n)$, где $r(n), u(n)$ - полярные координаты вектора $w(n)$, т.е. $r(n) = |w(n)|, u(n) = w(n)/|w(n)|$. При переходе от n к $n+1$ получим

$$w(n+1) = w(n)B_{n+1} = r(n)\{u(n)B_{n+1}\} = r(n)r^*\{u(n), B_{n+1}\}u^*\{u(n), B_{n+1}\}.$$

Здесь $r^*\{u(n), B_{n+1}\} = |u(n)B_{n+1}|, u^*\{u(n), B_{n+1}\} = u(n)B_{n+1}/|u(n)B_{n+1}|$.

Таким образом, $r(n+1) = r(n)r^*\{u(n), B_{n+1}\}, u(n+1) = u^*\{u(n), B_{n+1}\}$.

Следовательно, последовательность $u(0) = (0,1), u(1), u(2), \ldots$ образует марковскую цепь (поскольку следующее состояние $u(n+1)$ зависит лишь от предыдущего состояния $u(n)$ и новой независимой случайности B_{n+1}). Что же касается логарифма $\log r(n)$, то он является суммой функций вида $\log r^*\{u(n), B_{n+1}\}$, определенных на парах величин $\{u(n), B_{n+1}\}$, а эти пары тоже образуют цепь Маркова. Поскольку пространство состояний для $u(n)$ (единичная окружность) компактно и существует переходная плотность для этой цепи Маркова, исследование ее принципиально не отличается от того, что делал А.А. Марков для цепи с конечным числом состояний. Однако установление следующих двух фактов нетривиально и было выполнено Ферстенбергом:

1) Марковская цепь, которая получается из цепи $u(n)$ отождествлением диаметрально противоположных точек окружности, эргодична.
2) Математическое ожидание a величины $\log|uB|$, где u имеет стационарное распределение марковской цепи $u(n)$, а B не зависит от u и имеет распределение любого из сомножителей B_i, строго положительно. Величина a носит название старшего показателя Ляпунова. Этот показатель и определяет скорость экспоненциального роста произведения фундаментальных матриц.

Но если противоположных точек не склеивать, то цепь $u(n)$, вообще говоря, не будет эргодической. Можно доказать (см. [3]), что эта цепь не может иметь подклассов, но у нее может быть два различных класса. В.Г. Ламбурт заметил интересный факт, который теперь можно сформулировать так: если цепь $u(n)$ эргодична, то на геодезической существует бесконечно много сопряженных точек (т.е. таких точек x, что поле Якоби $y(x)=0$). Действительно, эта цепь (без отождествления диаметрально противоположных точек окружности) эквивариантна относительно замены $u(n)$ на $(-u(n))$, следовательно, стационарная плотность $p(\varphi)$ обладает свойством $p(\varphi)=p(-\varphi)$ (здесь φ - координата на окружности, связанная с u соотношением $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$). Получается, что если $p(\varphi)$ положительна в окрестности некоторой точки φ, то она положительна и в окрестности точки $\varphi+\pi$. Стало быть, в случае эргодичности цепь $u(n)$ должна совершить бесконечно много переходов из окрестности точки φ в окрестность диаметрально противоположной точки $\varphi+\pi$. Но вектор $w(x)$, а стало быть и $u(x)$, существует не только в дискретных точках $x=x_n$, но и во всех точках x на геодезической. Поэтому при переходе $u(n)$ в диаметрально противоположную точку окружности непременно должно найтись такое значение x, при котором $\varphi(x)$ равно $\pi/2$ или $(-\pi/2)$. В этой точке x значение поля Якоби $y(x)=r(x)\cos\varphi(x)=0$ независимо от роста величины $r(x)$.

В этом рассуждении сопряженные точки получаются как вывод из эргодических свойств марковских цепей, но, вообще говоря, они могут возникать и раньше установления стационарного распределения. Таким образом, если окажется, что теория Ферстенберга в смысле экспоненциального роста $|w(n)|$ действует лишь при очень большой длине на геодезической (например, за пределами космологического горизонта), то искажение наблюдений, связанное с сопряженными точками, может проявляться существенно раньше.

В заключение этой работы рассмотрим один пример, в котором среднее расстояние между сопряженными точками может быть оценено с помощью простейших параметров, описывающих статистические свойства случайных возмущений кривизны.

3. **Малые случайные возмущения нулевой средней кривизны**

Сделаем некоторую замену переменных в уравнении Якоби. Пусть δ - расстояние по геодезической между соседними точками обновления. Положим

$$z_1(x)=y(x), z_2(x)=y'(x)\delta, z(x)=\{z_1(x), z_2(x)\}, t=x/\delta, \nu=k\delta^2.$$

Безразмерную переменную t будем условно называть «временем», а безразмерный аналог кривизны ν - снова «кривизной». Введем полярные координаты $z(t)=\rho(t)\{\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\}$. Можно считать, что в целочисленные моменты времени t = 0,1,… угол $\varphi(t)$ совершает марковское блуждание по полуокружности $[-\pi/2, \pi/2]$, причем концы этого отрезка отождествлены. При этом $\varphi(0)=\pi/2$, а при малых положительных t выполняется неравенство $\varphi(t)<\pi/2$. Сделаем, наконец, замену переменной $u=u(t)=z_2(t)/z_1(t)=tg\varphi(t)$. Легко видеть, что на прямой $-\infty<u(t)<\infty$ из уравнения Якоби вытекает следующее уравнение:

$$du/dt=-(\nu(t)+u^2). \tag{1}$$

Таким образом, для $u(t)$ возникает некоторая довольно простая динамическая система со случайным воздействием $\nu(t)$. Рассмотрим следующую асимптотическую задачу исследования этой системы.

Пусть дано, что (безразмерная) кривизна ограничена: $|\nu(t)|\le\varepsilon$, где в дальнейшем будет считаться, что $\varepsilon\to 0$. Пусть $\nu(t)$ является стационарным случайным процессом с обновлением в точках t =1,2,…(размерная длина δ промежутка обновления пусть не зависит от ε). Пусть среднее $\mathbf{E}\,\nu(t)=0$, а дисперсия интеграла $\int_0^1 \nu(t)dt$ имеет вид $b\varepsilon^2$, где $b>0$ и не зависит от ε. При $t=0$ величина $u(0)$ не существует, но при малых $t>0$ эта величина делается большой, но конечной, причем из уравнения (1) видно, что скорость ее изменения делается отрицательной. Эта отрицательная скорость сохраняется вплоть до момента достижения величиной $u(t)$ уровня $\sqrt{\varepsilon}$, выше которого эта величина в дальнейшем подняться не может. Оказывается, что за счет действия случайных возмущений величина $u(t)$ в конце концов достигает уровня $(-\sqrt{\varepsilon})$, после чего начинается ее монотонное движение в отрицательную сторону, и за конечное время соответствующий угол $\varphi(t)$ достигает значения ($-\pi/2$), что и означает появление сопряженной точки. В силу условия склейки точек $\pm\pi/2$, можно считать, что после этого начинается новый цикл движения из точки $+\pi/2$. Нашей задачей является оценка средней продолжительности такого цикла.

Понятно, что физический интерес может представлять лишь оценка, выражающаяся через небольшое число параметров, характеризующих вероятностную меру, связанную с процессом $\nu(t)$ случайной кривизны. (Мы ограничимся лишь введенными выше параметрами ε и b.) Зависимость от небольшого числа параметров может возникнуть в результате аппроксимации рассматриваемой марковской цепи диффузионным процессом. Но такая аппроксимация невозможна во всей области значений $(-\infty) < u(t) < \infty$, поскольку при больших по модулю значениях $u(t)$ скачки марковской цепи $u(n)$ за единицу времени остаются большими и при $\varepsilon\to 0$. Однако в работе [4] показывается с помощью несложных оценок, что время перехода от значения $u=\infty$ к значению $u=\varepsilon^{1/2}$ (равно как и время перехода от значения $u=-\varepsilon^{1/2}$ до значения $u=-\infty$) имеет порядок величины $\varepsilon^{-1/2}$. В то же время мы показываем ниже, что время перехода от значения $u=\varepsilon^{1/2}$ до значения $u=-\varepsilon^{1/2}$ имеет больший порядок величины $\varepsilon^{-2/3}$. Следовательно, нужно оценивать лишь последнее время перехода, а в области значений величины u, удовлетворяющих неравенствам $-\varepsilon^{1/2}<u<\varepsilon^{1/2}$, переходы марковской цепи $u(n)$ делаются (при $\varepsilon\to 0$) малыми, так что возможен если не в точности переход к диффузионному процессу, то построение таких диффузионных процессов, время перехода которых оценивает снизу и сверху время перехода для системы, задаваемой уравнением (1). Нижняя оценка ранее публиковалась в [5] и приводится здесь для удобства, а верхняя оценка ранее не публиковалась.

Нижняя оценка. Рассмотрим некоторое число α, удовлетворяющее неравенствам $1/2<\alpha<1$ и динамическую систему $u_1(t)$, задаваемую уравнением

$$du_1/dt = -(\nu(t) + \varepsilon^{2\alpha}). \tag{2}$$

Рассмотрим интервал значений u_1 вида $[-\varepsilon^{\alpha}, \varepsilon^{\alpha}]$. Дополним уравнение (2) условием, состоящим в том, что при пересечении снизу верхней границы этого интервала траектория $u_1(t)$ испытывает отражение вниз от этой границы. Так как внутри указанного интервала скорость движения вниз системы (2) больше, чем скорость системы (1), и еще добавлено условие отражения, которого нет для системы (1), то ясно, что время движения системы (1) от верхней до нижней границы указанного интервала может быть лишь больше, чем для системы (2). Систему (2) можно аппроксимировать диффузионным процессом с параметром сноса ($-\varepsilon^{2\alpha}$) и параметром диффузии, равным $\mathbf{E}\{\int_0^1 \nu(t)dt\}^2 = b\varepsilon^2$ с условием отражения от верхней границы интервала. Обозначим через $g(x)$ среднее время достижения границы ($-\varepsilon^{\alpha}$) траекторией этого диффузионного процесса, исходящей из точки $x\in[-\varepsilon^{\alpha}, \varepsilon^{\alpha}]$. Хорошо известно, что для функции $g(x)$ выполняется уравнение $Ag=-1$, где A – инфинитезимальный оператор процесса, и условия $g'(\varepsilon^{\alpha})=0, g(-\varepsilon^{\alpha})=0.$ После решения указанного уравнения с учетом наложенных условий получаем

$$g(\varepsilon^{\alpha}) = 2\varepsilon^{-\alpha} - (b/2)\varepsilon^{2-4\alpha}\{1-exp(-4/b)\varepsilon^{-2+3\alpha}\}. \tag{3}$$

(напомним, что $b\le 1$ в силу условия $|\nu(t)|\le\varepsilon$).

Для любого α из интервала (1/2, 1) выражение (3) представляет собой нижнюю оценку для среднего времени перехода системы (1) из точки ε^{α} в точку ($-\varepsilon^{\alpha}$). Выберем теперь α так, чтобы выражение (3) имело (как функция ε) наибольший возможный порядок величины. Нетрудно видеть, что это достигается при $\alpha=2/3$, причем получается, что

$$g(\varepsilon^{2/3}) = [2-(b/2)(1-exp(-4/b))]\varepsilon^{-2/3} \approx (2-b/2)\varepsilon^{-2/3}.$$

Таким образом, получается, что среднее время перехода системы (1) от уровня $\sqrt{\varepsilon} > \varepsilon^{2/3}$ до уровня $-\sqrt{\varepsilon} < -\varepsilon^{2/3}$ заведомо не менее $C\varepsilon^{-2/3}$, где C – некоторая константа.

Верхняя оценка. Аппроксимация системы (1) диффузионным процессом обычно делается по следующему правилу. Уравнение (1) решают приближенно на отрезке времени длины 1 с учетом членов до порядка величины $\nu(s)\nu(t)$, а затем вычисляют среднее значение и дисперсию приращения $\Delta u(n) = u(n+1) - u(n)$ в зависимости от $u(n)$. Эти величины объявляют коэффициентами сноса и диффузии для аппроксимирующего диффузионного процесса. Понятно, что эти математические ожидания выражаются через корреляционную функцию кривизны $\nu(t)$, но для космологических приложений задание такой корреляционной функции вряд ли реально. Поэтому мы ограничимся более грубым приближением. Именно, рассмотрим динамическую систему $u_2(t)$, уравнение которой представляет собой уравнение (1), но с «замороженным» на отрезке $n<t<n+1$ значением $u_2(t)=u_2(n)$. В разностном виде получится

$$\Delta u_2(n) = u_2(n+1) - u_2(n) = -u_2^2(n) - \xi_{n+1}, \text{где } \xi_{n+1} = \int_n^{n+1} \nu(t)dt. \qquad (4)$$

Рассмотрение модельного примера, в котором значение кривизны $\nu(t)=\nu_{n+1}$ постоянно на отрезке $n<t<n+1$ показывает, что при более точном рассмотрении аппроксимации системы (1) диффузионным процессом уравнение (4) должно было быть дополнено несколькими членами, из которых заметную роль играет член $(-1/3)(\nu_{n+1})^2$. Таким образом, приближение (4) недооценивает отрицательной составляющей коэффициента сноса, из чего вытекает, что оценка среднего времени достижения уровня $(-\varepsilon^{1/2})$, основанная на (4), даст верхнюю оценку по отношению к системе (1).

Коэффициенты сноса и диффузии, вычисленные с помощью (4), суть, соответственно, $(-u^2)$ и $b\varepsilon^2$. Граничное условие отражения от верхней границы $\sqrt{\varepsilon}$ сохраняется. Следовательно, для диффузионного приближения системы (4) среднее время $g(x)$ достижения нижней границы $(-\sqrt{\varepsilon})$ при отправлении из точки $x\in[\sqrt{\varepsilon}, -\sqrt{\varepsilon}]$ ищется с помощью следующей задачи:

$$(1/2)b\varepsilon^2 g''(x) - x^2 g'(x) = -1, g'(\sqrt{\varepsilon}) = 0, g(-\sqrt{\varepsilon}) = 0. \qquad (5)$$

Полагая $h(x) = g'(x),$ переписываем (5) в виде уравнения первого порядка и с помощью справочника [6, пункт 9.2-4] находим (с учетом условия отражения на границе)

$$h(z) = \frac{2}{b\varepsilon^2} \int_z^{\sqrt{\varepsilon}} exp[-(2/3b)\varepsilon^{-2}(y^3 - z^3)]dy. \qquad (6)$$

Второе граничное условие показывает, что для получения $g(x)$ нужно интегрировать (6) в пределах от $(-\sqrt{\varepsilon})$ до x, так что для искомого среднего времени перехода системы (4) получаем выражение $g(\sqrt{\varepsilon}) = \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} h(z)dz.$ Возникает вопрос – какой порядок величины по ε имеет последнее выражение, и удача состоит в том, что он не превосходит $C_1\varepsilon^{-2/3}$, где C_1 – некоторая константа. Таким образом, полученные нижняя и верхняя оценка имеют одинаковый порядок величины по ε.

Проведем оценки, нужные для доказательства последнего утверждения.

С целью оценки сверху можно верхний предел в выражении (6) заменить на ∞. Рассмотрим функцию

$$J(z)=\int_z^{\infty} exp[-(2/3b)\varepsilon^{-2}(y^3-z^3)dy.$$

После замены обозначений $\lambda=(2/3b)\varepsilon^{-2}, v=z^3$ и серии замен переменной интегрирования $y^3=w, \lambda w=p, p-\lambda v=h$ последнее выражение приводится к виду

$$J(v^{1/3})=I(v)=(1/3)\lambda^{-1/3}\int_0^{\infty} e^{-h}(h+\lambda v)^{-2/3}dh. \qquad (7)$$

Локально интегрируемая особенность функции $(h+\lambda v)^{-2/3}$ в случае $v>0$ не попадает в область интегрирования, а в случае $v<0$ – попадает. Оба случая рассматриваются аналогично; разберем второй из них как несколько более сложный. Если $\lambda|v|\le 1,$ то интеграл в (7) оценивается константой, и получаем, что $I(v)<C_2\lambda^{-1/3}$. Если же $\lambda|v|>1,$ то разобьем интеграл (7) в сумму двух интегралов: первый от 0 до $\lambda|v|-1,$ второй от последнего числа до ∞. Второй интеграл оценивается, как $C_3\exp[-\lambda/v/]$. Первый интеграл после замены $\lambda|v|$ - $h=k$ превращается в выражение $e^{-\lambda|v|}\int_1^{\lambda|v|} e^k k^{-2/3} dk \le C_4[\lambda|v|]^{-2/3}$.

При $\lambda|v|>1$ имеем: $\exp[-\lambda|v|]<[\lambda|v|]^{-2/3}$. Таким образом, при $v<0$ получаем оценки: при $\lambda|v|\le 1$ выражение $I(v)\le C_5\lambda^{-1/3}$; при $\lambda|v|>1$ выражение $I(v)\le C_6\lambda^{-1}|v|^{-2/3}$. Аналогичные оценки действуют при $v>0$.

Теперь оценим окончательно среднее время перехода $g(\sqrt{\varepsilon})$. Вспомним, что $v=z^3$, $\lambda=(2/3b)\varepsilon^{-2}$. Область $\lambda|v|\le 1$соответствует $|z|\le C_7\varepsilon^{2/3}$, в этой области $J(z)\le C_8\varepsilon^{2/3}$. Поэтому вклад в величину $g(\sqrt{\varepsilon})$ от интегрирования по этой области не превзойдет величины $\frac{2}{b\varepsilon^2}C_9\varepsilon^{4/3}=C_{10}\varepsilon^{2/3}$. Оценим, наконец, вклад от интегрирования по области $|z|>C_7\varepsilon^{2/3}$. В этой области действует оценка $I(v)\le C_6\lambda^{-1}|v|^{-2/3}=C_{11}\varepsilon^2|z|^{-2}$. Поэтому весь вклад от интегрирования по этой области (с учетом умножения на $2/(b\varepsilon^2)$) не превосходит $\int_{C_6\varepsilon^{2/3}}^{\sqrt{\varepsilon}} C_{12}z^{-2}dz \le C_{13}\varepsilon^{-2/3}$. Таким образом, окончательно получается оценка $g(\sqrt{\varepsilon})\le C_{14}\varepsilon^{-2/3}$.

Цитированная литература

1.Тутубалин В.Н. Исследование некоторых математических моделей радиоволноводов со случайными неоднородностями.//Теория вероят. и ее примен. 1969. Т.14. №4. С.577-596.

2. Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Фундаментальная матрица для уравнения Якоби со случайными коэффициентами.//Вычисл.методы и программирование. 2010. Т.11. С.261-268.

3. Тутубалин В.Н. О мерах, носитель которых порождается алгеброй Ли.//Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т.12. №1. С.154-160.

4. Ламбурт В.Г. Сопряженные точки на геодезической со случайной кривизной.//Матем. заметки. 2006. Т.79. №1. С.95-101.

5. Ламбурт В.Г., Тутубалин В.Н. Нижняя оценка среднего расстояния между сопряженными точками на геодезической со случайной кривизной.//Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. 2007. №2. С. 7-9.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973.