Примеры статистического анализа финансовых данных

0.1 Введение: что такое финансовые данные?

Вероятностно-статистические методы, по своему историческому происхождению, - это определенная группа методов математической физики. Впрочем, и при самом их возникновении совершались попытки применения в областях гораздо более широких, чем фундаментальная или прикладная физика. Страхование, демографию и даже вероятности судебных приговоров можно найти в старинных трактатах по теории вероятностей. Но в последние несколько десятилетий больший научный интерес и лучшую зарплату обещают приложения к экономике, чем к классическим областям физики или техники. Поэтому многие специалисты, учившиеся и работавшие как математики или физики, переключаются на работу в области экономики, в частности, на финансы. Интересно представить себе реальные возможности применения мышления в стиле математической физики в этих вещах.

По-русски, «финансы» и «деньги» - почти синонимы. Небольшое размышление показывает, что мы на самом деле плохо знаем, что такое деньги. Еще сто лет назад в ходу были золотые монеты (вроде бы как основа денежной системы), но они дополнялись ассигнациями. Специалисты по денежному обращению заметили, что государство, в сущности, не имеет способа ограничить массу денег, обращающихся в стране, потому что при ограничении, скажем, количества монет и ассигнаций в ход идут различные векселя, расписки или билеты, которые обращаются примерно на тех же правах, что и такие деньги, которые монопольно выпускаются государством. До известных пор, конечно, пока не возникает кризис доверия к суррогатам и весь народ начинает жаждать почему-то именно «настоящих» денег. Тогда (как это было в середине девятнадцатого века) Английский банк хоть и не перестает совсем выдавать деньги по вкладам, но делает это …трехпенсовыми монетами, пока жаждущим не надоест стоять в очереди и кризис не успокоится.

Ценные бумаги, такие как акции или государственные обязательства, надо, очевидно, считать разновидностями денег. Они могут существовать и в безбумажном виде, т.е. в виде компьютерных кодов. При сколько-нибудь нормальных условиях ценные бумаги ликвидны, т.е. могут быть быстро проданы на рынке (т.е. превращены в ту или иную валюту), а следовательно (через валюту) и друг в друга. Вот и возникает всемирный финансовый рынок, который занимается в огромных масштабах тем, что превращает одни виды денег в другие. Он живет бурной жизнью благодаря спекулянтам, заветной мечтой которых является выгадать что-нибудь на колебаниях курсов, по которым одни деньги превращаются в другие. Для этого хотелось бы находить в общем хаосе какие-то закономерности, в том числе путем применения вероятностно-статистических методов.

Рассмотрим рис.1, на котором представлен курс акций двух наудачу выбранных американских компаний. Для начала следует аккуратно сказать, какие именно данные представлены на этом рисунке. Это так называемые цены закрытия торгов. Каждый день (исключая выходные и праздники) на биржах Соединенных Штатов совершаются сделки с акциями многих различных компаний (кто-то продает акции, а кто-то другой их одновременно покупает). Данные о цене, по которой совершилась сделка, попадают в биржевую информационную систему, а затем делаются доступными всем желающим. Особенное значение придается цене последней сделки с акциями данной компании в данный торговый день: это как бы итог, на котором остановился рынок в данный день в своем процессе оценки акций этой компании (на момент закрытия торгов). Кроме того, могут быть установлены те или иные правила игры, в которых участвует именно цена последней сделки. Например, с учетом этой цены происходит исполнение опционов (об опционах см. ниже). Но как быть, если в какой-нибудь день сделок с акциями данной компании вообще не производилось? Тогда нужно брать цену закрытия предыдущего дня и т.д.

Таким образом, следует помнить о том, что при имитации тех или иных стратегий биржевой игры на основе прошлых данных о ценах закрытия мы не в состоянии точно воссоздать, какими были бы настоящие цены сделок при применении этой стратегии в реальных условиях. По порядку величины разница может составлять единицы процентов от цены акций, что в одних условиях может быть существенно, а в других - нет. Но в дальнейшем при описании имитаций действия стратегий мы не будем упоминать об этой неизбежной условности.

Есть еще одно обстоятельство, о котором следует упомянуть. Время от времени та или иная компания производит со своими акциями так называемый «сплит» (split), при котором старые акции обмениваются на новые в определенном отношении, например 3:2, т.е. две старых акции обмениваются на три новых. Автоматически цена новой акции равна 2/3 цены старой. Понятно, что при рассмотрении динамики цен за какой-то длительный период нужно привести все цены к каким-то определенным акциям, обычно тем, которые существуют на конец периода. На американском рынке укрепилась немного странная традиция, когда целые доллары в значении цены считаются, естественно, по десятичной системе, но дроби после запятой - по двоичной, например, 5/32 доллара (дальше 1/32, кажется, не идут). В файлах же данных, конечно, все пишется по десятичной системе. Казалось бы, могут возникать лишь такие десятичные дроби, которые соответствуют степеням двойки, но из-за сплита это не всегда так.

Итак, по оси ординат на рис.1 отложены цены последних сделок каждого дня с акциями данной компании, приведенные к тем акциям, которые были на конец рассматриваемого календарного периода. Что же отложено по оси абсцисс? Дело в том, что в файлах данных стоят календарные даты, но те (выходные или праздничные) дни, в которые не было торгов, пропущены. Таким образом, по оси абсцисс фактически отложен номер дня торгов, считая за нулевой день 2 января 1989 года, но (по понятным соображениям) оцифровка дана в календарных датах. Иными словами, в дни, когда нет торгов, считается, что время как бы не идет, и по-видимому, это достаточно правильно для финансовых данных. В году примерно 250 торговых дней, и в связи с этим возникает вопрос, как разумнее пересчитывать годовые проценты в дневные: конкретно 5% годовых - это 0.05/365 или 0.05/250 в день? Видимо, более правилен второй способ (если, конечно, речь идет о каких-то расчетах на финансовом рынке).

Теперь можно сказать кратко: на рис.1 представлены данные о ценах акций двух американских компаний примерно за 8 календарных лет: с начала января 1989 г. по конец января 1997 г. В каждом файле данных наблюдений несколько более, чем $8 * 250 = 2000$. Календарные даты обозначены по американской системе: 05.17.91 означает 17 мая 1991 года. Данные представлены с некоторым огрублением в соответствии с возможностями компьютерной графики.

Первое наблюдение, которое можно сделать, глядя на рис.1, состоит в том, что курсы акций чрезвычайно динамичны.Пусть целью спекулянта является приобретение возможно большего количества долларов (это не обязательно так: доллары лишь один из видов денег и можно было бы стремиться приобрести, наоборот, побольше акций или чего-нибудь еще). Тогда важно оценить, за сколько времени можно (в принципе) получить тот или иной процент прибыли на вложенный капитал. Оцифровка оси абсцисс на рис.1 произведена с интервалом примерно в 15 месяцев. Мы видим, что в ряде случаев курс акций за половину этого срока меняется в 1.5 – 2 раза. Итак, если удачно (дешево) купить и тоже удачно (дорого) продать, то можно менее чем за год заработать 50-100% прибыли. Вот и возникает племя биржевых игроков, которые рассчитывают на свои способности удачно выбирать моменты покупки и продажи. Посмотрим, какое отношение к этому могут иметь вероятностные методы.

0.2 Вероятностные модели динамики курсов акций.

При одном взгляде на рис.1 становится ясным, что в вероятностном смысле речь идет о нестационарных случайных процессах.Но в понятии нестационарного случайного процесса пользы мало: нестационарность означает, что распределения вероятностей, соответствующие процессу, как-то меняются со временем. Чтобы эти распределения каким-то образом узнать путем обработки фактических данных, следовало бы создать ансамбль идентичных в вероятностном смысле реализаций данного случайного процесса. Но как создать ансамбль коммерческих компаний, идентичных данной? В этом и разница между миром экономики и миром физики, в котором ансамбль идентичных процессов, вообще говоря, возможен.

Следующим ходом мысли является разложение наблюдаемого процесса на сумму детерминированной и случайной составляющих. Детерминированная составляющая в экономике называется трендом, и вопрос состоит в том, чтобы так определить и вычесть тренд, чтобы оставшаяся случайная составляющая оказалась, по меньшей мере, стационарным случайным процессом (стационарность делает возможным определение вероятностных характеристик по единственной реализации процесса - за счет усреднения каких-то статистик по времени). Рассматривая более или менее произвольный чертеж, такое разделение можно с той или иной степенью надежности проделать, но мы должны насторожиться при мысли о том, что оно далеко не однозначно (в случае курсов акций).

Например, рассматривая акции первой компании, можно сказать, что до конца 1993 года тренд был близок к нулю, а потом вдруг стал очень даже положительным, так что акции в конце концов выросли в 2.5 раза. Но можно сказать и так, что до конца 1991 года тренд был отрицательным (акции упали в 1.5 раза), а потом стал положительным, да так, что акции выросли в 4 раза. Для акций второй компании можно выделить один общий тренд за все 8 лет или два разных тренда (один с 1989 по конец 1991 года, другой, более крутой, с начала 1992 года до начала 1997 года), а при желании — три тренда или более. Если же позволить выделять тренды не только в виде монотонно растущих или убывающих функций, но также в виде тех или иных периодичностей (гармоник), то имя всем этим трендам будет — легион. При любом выделении тренда можно добиться, чтобы модель неплохо описывала имеющиеся данные наблюдений, но будет совершенно неизвестно, продолжится ли такой тренд хоть какое-нибудь время в будущем.

Наконец, существует еще третий способ выделения статистически стационарных явлений в нестационарных случайных процессах. Этот способ использован в применении к финансовым данным Башелье на рубеже 19-го и 20-го веков, а в применении к теории турбулентности Колмогоровым и его учениками в середине 20-го века. Он состоит в рассмотрении приращений процесса за не слишком большое время (отсюда возникло понятие случайного процесса со стационарными приращениями).

Пусть S_t — курс акций в момент t (в случае, когда речь идет о ценах закрытия, t дискретно и обозначает номер дня торгов). Если следовать подходу Башелье, то нужно рассмотреть разности (приращения)

$$\Delta_h S_t = S_{t+h} - S_t. \tag{1}$$

Если законы распределения таких разностей оказываются не зависящими от t, то процесс S_t называется процессом со стационарными приращениями.Впрочем, для финансовых данных считается полезным прибегать к логарифмированию

$$x_t = \ln S_t, \tag{2}$$

так что рассматриваются приращения логарифма

$$\Delta_h x_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t = \ln(S_{t+h}/S_t). \tag{3}$$

Замечание. Если $S_t = 100$ долларов, то что такое $\ln S_t$? Иначе говоря, в какую степень нужно возвести число e, чтобы возникли 100 долларов? Ответ на этот бессмысленный вопрос состоит в том, что любые финансовые данные — это данные об отношении, в котором обмениваются друг на друга единицы двух различных «денег», например акции и доллары. Иначе говоря, данные о курсах безразмерны (потому на рис.1 шкала ординат оцифрована в безразмерных единицах, а не в долларах).

Переход к приращениям в случае теории турбулентности приводит к некоторым достаточно интересным и даже удивительным закономерностям в смысле корреляционных и спектральных свойств этих приращений (речь идет, например, о приращениях проекции скорости турбулентного потока на какую-то из осей координат). Но для финансовых данных — как в случае Башелье (1), так и в случае более современного подхода (2), (3) — чрезвычайно трудно пойти дальше некоторой тривиальности, суть которой станет ясной из рассмотрения рисунков 2 и 3.

На этих рисунках представлены при $h = 1$ день приращения логарифмов цен акций тех же двух компаний, что и на рис. 1. (Обратите внимание на то, что чертежи выполнены в разном масштабе по оси ординат.) Мы видим типичную картину белого шума, т.е. последовательности независимых случайных величин. Получается, что разности

$$\delta_t = \Delta_1 \ln S_t = \ln(S_{t+1}/S_t) \tag{4}$$

похожи (при различных t) на независимые случайные величины.

В каком смысле трудно пойти дальше этой довольно тривиальной модели? Теоретически предложить какие-либо модели с зависимыми величинами δ_t, разумеется, вполне возможно. Но нужно на конкретном материале доказать пользу этих теоретически мыслимых моделей для лучшего понимания фактических данных (а желательно также — и для каких-то практических целей). И вот это оказывается очень трудным, как мы частично увидим ниже.

Допустив, что $\delta_t = \ln(S_{t+1}/S_t)$ — независимые случайные величины, мы получим, что предположение стационарности по t сведется просто к тому, что распределение δ_t при всех t одинаково. В таком случае

$$\mathbf{E}\delta_t = a, \mathbf{D}\delta_t = \mathbf{E}(\delta_t - a)^2 = \sigma^2$$

не зависят от t. Для приращения

$$\Delta_h x_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t = \delta_t + \cdots + \delta_{t+h-1}$$

получаем

$$\mathbf{E}\Delta_h x_t = ah, \mathbf{D}\Delta_h x_t = h\sigma^2. \tag{5}$$

Пока что единицей времени у нас являлся один (торговый) день, t и h принимали целые значения. Но можно время выражать в других единицах, например в годах, и тогда t и h будут меняться на решетке с шагом $1/250$. Психологически естественно перейти в таком случае к модели с непрерывным временем: считать, что S_t и $x_t = \ln S_t$ определены для непрерывного времени, причем x_t является процессом с независимыми приращениями, а равенства (5) сохраняются. Простейшим из таких процессов является процесс броуновского движения с коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии σ^2. Вот мы и пришли к знаменитой модели геометрического (или экономического) броуновского движения, которую можно записать в следующем виде:

$$\ln S_t - \ln S_0 = at + \sigma w(t),$$

где $w(t)$ — винеровский процесс.

Замечание. Формулы (5) считаются справедливыми для не слишком больших значений h. В какой именно области значений h справедлив линейный рост дисперсии приращения, следует выяснять по фактическим данным.

0.3 Сопоставление модели геометрического броуновского движения с фактическими данными

В нашу компьютерную эпоху совершенно не обязательно ограничиваться исследованием лишь цен закрытия торгов (впрочем, всегда, кроме цен закрытия старались анализировать также цены открытия, т.е. первой сделки в данный день, а также минимальные и максимальные цены за день). Можно получать и анализировать данные о ценах всех сделок, а также и данные о так называемых ценах спроса (ask) и предложения (bid). Участники электронных торгов выставляют заявки на покупку или продажу тех или иных ценных бумаг по какой- то цене. Вообще говоря, продажные цены (ask) несколько выше, чем предлагаемые цены покупки (bid), но в процессе торгов участники меняют цены и как только возникает равенство или противоположное неравенство между ценами ask и bid, соответствующие заявки автоматически удовлетворяются (совершаются сделки). Вообще говоря, можно получать (с каким-то шагом по времени) данные обо всех заявках, которые на данный момент имеются в системе торгов. Но обычно ограничиваются данными о наилучших ценах ask и bid, т.е. о наинизшей цене ask и наивысшей цене bid. Итак, можно получать данные с шагом по времени порядка нескольких секунд, которые отражают эти цены. При работе с парой цен ask и bid условно считается, что «просто цена» равна среднему геометрическому этой пары (т.е. ее логарифм равен среднему арифметическому логарифмов). Таким образом, возникают ряды очень частых во времени наблюдений либо двух цен, либо одной цены. К любому из таких рядов может с тем или иным успехом применяться модель геометрического броуновского движения, в которой время мыслится вообще как непрерывное.

Как всегда, дело начинается с оценки параметров a и σ, входящих в модель (см. соотношения (5)).

Первая неожиданность, с которой мы при этом сталкиваемся, заключается в том, что параметр сноса a оценивается по фактическим данным крайне ненадежно. Понятно, что если мы образовали разности

$$\Delta_h x_t = x_{t+h} - x_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t,$$

то для оценки $ah = \mathbf{E}\Delta_h x_t$ у нас нет ничего другого, кроме суммы значений $\Delta_h x_t$, которая равна $\ln(S_T/S_0)$, если 0 - начальный момент отрезка ряда наблюдений, по которому оценивается a, T — его конечный момент. Рассмотрим рис.1, который имеет примерно 2000 наблюдений цен закрытия для каждой компании с шагом $h = 1$ день. Для числа наблюдений $T + 1$, которые используются для оценки параметра a примем сначала умеренную величину порядка 100. Понятно, что отрезок $[0, T]$ длины 100 можно многими способами разместить на оси абсцисс так, что $\ln(S_T/S_0)$ будет принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, получаемые оценки для a будут колебаться около нуля, и никакой уверенной оценки a не получится. Дело в том, что модель с постоянным значением a фактически не может описывать динамику курса акций: долговременная динамика определяется какими-то малопонятными и для экономики, и для математики трендами и циклами. Переходя к приращениям логарифма курса, мы как бы исключаем эти сравнительно плавные колебания, но при этом бываем наказаны тем, что не можем оценить параметр a, формально входящий в нашу модель.

Если для данных рис. 1 мы используем, наоборот, очень большое T, скажем, $T \approx 2000$, то какие-нибудь оценки для a мы, конечно, получим. Акции I компании возросли за 2000 дней примерно в 2.5 раза, акции II компании примерно в 3 раза. Грубо говоря, $\ln S_T/S_0 \approx 1$, т.е. $a \approx 1/2000$ в день. Мы сейчас увидим, что это значение крайне мало в сравнении с порядком величины случайных колебаний, который оценивается стандартным отклонением $\sigma\sqrt{h}$.

Наоборот, волатильность σ является вполне серьезным параметром, который можно оценивать. Впрочем, сначала предлагается немного изменить определение волатильности. Из формулы (5) получаем

$$\mathbf{E}(\Delta_h x_t)^2 = \mathbf{D}\Delta_h x_t + a^2h^2 = h\sigma^2 + a^2h^2.$$

Поскольку в реальности ah всегда намного меньше, чем $\sigma\sqrt{h}$ (т.е. $a^2h^2 << h\sigma^2$), предлагается в определение волатильности не запутывать значение параметра a, которого мы все равно не можем толком определить по фактическим данным, а положить просто

$$\mathbf{E}(\Delta_h x_t)^2 = h\sigma^2. \tag{6}$$

Иными словами, предлагается составлять ряд значений

$$\Delta_h x_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t \tag{7}$$

с каким-то фиксированным h (например, $h = 1$ день) и оценивать $h\sigma^2$, усредняя квадраты величин (7). При этом следует экспериментально проверять, что изменение шага h не приводит к существенному изменению оценки для σ. Но главнейшее предположение модели - это постоянство волатильности, т.е. независимость левой части формулы (6) от t.

В математической статистике давно известен графический прием, с помощью которого судят о постоянстве средних значений каких-то случайных величин. Для этого их значения $x_1, x_2, \cdots$, полученные в эксперименте, складывают нарастающим итогом, т.е. рассматривают сумму $x_1 + x_2 + \cdots + x_t$ как функцию от числа слагаемых t, и рисуют соответствующий график. Если среднее значение случайных величин постоянно и отлично от нуля, то (в силу закона больших чисел) при большом числе слагаемых график этих накопленных сумм напоминает прямую линию. (А составить себе представление о том, насколько он может отличаться от прямой линии при определенном числе наблюдений, лучше всего с помощью метода Монте-Карло, моделируя на компьютере случайные величины со строго постоянным средним и с такими законами распределения, какие предполагаются похожими на законы распределения реальных наблюдений.) Рассмотрим рис.4, на котором представлены так называемые «накопленные квадраты волатильности»,т.е. нарастающие суммы $(\Delta_h x_t)^2$ при $h = 1$ день. (Те же компании, что и на рис.1.) Графики этих сумм, конечно, довольно сильно изгибаются (метод Монте-Карло дает графики, гораздо более близкие к прямым), но в целом все же напоминают прямые линии. За восемь лет волатильность колеблется, но все же около какого-то среднего значения. Принципиально важно, что наклон графика второй компании примерно в 2.5 раза больше, чем для первой компании, и это соотношение примерно сохраняется на протяжении всего интервала наблюдения. (Для сравнения самих волатильностей, а не их квадратов нужно брать $\sqrt{2.5}$.) Итак, волатильности акций различных компаний могут заметно различаться, причем волатильность предсказуема в том смысле, что если за какое-то время волатильность одних акций была больше, чем других, то такое соотношение, вероятно, сохранится и в будущем.

Заметим, что участки более крутого роста кривых накопленной волатильности на рис.4 могут быть глазомерно сопоставлены с участками большего размаха колебаний логарифмов цен на рис. 2 и 3. Но ясно, что с накопленными суммами работать несравненно удобнее.

Обратим внимание на порядки величин, о которых идет речь. Для получения оценки (безразмерной) величины $h\sigma^2$ при $h = 1$ день нужно крайнее правое значение графика на рис. 4 разделить на число слагаемых ≈ 2000. В результате для первой компании получим $3 * 10^{(-4)}$, для второй $7 * 10^{(-4)}$. Стандартное отклонение величины $\delta_t = \ln(S_{t+1}/S_t)$ равно $\sigma\sqrt{h}$ и составляет, соответственно, 0.017 и 0.027. Мы видим, что эти величины в самом деле на порядок больше, чем оценка для $bfE\delta_t \approx 1/2000$, которая получается по всем наблюдениям. Итак, если нужно оценить порядок возможных колебаний курса акций за небольшое время (порядка нескольких дней, а эксперименты с одним конкретным рынком показывают, что и за время порядка нескольких десятков дней), то надо пользоваться понятием волатильности и ее оценкой по какому-то числу прошлых наблюдений. Колебания цен за большое время при точном действии модели геометрического броуновского движения должны были бы (в основном) определяться значением параметра сноса a. Но на самом деле никакого постоянного значения сноса не существует, а в экономические тренды и циклы можно вдаваться лишь с очень большой осторожностью.

Модель геометрического броуновского движения приносит и представление о нормальном распределении приращений логарифмов цен. На рис.5 представлены в нормальном масштабе (при $h = 1$ день) эмпирические функции распределения этих приращений. Заметим, что существуют несколько различные способы рисования подобных графиков. В точном смысле эмпирическая функция распределения - это ступенчатая функция. Но изображаются обычно лишь середины ее ступенек. Нормальный масштаб — это такой переменный масштаб по оси ординат, в котором нормальная функция распределения изображается прямой линией. Но оцифровка оси ординат может делаться (как на рис.5) не в значениях вероятностей, а в значениях квантилей нормального закона, отвечающих этим вероятностям (например, число (-3) на оси ординат на самом деле изображает вероятность 0.00135 и т. д.) При большом числе наблюдений график, естественно, огрубляется в соответствии с возможностями компьютерной графики.

Что же мы узнаем из рис.5? Графики эмпирических функций сходны с прямыми линиями вплоть до значений квантилей от (-2) до (+2). Это означает, что примерно 95% наблюдений, в общем, охватываются нормальным законом. Правда, в нуле оба графика имеют ступеньку, которая возникает из-за того, что среди наблюденных данных слишком много значений, в точности равных нулю (это означает, что либо не было операций с акциями данной компании, либо что операции были, но цены закрытия, тем не менее, не изменились). Стандартное отклонение в случае нормального закона можно оценить и по чертежу (например, используя тот факт, что расстояние между абсциссами тех точек графика, которые имеют ординаты (+2) и (-2), составляет примерно 4 стандартных отклонения). Для I компании получаем 0.017, для II компании 0.026, что близко к вышеуказанным оценкам волатильности по сумме квадратов. (Это означает, что наблюдения, не укладывающиеся в нормальный закон, в данном случае мало влияют на сумму квадратов.)

Но хвосты распределений, конечно, не нормальные: вероятности больших (по абсолютной величине) наблюдений гораздо больше, чем соответствующие нормальные вероятности. Таким образом, возникает проблема: нельзя ли получше подобрать какое-то параметрическое семейство распределений, чтобы все наблюдения (или хотя бы еще большая их часть, чем в случае нормального закона) описывались бы этим семейством.

Эта проблема упирается в глобальную проблему статистической однородности. Статистик всегда пытается установить те или иные правила отбора наблюдений, которые призваны привести к статистически однородной совокупности. Но что касается цен закрытия торгов, то в смысле отбора наблюдений некуда идти дальше, чем ограничиться акциями одной определенной компании за какой-то период времени, и тогда вероятностные свойства должны быть одинаковы за любой интервал в пределах данного периода. На рис. 6 и 7 даны эмпирические функции распределения для приращений логарифмов цен тех же акций, но с разбивкой эмпирического материала пополам: первая и вторая тысяча наблюдений. Для I компании две эмпирические функции практически совпадают в пределах квантилей от (-2.3) до (+2), а для второй компании совпадение гораздо хуже: примерно от (-1.8) до (+1). Не значит ли это, что приближение нормальным законом практически выбирает все, что есть статистически устойчивого в наблюдениях? Переформулируем этот вопрос в терминах прогноза, практическая важность которого достаточно ясна. Допустим, что мы собираемся застраховать коммерческие потери участников фьючерсного рынка, для которых резкое изменение (чаще резким бывает падение) цены основного актива в течение суток может повлечь большие потери. Чтобы сосчитать, сколько может стоить подобная страховка, нужно примерно знать вероятность наступления страхового случая. И вот, в тот момент, когда нам известна лишь первая тысяча наблюдений, мы пытаемся оценить такую вероятность для второй тысячи. Из рис. 6 и 7 совершенно ясно, что такой прогноз идеальным не будет. Теперь постановка вопроса о выборе параметрического семейства выглядит так: можно ли путем анализа фактических данных показать, что некоторое семейство распределений дает более точный прогноз вероятности будущих страховых случаев, чем нормальное? Или, может быть, статистическая неоднородность динамики цен во времени в равной мере обесценивает расчет по любому параметрическому семейству?

Чтобы понять, о цифрах какого порядка может идти речь, сделаем грубо прикидочные страховые расчеты, не используя никакого параметрического семейства, а прямо по рис. 6 и 7. Мы не будем вдаваться в величину страхового возмещения (это слишком зависит от тех конкретных условий договора страхования, которые могут дать нечто жизнеспособное на страховом рынке), а прикинем лишь вероятность наступления страхового случая. Маржа (т.е. залог) на фьючерсном рынке может составлять, скажем, 5% от цены основного актива. Это значит, что игрок, вложивший определенный капитал в покупку фьючерсов на поставку акции, лишается его полностью, если акции упадут на 5%. Такое падение за один день явно нужно считать страховым случаем. Нужно, следовательно, оценить по рис. 6 и 7 значение функции распределения в точке (-0.05). Не следует полностью забывать об особенностях компьютерной графики (середины скачков эмпирической функции распределения соединены прямыми линиями), но в окрестности точки (-0.05) это мало искажает эмпирическую функцию. Поэтому просто измеряем по чертежу и получаем следующее.

На рис. 6 для первой тысячи наблюдений (сплошная линия) значение ординаты равно (-2.44). Это квантиль нормального закона, которой соответствует вероятность 0.0075 (из таблицы нормального закона). Для второй тысячи (пунктир) квантиль равна (-2.70), а вероятность 0.0035, т.е. вдвое меньше, чем ее оценка по первой тысяче. Для второй компании (рис. 7) положение более благополучное: получаем, соответственно, вероятности 0.029 и 0.021, которые отличаются менее резко. Из этих чисел мы видим, что вероятности страхового случая многократно увеличиваются с увеличением волатильности (ср. рис. 4), а стало быть, страховщик фьючерсных спекуляций (если такой найдется) должен знать, что такое волатильность. Кроме того, ясно, что оценка подобных вероятностей даже по 1000 наблюдений (а это четыре года), мало надежна, если считать прямо по эмпирическим функциям распределения, не используя никакого параметрического семейства. Следовательно, страховщик должен с удовольствием заплатить за подбор удачного семейства, если, конечно, будет на фактическом материале доказано, что с помощью него хвосты будущих распределений оцениваются более точно, чем без него. Пока что ничего такого финансовой статистике не известно.

В заключение данного пункта заметим, что если задача состоит лишь в том, чтобы формально установить неадекватность модели геометрического броуновского движения, то нет ничего проще. Имеется множество критериев для проверки статистической однородности наблюдений. Например, можно разбить длинный ряд цен закрытия (скажем, 2000 наблюдений) на последовательные отрезки умеренной длины (скажем, по 100 наблюдений) и применить тот или иной критерий равенства дисперсий (например, критерий Бартлетта — он есть в любом сборнике статистических таблиц). Такой эксперимент безотказно отвергает гипотезу однородности (т.е. равенства теоретических дисперсий для всех групп по 100 наблюдений) на любом разумном уровне значимости. Те отклонения кривых накопленных квадратов волатильности от прямолинейности, которые видны на рис. 4, оказываются высоко статистически значимыми. Вопрос состоит в том, для чего эта явно неадекватная модель (геометрического броуновского движения) все же практически годится (и в какой степени). На этот вопрос мы и будем отвечать в дальнейшем.

0.4 Вероятностный подход к описанию динамики цен и простейшая спекуляция

Что вообще можно делать практически с данными о динамике цен акций? Сразу возникает мысль о простейшей спекуляции, которая заключается в том, чтобы подешевле купить и подороже продать: нужно только угадать подходящие моменты. Есть такая довольно популярная наука - технический анализ, которая занимается гаданием по так называемым бар-диаграммам. Принципиально бар - диаграмма это то же самое, что и графики типа рис.1 и 2, но информация там представляется несколько более полно. По оси абсцисс рисуется (как и на рис. 1 и 2) номер дня торгов, а над каждым днем рисуется не одна точка, а вертикальная черта (бар), нижняя точка которой изображает минимальную цену сделки за данный день, а верхняя - максимальную. Еще маленькими горизонтальными черточками, примыкающими к вертикальной, показывается цена открытия и закрытия торгов. (Эти цены, естественно, заключены между минимальной и максимальной.) Якобы, на таких картинках можно усмотреть некие типичные фигуры («волны Эллиотта» и другие), которые позволяют прогнозировать будущий ход цен, хоть и не наверное, но с некоторой приличной вероятностью. В общем, простейшая спекуляция (с техническим анализом или без него) представляет собой типичную разновидность азартной игры — в том смысле, что исход каждой отдельной спекуляции заранее не предопределен. Впрочем, для того, чтобы обогатиться, вполне достаточно угадать направление будущего изменения цен с вероятностью, чуть большей половины (если в самом деле обладать таким даром, то не обязательно и играть на бирже: можно просто продавать прогнозы, как, по слухам, и делают некоторые научные группы).

Каково вообще отношение специалистов по теории вероятностей к азартным играм? Стараются думать о них как об экспериментах, обладающих статистической устойчивостью, т.е. допускающих вероятностное описание, и пытаются вычислить математическое ожидание дохода игрока. Если оно отрицательное или даже нулевое, игра считается разорительной для игрока и надувательством со стороны владельца игорного заведения. Нет серьезных сомнений в том, что такова рулетка. Что же, ознакомившись с этим классическим выводом теории вероятностей, люди перестали играть в рулетку? Отнюдь нет.

В Советском Союзе длительное время существовала государственная игра «Спортлото», о которой официально было объявлено, что математическое ожидание дохода равно минус половине вложенной суммы. И что же — играли, и вкладываемые суммы были неправдоподобно огромны. Видимо, само участие в азартной игре для достаточно многих людей обладает большой привлекательностью, составляет род удовольствия, за которое не жалко заплатить.

Что касается акций, то исследования за большие промежутки времени показывают, что тут вполне возможны такие стратегии, которые обеспечивают нечто вроде положительного математического ожидания дохода. Например, стратегия «buy and hold» — «купи и держи», когда купленные акции удерживаются в течение длительного времени (десятки лет). Если, в особенности, вкладываемые деньги диверсифицировать между многими акциями (по-просту отнести их в какой-нибудь фонд взаимных вложений, который и займется диверсификацией), то вполне вероятно, что в среднем за много лет они принесут больший доход, чем при вложении денег в банк или безрисковые бумаги. Но и доход не особенно велик, и азарт пропадает, в общем, спекулянту этого мало и скучно, и он обращается к краткосрочным спекуляциям.

Отношение к краткосрочным спекуляциям у специалистов по теории вероятностей настороженное. Модели типа геометрического броуновского движения, когда логарифм цены акции имеет независимые (а следовательно, принципиально непредсказуемые) приращения, ни к каким спекуляциям не стимулируют. Сравнительная устойчивость вероятностных законов для приращений достигается путем исключения всякого рода трендов, что исключает мысль о долгосрочном прогнозе. Впрочем, такие модели могут пониматься как некое нулевое приближение, допускающее дальнейшие уточнения, которые делают возможными прогнозы. Действительно, эксперименты показывают, что во многих случаях можно обнаружить некоторые зависимости в распределениях приращений, которые создают возможности для простейшей спекуляции. Например, нередко бывает так, что наметившаяся в течение биржевой сессии динамика цены актива захватывает и начало следующей сессии. В отличие от технического анализа, который предлагает зрительно заметить некую типичную картинку, здесь динамика актива определяется алгоритмически, например, в виде наклона прямой, аппроксимирующей фактические цены по методу наименьших квадратов. Если этот наклон положителен, то можно думать, что следующая сессия откроется с более высокой цены, чем цена закрытия предыдущей сессии. Значит, надо в конце сессии купить, а в начале следующей продать. Что значит «в начале» или «в конце», тоже нужно определить алгоритмически, и тогда стратегию можно будет испытать по прошлым данным. Нередко такие испытания дают успех.

Но вероятностные закономерности могут быть лишь локальными — действующими на небольшое время вперед. За малое время цена актива обычно изменяется лишь незначительно, а следовательно, доход от каждой отдельной спекуляции невелик. Вокруг биржевых игроков кормится масса народу, начиная от персонала биржи (без которого вообще невозможны торги, а тем более электронные) и кончая разными финансовыми аналитиками. Все они стараются брать за свои услуги плату в таких размерах, в каких позволяет рынок этих услуг. Поскольку, как показывает многовековой опыт, люди готовы играть в азартные игры и при отрицательном математическом ожидании выигрыша, на рынке услуг создается возможность брать довольно высокую цену. Таким образом, теоретически положительное математическое ожидание выигрыша может вполне превратиться в отрицательное за счет разнообразных «операционных расходов». Кроме того, те особенности в динамике цен, которые создают возможность прогнозов вероятностными методами, могут неожиданно исчезать по непонятным причинам. Вывод состоит в том, что хотя попытки простейшей спекуляции на основе вероятностных методов априори нельзя объявить безнадежными, все же это дело не дает устойчивых положительных результатов, и для демонстрации определенного результата нужно обратиться к иной постановке задачи. Таковы операции с опционами, к которым мы и переходим.

0.5 Опционы и их хеджирование

Ценные бумаги несколько условно делятся на основные и производные. Например, акции коммерческих компаний считаются основными ценными бумагами, поскольку теоретически они дают право на часть реальной собственности той или иной компании. Правда, если дело дойдет до ликвидации компании, то сначала полагается удовлетворить всех кредиторов, а акционеры будут делить между собой то, что останется после кредиторов (вряд ли много они получат: иначе незачем было бы ликвидировать компанию). Кроме основных, обращаются так называемые производные ценные бумаги, которые так или иначе привязываются к основным ценным бумагам и спекуляциям с ними. Например, это может быть так называемый фьючерсный контракт на поставку в некий будущий момент акций определенной компании по заранее оговоренной цене. Благодаря хитроумной системе взимания и ежедневного перерасчета залогов, вносимых участниками такого контракта, биржа имеет возможность гарантировать его выполнение (если, конечно, не случится какого-нибудь кризиса). С другой стороны, капиталы участников фьючерсных спекуляций вкладываются в залоги, и при резких колебаниях цены основного актива есть риск эти капиталы потерять.

Нас будет интересовать другой контракт - так называемый опцион. Как и фьючерсный контракт, опцион имеет в виду совершение в будущем некоторой сделки по заранее оговоренной цене, но (в отличие от фьючерсного контракта) одна из сторон, именно, покупатель опциона (инвестор) имеет право отказаться от сделки (если в будущем цена основного актива на рынке окажется такой, что сделка по заранее оговоренной цене невыгодна). Зато в момент заключения контракта инвестор уплачивает другой стороне (эмитенту опциона, по-английски option writer) некоторую сумму, называемую ценой опциона.

Опционы бывают очень разнообразными. Можно купить опцион, который дает право покупки акции в будущем по заранее оговоренной цене (опцион купли, или call), а можно купить опцион на право продажи (опцион продажи, или put). Может быть опцион, который эквивалентен покупке (продаже) по наилучшей рыночной цене, которая сложится в течение определенного будущего отрезка времени (либо по средней цене и т. д.). Может быть опцион, который можно исполнять лишь в какой-то определенный момент времени (европейский опцион), а можно условиться, что опцион может исполняться в любой момент до определенного срока (американский опцион). Способы употребления опционов в рыночной игре тоже весьма разнообразны: они могут быть средством спекуляции, либо средством страховки от резких колебаний рынка и т. д. Мы для определенности будем рассматривать один простейший случай — так называемый стандартный европейский опцион-колл. Условия этого контракта состоят в следующем.

Эмитент (продавец) опциона обязывается в некоторый будущий момент времени $t = T$ продать инвестору (покупателю опциона) акцию определенной компании по оговоренной цене K. За это инвестор уплачивает эмитенту определенную сумму c, называемую ценой опциона. Когда наступит момент $t = T$, акция на рынке будет иметь некоторую цену S_T. Если $S_T > K$, то инвестор воспользуется своим правом и купит акцию по цене K, а если $S_T \leq K$, то исполнять опцион невыгодно, он просто теряет свою силу, и цена опциона c для инвестора потеряна. В первом случае (когда опцион исполняется) инвестор может дальше поступить двояко. Если его целью было приобретение акции, то он просто радуется тому, что акцию удалось купить дешевле, чем она стоит на рынке. Опцион выступает как средство страховки, потому что в будущий момент времени T владелец опциона заведомо может купить акцию по цене не выше K. Но если целью инвестора является спекуляция, то он тут же продает по цене S_T акцию, доставшуюся ему по цене K. Это эквивалентно получению дохода $(S_T - K)_+ = max(S_T - K, 0)$. Обычный сценарий финансовой математики не вдается в количественную оценку пользы страхования, а рассматривает лишь спекулятивный вариант получения дохода от опциона. Зато доход можно рассматривать достаточно общего вида — не только функцию $(S_T - K)_+$, но и произвольную функцию вида $f(S_T)$, а в более изощренных вариантах теории и функцию от всей динамики цен $f(S_0, S_1, \cdots, S_T)$. В частности, на практике нередко встречается так называемый «опцион со шляпой», для которого функция выплат равна $min\{(S_T - K)_+, L\}$, где L — некоторое заранее оговоренное число (максимально возможная выплата по опциону). В спекулятивном варианте сценарий действий покупателя опциона сводится к уплате в момент $t = 0$ цены опциона c и к получению в момент $t = T$ оговоренной в контракте выплаты. Точнее говоря, будущий доход принято дисконтировать, т.е., например, для стандартного европейского опциона-колл рассматривать величину

$$\exp(-rT)(S_T - K)_+,$$

где r — некоторое известное значение «банковского процента», которое предполагается неизменным на период действия опциона. Впрочем, для уяснения смысла игры на опционах можно пока считать, что $r = 0$, поскольку при обычных сроках действия опциона (несколько недель или месяцев) влияние дисконтирования невелико.

Почему игра на опционах может быть привлекательна для спекулянта? Рассмотрим очень часто встречающийся случай $K = S_0$. Спекулянт может вложить свои деньги прямо в акции, купив в момент $t = 0$ одну акцию по цене S_0, рассчитывая в какой-то будущий момент времени $t = T$ получить доход $(S_T - S_0)_+$ путем продажи этой акции. При покупке опциона он получит тот же самый доход, но на практике цена опциона c

оказывается гораздо более низкой, чем цена акции (в типичных условиях что-то порядка 10% от S_0). Таким образом, один и тот же доход можно получить при покупке опциона за счет намного меньшего вложения капитала, чем при игре на акциях. (Зато акцию не обязательно продавать именно в момент $t = T$: можно в случае чего и подождать в надежде, что цена акции поднимется, а опцион после момента $t = T$ становится пустой бумажкой.) Говорят, что опцион является (для его покупателя) финансовым рычагом. Вообще, использование производных финансовых инструментов (опционов, фьючерсов и т.д.) резко повышает азартность спекуляций, и в том, отчасти, их смысл. (Другая часть смысла в том, что они могут применяться и для целей страховки от неожиданных колебаний рынка.) Но теперь самое время разобраться, чему может равняться цена опциона и почему, в частности, при $K = S_0$ цена опциона может быть значительно ниже цены акции.

Впервые с математической точки зрения вопрос о цене опциона рассмотрел век назад Башелье. В современном нам теоретическом сценарии игры на опционах эмитент опциона хеджирует свое обязательство (о хеджировании см. ниже), но в том сценарии, который рассматривал Башелье, о хеджировании нет речи. Эмитент просто получает с покупателя начальную стоимость опциона c и далее не делает ничего вплоть до момента расплаты $t = T$, когда ему нужно выложить из своего кармана выплату $(S_T - K)_+$ (дисконтирование у Башелье также не учитывается). Возникает типичная азартная игра двух игроков, в которой в качестве генератора случая выступают колебания цен на рынке. На такую игру специалисты по теории вероятностей всегда смотрели так, что хорошо бы ей быть безобидной (хотя безобидная игра и является за большое время разорительной для того игрока, у которого невелик начальный капитал). Условие безобидности испокон века записывается в виде

$$c = \mathbf{E}(S_T - K)_+. \tag{8}$$

Вопрос состоит лишь в том, как вычислить математическое ожидание, стоящее в правой части соотношения (8). Для этого нужна вероятностная модель динамики цен акций. Исследованием вопроса о модели и занялся Башелье. Надо сказать, что его подход сохраняет практическое значение до настоящего времени, особенно при исследовании того, что может случиться с рыночными ценами за небольшое время (порядка нескольких дней).

Башелье стал исследовать приращения

$$\Delta_h S_t = S_{t+h} - S_t \tag{9}$$

самих рыночных цен (а не их логарифмов: логарифмы вошли в употребление лишь примерно с середины двадцатого века). Подобно тому, как выше говорилось о логарифмах, медленные экономические тренды он при этом потерял и не обнаружил заметно отличного от нуля математического ожидания $\mathbf{E}\Delta_h S_t$, но нашел, что

$$\mathbf{E}(\Delta_h S_t)^2 \approx h\sigma_0^2, \tag{10}$$

где постоянная (т.е. не зависящая от t и h) величина σ_0 должна быть названа волатильностью по Башелье (это волатильность самих цен, а не их логарифмов). Выясним приблизительную связь между волатильностью σ_0 по Башелье и принятой в настоящее время волатильностью σ для логарифмов.

Пусть курс акций совершает за небольшое время небольшие колебания вокруг некоторого приближенного значения S: $S_t \approx S$. Напишем приближенное равенство

$$\Delta_h \ln S_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t = \ln(S_{t+h}/S_t) =$$

$$= \ln(1 + \Delta_h S_t/S_t) \approx \Delta_h S_t/S_t,$$

если, конечно, $\Delta_h S_t$ мало по сравнению с S_t, что обычно и бывает при h порядка одного или нескольких дней. Следовательно, волатильность σ_0 по Башелье связана с принятой в настоящее время волатильностью σ для логарифмов приближенным соотношением

$$\sigma_0 \approx S\sigma,$$

где $S \approx S_t$ — примерное значение курса акций.

Предполагая нормальность распределения и независимость приращений (9), получим модель броуновского движения для курса акций, из которой и вычисляется правая часть (8).

Однако (как говорилось выше в применении к логарифмам курса) не следует переоценивать надежность того вывода, что $\mathbf{E}\Delta_h S_t = 0$. (Либо надежность той или иной не равной нулю оценки величины сноса по фактическим данным.) Допустим, что в начальный момент $t = 0$ эмитент опциона просто получает с покупателя цену опциона c и в дальнейшем не делает ничего. Тогда в момент расплаты $t = T$, если все-таки придется исполнять опцион (т.е. в случае, когда $S_T > K$) эмитенту придется купить подлежащую поставке акцию по ее рыночной цене S_T, что эквивалентно тому, чтобы выложить сумму $(S_T - K)_+$ из собственного кармана. Если экономическая ситуация (которая не может быть предсказана какой-либо вероятностной моделью) на самом деле окажется такова, что за время действия опциона акции существенно вырастут в цене, то эмитенту придется заплатить значительно больше, чем он получил в начальный момент с покупателя опциона. Современная математическая наука об опционах предлагает эмитенту совершенно иной сценарий действий, чем это было во времена Башелье, смысл которого сводится к тому, что если покупатель опциона имеет право получить много денег за счет колебания рыночной стихии, то эти деньги будут выплачены не из кармана эмитента, а за счет рынка в целом. (Молчаливо предполагается, что и эмитент опциона, и его покупатель — это бесконечно малые величины в сравнении с рынком в целом.) Разница между моделями броуновского движения и геометрического броуновского движения в данном случае мало существенна, поскольку такой сценарий возможен в любой из этих моделей и различаются лишь математические детали.

Эта новизна заключается в идее, так сказать, «следящего» хеджирования обязательства по опциону (слежение происходит за курсом основного актива, т.е. в данном контексте — акций). Теоретический сценарий следующий. Получив с покупателя в момент $t = 0$ некоторую сумму c, эмитент добавляет к ней еще некоторую сумму, взятую из собственных средств, и покупает определенную часть акции, которая в дальнейшем может подлежать поставке. (Формально предполагается, что акцию можно покупать любыми частями, но практически речь идет об одновременном хеджировании многих опционов на большое количество акций, так что можно забыть о том, что акции по природе дискретны.) Во все следующие моменты времени (вплоть до момента окончания срока действия опциона) процесс хеджирования продолжается. Качественно он сводится к тому, что при росте курса акции дополнительно докупается ее какая-то доля, а при падении - какая-то доля продается. При этом средства для дополнительной покупки берутся эмитентом со своего счета, а при продаже возвращаются назад на этот счет. Эти покупки и продажи сбалансированы таким образом, что в том случае, когда исполнять опцион нужно ($S_T > K$), у эмитента на руках в момент $t = T$ оказывается целая акция, а если опцион исполнять не нужно (т.е. $S_T < K$), то эмитент полностью продает акцию. Теоретически предсказывается следующее чудо.

Если начальную цену опциона и стратегию покупок и продаж в зависимости от колебаний курса акций выбрать правильно (в соответствии с некоторыми формулами, которые мы рассматриваем ниже), то при любой (возможной в модели) динамике курса акций за время от 0 до T эмитент не получит ни прибыли, ни убытка (после исполнения обязательства по опциону). Если угодно, уплаченная за опцион цена будет в точности равна расходам на осуществление хеджирования. (Качественно расходы на хеджирование объясняются тем, что при росте курса акция дополнительно покупается, а при падении - продается, так что, вообще говоря, получается так, что она дороже покупается, чем продается.)

Иными словами, математические рассмотрения, о которых речь ниже, приводят к предложению создать новый вариант игорного заведения для азартной игры, в которой генератором случайности являются будущие колебания курса акций. Игрок в данном случае — это покупатель опциона. Игорное заведение — это эмитент, а точнее — фирма, выпускающая на рынок опционы (фирма в данном случае понимается как организация профессионалов, так как практически лишь профессионалы могут осуществить следящее хеджирование). Игрок вносит необходимую сумму при покупке опциона, а фирма с помощью этой суммы предоставляет услуги по осуществлению хеджирования (и, конечно, берет за услуги какую-то дополнительную плату, которая в теории не рассматривается). Поскольку хеджирование всегда стоит одинаково (по крайней мере, в теории), то цена опциона является справедливой как с точки зрения фирмы, так и игрока. Игрок же рассчитывает на счастливый случай, который в данном случае состоит в значительном росте цены акций за время действия опциона и может как наступить, так и не наступить. Выигрыш выплачивается игроку (если выплачивается) не за счет эмитента, а за счет рыночной стихии. Получается нечто вроде извлечения энергии из практически неограниченных источников вроде ветра, морского или речного течения и т.д. Конечно, совсем без затрат и без риска такое извлечение невозможно: в данном случае вместо средств на постройку ветряной мельницы возникает цена опциона. При этом справедливая цена опциона с точки зрения оплаты хеджирования не обязательно является выгодной для покупателя с точки зрения его положительного дохода. Нашей ближайшей целью является математическое понимание и критическое сопоставление с фактическими данными вышеописанного чуда.

0.6 Некоторые понятия и математические обозначения.

Сейчас мы введем некоторые понятия и обозначения, с помощью которых в финансовой математике думают о различных вещах, в том числе о хеджировании опционов. Предполагается существование некоторой основной валюты (например, долларов) и по меньшей мере двух видов ценных бумаг — безрисковых (бон, государственных долговых обязательств) и рисковых (акций). Средства того или иного оператора финансового рынка предполагаются помещенными в эти два вида бумаг (а доллары существуют только для удобства перевода одних бумаг в другие). Считается, что в тех временных масштабах, с которыми мы будем иметь дело, цена (в долларах) единицы бон B_t растет по экспоненциальному закону

$$B_t = e^{rt}, B_0 = 1, \tag{11}$$

где r — детерминированная и известная процентная ставка, а t — момент времени, принимающий неотрицательные значения. Цена же акций S_t считается меняющейся довольно быстро и случайно — в соответствии с той или иной моделью случайного процесса. Само время t может считаться дискретным (например, меняющимся с шагом h, где h — один торговый день), или даже меняющимся непрерывно. Абстракцией непрерывного времени нужно пользоваться с определенной осторожностью, проверяя ее предельным переходом при $h \to 0$. Абстракция постоянной и заранее известной процентной ставки также требует определенной осторожности, но здесь мы будем ею пользоваться лишь в течение таких промежутков времени, которые имеют порядок времени существования опциона (обычно несколько месяцев) и от тех небольших возможных колебаний процентной ставки, которые могут случиться за такой срок, обычно мало что зависит. Считается, что активы (т.е. боны и акции) абсолютно ликвидны, т.е. в любой момент времени могут быть мгновенно обменены друг на друга в соответствии с их долларовыми ценами B_t и S_t (в частности, нет разницы между ценами покупки и продажи, нет операционных расходов и т.д.).

Оператор финансового рынка (в частности, хеджер, т.е. эмитент опциона, который хеджирует свое обязательство) имеет в каждый момент t портфель ценных бумаг (β_t, γ_t), состоящий из β_t бон и γ_t акций. Его суммарный капитал (в долларах) есть, очевидно,

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t. \tag{12}$$

Важным понятием является понятие *самофинансируемого портфеля*, которое отражает ту ситуацию, когда у оператора рынка нет никаких внешних источников доходов или расходов, и единственное, чем он может заниматься, это перемещение средств из бон в акции и обратно. Запишем основные уравнения эволюции капитала в случае самофинансируемого портфеля для дискретного времени (момент t меняется на момент $t + h$).

Замечание. В математическом анализе с незапамятных времен утвердилось обозначение

$$\Delta f = \Delta_h f = f(t + h) - f(t). \tag{13}$$

Но в финансовой математике часто пишут

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-h}. \tag{14}$$

Мы не будем следовать обозначению (14), а будем понимать под ΔX_t разность $X_{t+h} - X_t$.

Итак, если капитал X_t в момент t выражается формулой (12), то каким будет капитал X_{t+h} в момент $t + h$? За время от t до $t + h$ капитал портфеля может измениться (в самофинансируемом случае) только за счет эволюции цен бон и акций. Иными словами,

$$X_{t+h} = \beta_t B_{t+h} + \gamma_t S_{t+h},$$

а следовательно,

$$\Delta X_t = X_{t+h} - X_t = \beta_t \Delta B_t + \gamma_t \Delta S_t. \tag{15}$$

Кроме изменения капитала за счет эволюции цен активов, оператор может по своему желанию изменить в момент $t+h$ состав портфеля, но без изменения суммарного капитала, а лишь перераспределяя капитал между бонами и акциями: если в момент $t+h$ происходит перераспределение средств между активами, то должно соблюдаться равенство

$$X_{t+h} = \beta_t B_{t+h} + \gamma_t S_{t+h} = \beta_{t+h} B_{t+h} + \gamma_{t+h} S_{t+h}. \tag{16}$$

Из (16) получаем

$$\Delta\beta_t = \beta_{t+h} - \beta_t = -\Delta\gamma_t S_{t+h}/B_{t+h}. \tag{17}$$

Равенство (17) означает, что в момент $t+h$ количество бон $\Delta\beta_t$ было израсходовано на приобретение дополнительного количества $\Delta\gamma_t$ акций по цене S_{t+h}.

Если постулировать, что в любой момент времени t (в том числе и в момент $t+h$) капитал портфеля выражается формулой (12), то любое из равенств (15), (16) или (17) может быть принято за определение самофинансируемого портфеля. В случае дискретного времени все эти равенства тривиальны и не выходят за пределы обычного здравого смысла. Их роль заключается в том, что они позволяют совершить предельный переход к случаю непрерывного времени, в частности, определить, что такое самофинансируемый портфель при непрерывном во времени перетекании средств из бон в акции и обратно. (Только в варианте непрерывного времени верно, что при правильном хеджировании хеджер с вероятностью 1 остается в конце концов с нулевым приращением капитала.) Для читателей, знакомых со стохастическими дифференциалами, заметим, что такое определение самофинансируемости производится путем замены приращений на стохастические дифференциалы, и это правильно в конструкции предельного перехода от дискретного времени к непрерывному. Но нам нет нужды вдаваться в подробности техники стохастических уравнений, так как наша задача иная. Мы хотим составить себе представление о том, насколько хорошо выполняются выводы теории при хеджировании с разумно малым, но конечным шагом по времени. Сами формулы мы получим на уровне некоторых эвристических соображений.

0.7 Цена опциона и хеджирование обязательства в теории Блэка-Шоулса-Мертона.

Вспомним, что речь идет о применении методов математической физики к финансовым проблемам. В данном пункте мы демонстрируем весьма типичную ситуацию для математической физики. Некоторая задача (в данном случае — задача определения цены опциона и стратегии хеджирования) решается на основании заведомо неадекватной модели явления (геометрическое броуновское движение для динамики цен акций) и каких-то дополнительных соображений, которые силы математического доказательства не имеют и могут быть признаны лишь эвристическими. Но в результате получаются формулы (они были впервые получены авторами, указанными в заглавии пункта в 1973 г.). А в математической физике известно, что в случае удачи формулы бывают умнее тех соображений, из которых они получены (Генрих Герц говорил, что формулы умнее их авторов

— применительно к электродинамике Максвелла). Убедиться в том, что в данном случае идет речь о подобной удаче, можно разными путями — отчасти теоретически (выписывая некоторые другие формулы), отчасти экспериментально, проверяя точность действия формул на реальных ценах акций. Но сначала выведем сами формулы.

Хотя речь все время идет о стоимости хеджирования обязательства по опциону, но начнем мы с попытки расчета цены опциона с точки зрения математического ожидания будущего дохода его покупателя, т.е. принципиально — с той же формулы (8), которой пользовался еще Башелье. Только на этот раз учтем дисконтирование будущего дохода. (Дело в том, что модель геометрического броуновского движения прекрасно согласуется с древними представлениями о дисконтировании с помощью известного банковского процента, чего нельзя сказать о модели просто броуновского движения, которой пользовался Башелье.) Итак, принимаем для динамики курса акций модель следующего вида:

$$\Delta_h \ln S_t = \ln(S_{t+h}/S_t) = ah + \sigma(w(t+h) - w(t)), \tag{18}$$

где a и σ — некоторые константы, $w(t)$ — винеровский процесс. Волатильность σ сравнительно надежно оценивается по фактическим данным. Будем считать ее известной точно. Коэффициент сноса a, наоборот, сколько-нибудь устойчиво по фактическим данным не оценивается. Каким же его принять?

Казалось бы, разумно принять снос равным нулю, поскольку при его оценках получаются близкие к нулю числа. Ан нет: нужно поступить несколько хитрее. Соотношение (18) означает, что

$$S_{t+h} = S_t \exp \xi,$$

где ξ — нормальная случайная величина со средним ah и стандартным отклонением $\sigma\sqrt{h}$, не зависящая от S_t. Простое вычисление показывает, что

$$\mathbf{E}S_{t+h} = \mathbf{E}S_t \exp(a + \sigma^2/2)h. \tag{19}$$

Равенство (19) означает, что среднее значение курса акций растет со временем экспоненциально с коэффициентом $a + \sigma^2/2$. С другой стороны, единица бон растет в цене экспоненциально с коэффициентом r. Если бы одни ценные бумаги росли в среднем скорее, чем другие, то операторы финансового рынка это в конце концов бы поняли и стали бы вкладывать деньги только в те бумаги, которые растут быстрее. Рынок с двумя активами превратился бы в рынок с одним активом. Поэтому разумно принять, что средние скорости роста акций и бон должны быть одинаковы и мы получаем важное для дальнейшего равенство

$$r = a + \sigma^2/2. \tag{20}$$

Этим равенством и нужно воспользоваться, чтобы как-то определить неизвестный коэффициент сноса a.

Конечно, использованный нами аргумент представляется чисто схоластическим. На самом деле, если и можно говорить о каком-то коэффициенте сноса для логарифмов цен акций, то он во всяком случае является переменным во времени и неизвестным по этой причине для операторов рынка. Они бы и рады выбрать на будущее время актив с большей в среднем скоростью роста, но не имеют способа это сделать. (Например, в 70-х годах двадцатого века американские безрисковые бумаги в самом деле росли в среднем быстрее, чем акции, но выяснить это удалось только апостериори.) Но подобными аргументами полна математическая физика.

Равенство (20) можно переписать в виде

$$\mathbf{E}((S_{t+h}/B_{t+h}) \mid S_t) = S_t/B_t, \tag{21}$$

что означает, что *дисконтированные цены акций образуют мартингал.* По этой причине соответствующие меры на траекториях случайного процесса S_t принято называть мартингальными. Таким образом, выражение для цены опциона мы получим как математическое ожидание некоторой величины по мартингальной мере.

Итак, рассмотрим стандартный опцион-колл с ценой исполнения K и моментом исполнения T. Чему равна его цена $v(t, S_t)$ в момент $t, 0 \leq t \leq T$, если акции в этот момент стоят S_t ?

Покупатель собирается получить доход $(S_T - K)_+$ через время $T - t$. Дисконтируем поэтому доход множителем $\exp(-r(T-t))$ и постулируем равенство

$$v(t, S_t) = \mathbf{E}\{(S_T - K)_+ \exp(-r(T-t)) \mid S_t\}.$$

Вопрос состоит лишь в том, чтобы вычислить правую часть последнего равенства.

С этой целью заметим, что $S_T = S_t \exp \eta$, где η — нормальная случайная величина с параметрами $a(T-t), \sigma\sqrt{T-t}$. Обозначим ее плотность распределения через $p(x)$. Тогда, в силу известного правила о вычислении математического ожидания случайной величины, получаем

$$v(t, S_t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (S_t e^y - K)_+ p(y) dy = \int\limits_{\ln(K/S_t)}^{\infty} (S_t e^y - K) p(y) dy. \tag{22}$$

Непосредственное вычисление по формуле (22), в которую вместо $p(y)$ подставлена нормальная плотность с указанными выше параметрами (причем a определено из соотношения (20)), дает следующий результат.

Введем два выражения $x_\pm(t)$ формулой

$$x_\pm(t) = \frac{\ln(S_t/K}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\frac{r}{\sigma} \pm \frac{\sigma}{2}\right).$$

Тогда

$$v(t, S_t) = S_t \Phi(x_+(t)) - \frac{K}{B_T} \Phi(x_-(t)) B_t, \tag{23}$$

где Φ — функция Лапласа.

Формула (23) представляет собой знаменитое выражение для цены опциона по Блэку-Шоулсу-Мертону. Формально мы рассуждали с точки зрения математического ожидания дохода покупателя, воспользовавшись, впрочем, предположением (20) мартингальности меры. Поскольку параметр a исключен с помощью выражения (20), полученный ответ, естественно, не зависит от a. Однако, если бы оказалось, что на самом деле более правильным было бы какое-то другое значение a, то это повлияло бы существенно на цену опциона с точки зрения покупателя (ясно, что чем больше a, при постоянном σ, тем выгоднее опцион для покупателя). Тем более удивительно то обстоятельство, что цена хеджирования опциона вовсе не зависит от a и определяется выражением (23) независимо от того, верно или неверно предположение мартингальности (20) (все это, конечно, в рамках модели геометрического броуновского движения и хеджирования в непрерывном времени). Качественно причина этого состоит в том, что при любом a колебания логарифма цены акций, связанные со сносом, имеют порядок ah, где h — малый шаг по времени, а колебания, связанные с диффузией имеют порядок $\sigma\sqrt{h}$, т.е. существенно больше, чем колебания, связанные со сносом. Но прежде чем обосновывать эти утверждения, выведем сами формулы для стратегии хеджирования, демонстрируя опять эффективность эвристических соображений, казалось бы, вполне наивных.

Какую долю акции должен иметь хеджер в момент t? Хеджер стремится (по возможности) избавиться от неопределенности, связанной с колебаниями курса рискового актива, т.е. акций. В его портфеле имеется (-1) опцион, поскольку он его продал. Наверно, в портфеле хеджера должно быть такое количество акций, чтобы капитал портфеля был возможно более стабильным, а это значит, что колебания стоимости акций в портфеле должны компенсироваться колебаниями стоимости опциона (а для последней у нас есть выражение (23)). Иначе говоря, хеджеру предлагается иметь так называемый δ-нейтральный портфель, количество акций в котором $\gamma_t = \gamma_t^*$ дается формулой

$$\gamma_t^* = \partial v(t, S_t)/\partial S_t.$$

Вычисляя с помощью формулы (23), мы должны дифференцировать по S_t два раза: S_t входит в (23) в качестве множителя у первого слагаемого, а также под знак фукции Лапласа Φ через величины $x_+(t)$ и $x_-(t)$. Поэтому в процессе дифференцирования возникнет производная функции Лапласа — плотность стандартного нормального закона ϕ. Оказывается, имеет место тождество

$$\frac{S_t}{K}\phi(x_+(t)) = \frac{B_t}{B_T}\phi(x_-(t)), \tag{24}$$

проверить которое можно непосредственно, используя явное выражение для $\phi(x)$. С учетом тождества (24) получается, что результаты дифференцирования по S_t, входящему под знак функции Φ, дают в сумме нуль, и окончательно

$$\gamma_t^* = \Phi(x_+(t)). \tag{25}$$

Сопоставление общей формулы (12) для капитала (в данном случае — капитала хеджера), формулы (23) для цены опциона и формулы (25) для количества акций в портфеле хеджера наводит на мысль, что, возможно, цена опциона (23) на самом деле при любом t равна капиталу хеджера. И в этой теории это действительно верно, при условии, что это верно в начальный момент $t = 0$. Впрочем, при $t = 0$ этого легко добиться, положив, чтобы начальная цена опциона c равнялась $v(0, S_0)$, иными словами

$$c = S_0\Phi(x_+(0)) - \frac{K}{B_T}\Phi(x_-(0)). \tag{26}$$

В самом деле, получив с покупателя опциона в момент $t = 0$ цену опциона (26) и следуя стратегии (25), хеджер должен будет в этот момент купить долю акции, равную $\Phi(x_+(0))$.

Для этого ему придется занять (скорее всего, со своего собственного счета в бонах) сумму, равную как раз второму слагаемому формулы (26). Другими словами, если через β_t^* обозначить капитал хеджера в момент t, то автоматически выполняется соотношение

$$\beta_0^* = -\frac{K}{B_T}\Phi(x_-(0)).$$

Можно доказать, что формулы (26) для начальной цены опциона, (23) для цены опциона в момент t и (25) для стратегии хеджирования образуют некое гармоническое единство. Именно, если обозначить

$$\gamma_t^* = \Phi(x_+(t)), \beta_t^* = -\frac{K}{B_T}\Phi(x_-(t)), \tag{27}$$

то капитал

$$X_t = \gamma_t^* S_t + \beta_t^* B_t = v(t, S_t) \tag{28}$$

будет капиталом некоторой самофинансируемой стратегии с начальным капиталом (26). Это означает, что капитал хеджера, который занимается лишь перераспределением капитала между акциями и бонами, в каждый момент будет в точности равен цене опциона. Например, если покупателю опциона надоест эта бумага и он не захочет дожидаться момента исполнения T, то он может в момент t вернуть опцион эмитенту, получив за него столько, сколько он стоит в момент t, т.е $v(t, S_t)$. При этом хеджер окажется с нулевым капиталом. Или можно самофинансируемость портфеля понимать так, что хеджер, придерживающийся стратегии (25) для числа акций в портфеле, всегда будет иметь долг в бонах, в точности равный β_t^*.

Как же можно доказать самофинансируемость? Дело в том, что это утверждение, которое является центральным, в том смысле, что благодаря ему сводятся концы с концами в теории хеджирования, верно лишь в случае непрерывного хеджирования. Но само непрерывное хеджирование требует определения самофинансируемости в терминах стохастических дифференциалов: именно портфель $X_t = (\beta_t, \gamma_t)$ называется самофинансируемым, если выполняется соотношение в стохастических дифференциалах

$$dX_t = \gamma_t dS_t + \beta_t dB_t.$$

Проверка этого соотношения применительно к портфелю (28) сводится к непосредственным вычислениям, которые выходят благодаря тождеству (24). (И она выходит при любом значении a, независимо от условия мартингальности меры (20).) Но для наших целей нет необходимости пользоваться техникой стохастических уравнений, поскольку хеджирование в непрерывном времени все равно практически нереализуемо, и вопрос, конечно, состоит в том, насколько точно выполняются выводы теории при разумно малом, но конечном временном шаге, с которым производится подправление портфеля хеджера. Исследованием этого вопроса мы займемся в следующем пункте. Здесь же мы обсудим в заключение некоторые варианты теоретического сценария игры на опционах.

Итак, начальный капитал эмитента и стратегия хеджирования не зависят от параметра сноса a модели геометрического броуновского движения, а математическое ожидание дохода покупателя опциона, разумеется, зависит. В теории рассматривается такой сценарий, при котором покупатель опциона хеджирует свои потери (беря в долг акцию частями и продавая ее) так успешно, что в конце концов оба (покупатель и продавец опциона) остаются с нулевым капиталом при любом значении параметра a. Такое теоретически возможно, но вряд ли представляет какой-либо практический интерес.

Кроме европейских опционов с фиксированным моментом исполнения $t = T$, часто встречаются американские опционы, которые можно предъявлять к исполнению в любой момент $t \leq T$, получая при этом доход $(S_t - K)_+$. Казалось бы, такая возможность для покупателя опциона создает дополнительные трудности для хеджера, но практически вряд ли следует этого опасаться. Дело в том, что при нормальных условиях на рынке (вне моментов кризиса) опционы вполне ликвидны, т.е. их можно достаточно быстро продавать. Продажная цена опциона не может быть меньше, чем те деньги, которые за него можно получить прямо сейчас (т.е. $(S_t - K)_+$.) Следовательно, выгодней продать опцион, чем предъявить его к исполнению, и хеджер может не беспокоиться о том, что опцион поменял владельца. Только в моменты биржевых кризисов, когда, допустим, остро нужны деньги немедленно, а опционы потеряли ликвидность, можно ожидать предъявления к исполнению американских опционов. Но кризисные явления вообще не могут быть охвачены стохастической финансовой математикой, которая так или иначе говорит о вероятностях, а следовательно, о статистической устойчивости.

На протяжении многих лет теоретики немало удивлялись тому, что реальные биржевые цены опционов не совпадают с ценами Блэка-Шоулса. Разницу пытались списывать на неточное знание будущей волатильности (мы уже видели, что волатильность не остается на самом деле строго постоянной). Возникло понятие имплицированной (или неявной) волатильности, которая получается путем приравнивания цены опциона (23) реальной цене и решения получившегося уравнения относительно волатильности. Если бы этот прием рассуждений приводил к удаче, то можно было бы определять по фактически наблюдаемым ценам опционов, какую именно волатильность ожидают в будущем операторы рынка. К сожалению, даже простейший стандартный опцион-колл имеет два параметра — срок исполнения T и страйк-цену K. По смыслу рассуждения, имплицированные волатильности не должны зависеть от этих параметров. На самом деле — зависят. Например, график зависимости имплицированных волатильностей от отношения K/S_t на вид напоминает улыбку (так называемая «улыбка волатильности»). Реальные цены, так сказать, смеются над усилиями теоретиков их объяснить. Но надо сказать, что основная масса сделок с опционами заключается незадолго до окончания срока их действия и для страйк-цен, близких к текущей цене актива. Понятно, что речь не идет об эмиссии таких опционов, а о том, что спекулянты продают друг другу ранее выпущенные опционы, которые оказались у них на руках. Проблема хеджирования и мартингальность мер совершенно не интересует таких спекулянтов: им бы нужно по возможности точно узнать математическое ожидание выплат, которые через несколько дней будут причитаться по этим опционам. Вот они и пытаются сделать это, прогнозируя, как умеют, динамику цен акций, и в соответствии с этим прогнозом определяя, за какую цену они хотят купить или продать опционы. Сведений об исследовании качества таких прогнозов мы не имеем.

0.8 Исследование дисбалансов при хеджировании опционов

Обратимся теперь к исследованию возможностей применения формул для цены и стратегии хеджирования опционов. Опять-таки, нужно остановиться на каком-то сценарии дискретного применения таких формул, которые обоснованы в непрерывном случае. Первое, что следует сделать, это определить значение волатильности σ, от которой все и зависит. Единственный сколько-нибудь объективный способ это сделать — воспользоваться оценкой волатильности по какому-то числу прошлых наблюдений цен акций данной компании. Выбор этого числа — дело специальных экспериментов. (А еще можно учитывать все прошлые наблюдения с какими-то весами: тогда мы столкнемся с проблемой выбора весов.) Допустим, что вопрос о выборе значения волатильности как-то решен.

В начальный момент времени $t = 0$ хеджер получает за опцион цену c Блэка- Шоулса и может сформировать свой портфель (β_0, γ_0) в соответствии с теоретическими предписаниями: $\beta_0 = \beta_0^*, \gamma_0 = \gamma_0^*$. Дальше нужно выбрать какой-то шаг по времени h и в моменты времени, разделенные этим шагом, как-то подправлять портфель. С учетом операционных расходов не рекомендуется поправлять портфель слишком часто, а скажем, один раз в день (по ценам закрытия) или один раз в неделю (т.е. в пять торговых дней). Теперь уже не получится так, что и количество бон в портфеле, и количество акций совпадают с теоретическими, так что нужно чему-то отдать предпочтение. Для хеджера естественно беспокоиться об акциях, как о более непредсказуемом активе, и мы примем такой сценарий, когда в дискретные моменты количество акций делается равным теоретическому. (Но можно было принять количество бон равным теоретическому, что было бы неизбежным, если представить себе, что хеджер берет боны не из собственного капитала, а получает от некоего фонда, который дает ровно столько, сколько требуется теорией.) Итак, мы постулируем, что при $t = kh, k = 0, 1, \ldots$ количество акций в портфеле (которое мы теперь обозначим $\gamma(t)$ и соответственно количество бон обозначим $\beta(t)$) дается равенством

$$\gamma(t) = \gamma_t^*.$$

При этом $\beta(0) = \beta_0^*$ в силу сценария, при котором цена опциона (начальный капитал хеджера) равна цене Блэка-Шоулса, но при $t \neq 0$ равенство теоретического и реального числа бон соблюдаться не будет. Таким образом, возникнет *дисбаланс*

$$D(t) = \beta(t) - \beta_t^*,$$

равный разности между реальным и теоретическим числом бон в портфеле в момент $t = kh$. Весь вопрос состоит в том, велики или малы получающиеся значния дисбалансов, а в особенности, последнее значение $D(T)$.

Теоретические формулы для состава портфеля таковы, что при $t = T$ и $S_T > K$ имеем: $\gamma_T^* = 1, \beta_T^* = -K/B_T$. Опцион в этом случае исполняется: хеджер отдает имеющуюся у него акцию по цене K (в долларах), что в бонах составляет как раз $-K/B_T$, и погашает создавшийся долг в бонах, оставшись с нулевым капиталом. При $S_T < K$ количество акций и бон в портфеле хеджера равно 0, но и опцион исполнять не нужно. Капитал хеджера опять нулевой. Случай $S_T = K$ в модели геометрического броуновского движения возможен лишь с вероятностью 0. Но, впрочем, при компьютерной имитации дискретного хеджирования последний случай возможен. В этом случае обращающийся в нуль знаменатель в формулах Блэка-Шоулса заменяют каким-то малым положительным числом, и тогда получается, что при $t = T$ количество акций в портфеле равно $1/2$, а количество бон равно $-K/2B_T$, так что и в этом случае долг хеджера в бонах погашается. Отсюда ясно, что дисбаланс $D(T)$ равен как раз капиталу (в бонах), который остается у хеджера после выполнения обязательства (если его нужно выполнять). Его разумно сопоставлять с начальным капиталом хеджера, т.е. с ценой опциона c. Таким образом, возникает понятие *относительного дисбаланса* $D(T)/c$.

Рассмотрим подробнее порядок величины чисел, которые могут возникнуть при дискретной реализации хеджирования. Пусть для $t = kh$ известны значения $\gamma(t) = \gamma_t^*$ и $\beta(t)$. Рассмотрим, что произойдет при переходе от t к $t + h$. В момент $t + h$ нужно приобрести дополнительное количество акций $\Delta\gamma(t) = \gamma_{t+h}^* - \gamma_t^*$, на что потребуется дополнительное количество бон $\Delta\beta(t)$, задаваемое формулой

$$\Delta\beta(t) = -\Delta\gamma(t)S_{t+h}/B_{t+h}. \tag{29}$$

Каков порядок величины $\Delta\gamma(t)$? Обращаясь к формуле (25), мы видим, что порядок изменения величины $\gamma(t) = \gamma_t^*$ определяется порядком изменения $x_+(t)$, который (при достаточно больших значениях разности $T - t$, стоящей в знаменателе выражения $x_+(t)$) зависит, главным образом, от приращения $\Delta \ln S_t$. Последнее имеет порядок величины $\sigma\sqrt{h}$. Таким образом, $\gamma(t)$ меняется на величину порядка $\sqrt{h}$. В общем, при увеличении курса акций S_t увеличивается и $\gamma(t)$, хотя это утверждение не совсем точно, поскольку в выражении для $x_+(t)$ имеется и второе слагаемое. Плавные изменения аргумента $x_+(t)$ функции $\gamma(t)$ превращаются в резкие по мере приближения t к T, но это не приводит к резким изменениям самой функции, если величины S_t заметно отличаются от величины K, поскольку функция Лапласа Φ мало меняется при больших по абсолютной величине значениях аргумента. Однако если при приближении t к T значения S_t колеблются вокруг значения K, то возникают резкие колебания количества акций в портфеле. Понятно, что такой режим практически совершенно нежелателен, и стратегия хеджирования Блэка-Шоулса на практике должна дополняться каким-то правилом, прерывающим следящее хеджирование при возникновении подобных колебаний. Впрочем, при имитации хеджирования по реальным данным о ценах акций (результаты которого описываются в дальнейшем) подобные ситуации не исключались.

Понятно, что имея данные о реальной динамике цен акций, можно произвести сколько угодно опытов имитации хеджирования по указанному сценарию (когда реальное количество акций совпадает с теоретическим) и получить большое количество значений дисбалансов в отдельных опытах. Как оценить эти результаты в целом? Ведь в опытах получаются как малые значения (относительных) дисбалансов, так и очень большие, доходящие до нескольких единиц. (Например, если относительный дисбаланс равен (-1), что иногда случается, то это означает, что хеджер должен был бы получить двойную цену опциона, чтобы, как полагается, остаться с нулевым капиталом.) Когда применение теории не во всех случаях дает хороший результат, вопрос ставится более мягко: может быть, хотя бы в большинстве случаев теория действует неплохо. (Сравните с ситуацией, когда мы хотим оценить эффективность того или иного метода лечения определенной болезни. Ответ дается в статистических терминах, например, что в $1/3$ случаев достигается выздоровление, в $1/3$ - улучшение и в $1/3$ никакого эффекта.) Но чтобы статистическая оценка результата вообще имела смысл, нужна определенная статистическая устойчивость: если для какого-то количества прошлых опытов называются определенные цифры эффективности, то мы должны предполагать, что и в будущем эти цифры окажутся сходными. На практике в каждый данный момент мы ничего не знаем о будущем, а судим об устойчивости результатов путем их сравнения на различных частях того материала, который имеется. Это называется еще «представительностью выборок»: подразумевается, что если взять из материала выборки достаточного объема, то они окажутся «представительными» в том смысле, что полученные по ним результаты будут близкими.

Эксперименты с имитацией хеджирования опционов по реальным данным показывают, что нечто подобное статистической устойчивости в самом деле существует. Строго говоря, динамика цен акций статистически неоднородна: лучшее, что может предложить наука для достижения статистической однородности — это перейти к логарифмам, но и после этого на графиках накопленных сумм квадратов приращений заметны такие отклонения от прямолинейности, которых не должно было бы быть в условиях статистической однородности. И тем не менее, с ростом числа наблюдений однородность как бы восстанавливается: приращения графиков за два отдельных месяца могут, скажем, отличаться вдвое, но если брать 1000 наблюдений (т.е. за четыре года), то различие приращений делается менее резким. Если же взять достаточно большой материал (несколько десятков компаний за несколько лет), то статистический подход обретает как бы второе дыхание: результаты тех или иных статистических обработок получаются похожими при различном выборе компаний и периодов времени. (В случае дисбалансов при хеджировании опционов результаты дополнительно стабилизируются переходом к относительным дисбалансам — т.е. выражаются в долях начальной цены опциона.)

Целесообразно начать с изложения некоторых возможностей для теоретического исследования дисбалансов. Можно получить некоторое приближенное выражение для дисбаланса. Рассмотрим приращение дисбаланса

$$\Delta D(t) = D(t+h) - D(t) = \Delta(\beta(t) - \beta_t^*). \tag{30}$$

Мы будем приближенно исследовать это выражение, опять-таки, в стиле математической физики, считая приращение времени h малой величиной, но надеясь на то, что результат будет применим и при конечном значении h (например, при $h = 1$ день). Понятно, что приращение (30) определяется (при выбранном и фиксированном σ) значениями курса акций S_t и S_{t+h}. Обозначим, как и ранее, $\ln(S_{t+h}/S_t) = \delta_t$, т.е.

$$S_{t+h} = S_t \exp \delta_t, \tag{31}$$

и постараемся получить приближенную формулу для (30) вообще без всяких вероятностных предположений о δ_t. Сделаем лишь предположения о порядке величины δ_t при малых h, а именно

$$\delta_t \sim \sqrt{h}, \delta_t^2 \sim h. \tag{32}$$

Будем вычислять (30) по формуле Тейлора, учитывая члены порядка δ_t, δ_t^2 и h и пренебрегая членами более высокого порядка. При этом воспользуемся явными выражениями (27) для γ_t^* и β_t^* и выражением (29) для $\Delta\beta(t)$. Приближение, в котором учитываются первые и вторые степени некоторых случайных приращений и первая степень приращения времени, характерно для концепции диффузионных случайных процессов. Поэтому такое приближение мы будем называть диффузионным.

Техника вычислений заключается в следующем. В выражения для γ_t^* и β_t^* входит S_t через величины $x_\pm(t)$; соответственно, в выражения для $\Delta\gamma_t^*$ и $\Delta\beta_t^*$ войдет S_{t+h}, которое мы заменим по формуле (31). В конечном счете получатся функции от S_t, δ_t и h, которые нужно разложить по формуле Тейлора при фиксированном S_t, считая малыми h и δ_t (учитывая лишь члены указанного выше порядка). После вычислений для самих выражений $\Delta\beta(t)$ и $\Delta\beta_t^*$ получаются малоинтересные громоздкие формулы, но для их разности (30) происходит довольно удивительная вещь, которая еще раз доказывает удивительную удачность формул Блэка-Шоулса-Мертона. Именно, с учетом тождества (24), сокращаются все члены порядка δ_t и почти все члены порядка h и остается довольно простое выражение, которое мы будем называть приращением дисбаланса в диффузионном приближении (короче: *диффузионного дисбаланса*) и обозначать $\Delta Ddif(t)$. Формулы следующие:

$$\Delta D(t) \simeq \Delta Ddif(t), \tag{33}$$

где

$$\Delta Ddif(t) = -\frac{K}{B_T}\frac{\phi(x_-(t))(\delta_t^2 - h\sigma^2)}{2\sigma\sqrt{T-t}} = -\frac{S_t}{B_t}\frac{\phi(x_+(t))(\delta_t^2 - h\sigma^2}{2\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Сам *диффузионный дисбаланс* $Ddif(t)$ определим как сумму его приращений в точках $t = 0, t = h, \dots$ вплоть до точки $t - h$. (Считается, что t — целое кратное h.) В частности, если T — целое кратное h, то $Ddif(T)$ определяется равенством

$$Ddif(T) = -\frac{K}{B_T}\sum_{t=0}^{T-h}\frac{\phi(x_-(t)(\delta_t^2 - h\sigma^2)}{2\sigma\sqrt{T-t}} = -\sum_{t=0}^{T-h}\frac{S_t}{B_t}\frac{\phi(x_+(t))(\delta_t^2 - h\sigma^2)}{2\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{34}$$

Для физика является убедительным следующий аргумент. Поскольку равенство (33) верно с точностью до $o(h)$,а число слагаемых в (34) равно T/h, то равенство $D(T) \simeq Ddif(T)$ верно с ошибкой, стремящейся к нулю при $h \to 0$. (Математик, конечно, таким рассуждением не удовлетворится, а потребует какой-то равномерной по t оценки ошибки при замене истинного приращения дисбаланса на приращение диффузионного дисбаланса.) Но поскольку делать h менее 1 дня по ряду причин бессмысленно, надо признать, что в своих надеждах на аппроксимацию истинного дисбаланса диффузионным мы рассчитываем не столько на строгое доказательство (будь то на уровне физики или математики), сколько на удачу. Действительно, в очень многих случаях вычисленные по реальным данным $D(T)$ и $Ddif(T)$ достаточно близки. Исключением из этого правила является такая ситуация, когда S_t оказывается близким к K при t близких к T (это те случаи, когда и само хеджирование по Блэку-Шоулсу следует каким-то способом прекратить). Из-за малого (при $t \simeq T$) знаменателя $\sigma\sqrt{T-t}$ в этом случае даже малые значения δ_t приводят к большим изменениям $x_\pm(t)$, и формула Тейлора перестает действовать. Впрочем, и из самого вида формулы (34) понятно, что эта формула может на что-нибудь либо годиться лишь в том случае, когда малый знаменатель $\sigma\sqrt{T-t}$ компенсируется малыми же значениями $\phi(x_\pm(t))$.

Эксперименты показывают, что в большинстве случаев диффузионный дисбаланс является вполне разумным приближением для точного дисбаланса (из нескольких тысяч экспериментов лишь в 1-2 % случаев приближение оказывается плохим). В тех же случаях, когда на приближенное выражение для дисбаланса (34) можно ориентироваться, из него видно довольно много.

Приращение диффузионного дисбаланса равно нулю, если $\delta_t^2 = h\sigma^2$. Иными словами, когда мы выбираем значение волатильности σ, мы как бы планируем будущий теоретический портфель хеджера (γ_t^*, β_t^*) в расчете на такие расходы на хеджирование, которые отвечают случаю $\delta_t^2 = h\sigma^2$. Если при каком-то t оказалось, что $\delta_t^2 > h\sigma^2$, то приращение дисбаланса отрицательно, т.е. требуется превышение фактических расходов $\Delta\beta(t)$ над запланированными $\Delta\beta_t^*$. При этом безразлично, в какую сторону произошел скачок цены акции (т.е. положительно или отрицательно δ_t). Если $\delta_t^2 < h\sigma^2$, то появляется экономия в сравнении с запланированными (на момент перехода от t к $t+h$) теоретическими расходами $\Delta\beta_t^*$. При этом простота выражения для диффузионного дисбаланса позволяет легко оценить порядок величины возникающих чисел.

При $h = 1$ день типичное значение $\sigma\sqrt{h}$ составляет примерно 0.02. Допустим, что значение δ_t оказалось (по абсолютной величине) впятеро больше: $\delta_t = -0.10$, т.е. за один день акции упали на 10% (такие случаи хотя и редко, но бывают). В такой ситуации игроки на фьючерсах могут потерять весь капитал, а что случится с хеджером, использующим стратегию Блэка-Шоулса?

Допустим для примера, что $T = 100$ дней, $t = 50$ дней, $K = S_0$. В такой ситуации начальная цена опциона c составляет примерно 10% от цены акции S_0 (она зависит еще от банковского процента r, но слабо, поэтому значение r мы не выбираем). Что касается величины множителя $\phi(x_-(t))$, то возьмем его наихудшее (т.е. наибольшее) возможное значение около 0.4 . (Оно получается при $x_-(t) = 0$.) При таких числах приращение диффузионного дисбаланса, отвечающее $t = 50$ есть примерно $(-0.03K/B_T)$. Поскольку при $K = S_0$ величина K/B_T по порядку есть цена акции ($\simeq 10c$), то при подобной рыночной катастрофе хеджер за один день теряет 30% денег, полученных за опцион, что довольно много.

Если же t близко к T, например, $t = 99$, то мы получили бы в 7 раз большее число, если, конечно, оно не компенсируется большим значением $|x_-(t)|$, т.е. близким к нулю значением $\phi(x_-(t))$. Мы еще раз видим, что тот случай, когда S_t близко к K при t, близком к T, является крайне неудачным для хеджирования.

Конечно, постоянную величину σ нельзя выбрать так, чтобы при всех t выполнялось равенство $\delta_t^2 = h\sigma^2$. Речь может идти о выполнении такого равенства «в среднем». Чтобы обсуждать, что такое «в среднем», приходится вернуться к вероятностной модели, в которой мы приходим к условию $\mathbf{E}\delta_t^2 = h\sigma^2$, т.е. волатильность σ и здесь разумнее считать связанной с $\mathbf{E}\delta_t^2$, чем с дисперсией $\mathbf{D}\delta_t$. В рамках вероятностной модели с независимыми приращениями логарифмов цен δ_t нетруден расчет тех или иных характеристик диффузионного дисбаланса. Правда, статистические ансамбли, о которых при этом приходится думать, имеют тенденцию плодиться и размножаться. В рамках ансамбля, связанного с рядом цен акций одной фиксированной компании, трудно говорить о свойствах оценок волатильности по какому-то числу предшествующих наблюдений: если всего имеется 2000 наблюдений (это, скажем, за восемь лет), а мы хотим создать независимые опыты, в которых волатильность на будущие 100 наблюдений оценивается по 100 прошлым наблюдениям, то таких опытов можно набрать всего 10. В математической статистике свойства оценок параметров всегда относятся к такому ансамблю, в котором данная оценка по данному числу наблюдений независимо повторяется много раз. Но если рассмотреть рынок акций многих компаний (за те же восемь лет), то тут уже можно говорить о статистических свойствах оценок волатильности, причем сразу ясно, что в таком ансамбле систематической ошибки (в оценках будущей волатильности по прошлым наблюдениям) не будет. Таким образом, на уровне здравого смысла гарантируется равенство $\mathbf{E}\delta_t^2 = h\hat{\sigma}^2$, где $\hat{\sigma}$— это оценка волатильности по прошлым наблюдениям. Следовательно, в ансамбле многих опытов имитации хеджирования мы ожидаем близкого к 0 среднего значения дисбаланса.

Если рассмотреть сумму (34) в рамках модели геометрического броуновского движения при известном значении σ, то (в силу независимости приращений) получится сумма некоррелированных слагаемых, каждое из которых имеет нулевое среднее. Дисперсия такой суммы равна сумме дисперсий отдельных слагаемых, которые легко вычислить (и результаты просуммировать приближенно или в численном виде точно с помощью компьютера). Но здесь уже не стоит ожидать совпадения такой теоретически вычисленной дисперсии с выборочной дисперсией тех дисбалансов, которые получаются в опытах имитации хеджирования, потому что сюда не включается разброс, связанный с оценкой будущей волатильности по прошлым наблюдениям.

До известной степени представление диффузионного дисбаланса в виде суммы (34) ориентирует на теоретическое ожидание нормального распределения для наблюдаемых в опытах хеджирования дисбалансов, хотя математических предельных теорем такого рода и не известно (слагаемые в сумме (34) имеют различные распределения из-за множителей $\phi(x_-(t))$, которые, в общем, приближаются к нулю с увеличением t).

Таким образом, выражение (34) для диффузионного дисбаланса, в общем, ориентирует на определенные ожидания статистических свойств дисбалансов, которые могут наблюдаться при имитации хеджирования по реальным данным.

Замечание. Формула (34) кажется несколько экзотической, поскольку основана на тождестве (24). Можно дать менее экзотический вывод этой формулы, если основываться на хорошо известном в теории диффузионных процессов дифференциальном уравнении для цены опциона

$$v(t, S_t) = \mathbf{E}[(S_T - K)_+ \exp(-r(T-t))|S_t].$$

Такой вывод обобщается на случай, когда функция выплат по опциону не есть обязательно $(S_T - K)_+$, а может быть произвольной функцией вида $f(S_T)$. В этом случае получается приближенное выражение для дисбаланса, имеющее вид линейной комбинации величин $\delta_t^2 - h\sigma^2$ с некоторыми зависящими от S_t коэффициентами. Но в общей теории хеджирования опционов рассматривается также ситуация, в которой функция выплат может зависеть от всех значений $S_t, 0 \le t \le T$. Для такого общего случая пока что ничего не известно о дисбалансах, которые могут возникнуть при дискретной реализации стратегий хеджирования, установленных для непрерывного времени.

Теперь мы можем обратиться к изложению результатов некоторых экспериментальных исследований дисбалансов. Понятно, что мы не можем рассчитывать на создание вероятностных моделей, адекватно отражающих динамику цен акций. Поэтому экспериментальные исследования должны исходить из реальных рыночных цен. К счастью, огромное количество подобных данных доступно непосредственно в электронном виде, и трудность состоит только в выборе материала. Для исследования был взят рынок, состоявший из акций примерно 200 американских компаний (цены закрытия) за время с начала 1989 года по конец января 1997 года (т.е. несколько более 8 лет). Большинство компаний (но не все) присутствовали в данных за весь период (несколько более 2000 наблюдений), но имелись и более короткие файлы данных. Надо заметить, что по числу компаний это менее 10% компаний всего американского рынка, причем выборка определенным образом смещена. Эти компании были выбраны апостериори в начале 1997 года, как компании, акции которых на тот момент представляли наибольший интерес для спекуляций. (Всего в списке 215 названий компаний, но ввиду того, что не все компании присутствуют с самого начала, мы говорим об этом рынке как о рынке «примерно двухсот» компаний.)

Отдельный эксперимент имитации хеджирования по реальным данным состоял в том, что файл данных с ценами акций определенной компании разделялся на последовательные куски определенной длины. Для каждого куска (начиная со второго) волатильность оценивалась по данным предыдущего куска, а затем производилась дискретная реализация стратегии хеджирования опциона, в результате чего получалось значение дисбаланса (а также вычислялось значение диффузионного дисбаланса). Эти значения делились на начальную цену опциона, т.е. окончательно рассматривались относительные дисбалансы.

К сожалению, условия всякого экспериментального исследования имеют массу параметров, значения которых невозможно перебрать, и приходится останавливаться на каком-то произвольном сочетании параметров. Длина кусков, на которые делились файлы данных была принята равной 101, т.е каждый кусок в отдельности может быть обозначен как отрезок целых чисел $[0, T]$, где$T = 100$. Шаг хеджирования h был принят равным 1 дню. Страйк-цена опциона принималась равной начальной цене акции: $K = S_0$. Что касается банковского процента r, то в разных опытах его значения варьировались, но поскольку при разумном порядке значений r от него мало что зависит (на интервале $T = 100$ дней), в большинстве опытов считалось, что $r = 0$. Неблагоприятные для хеджирования по Блэку-Шоулсу случаи, когда S_t близко к $K = S_0$ при t близких к T в данной обработке не отбрасывались.

Результаты около 3000 опытов хеджирования в указанных условиях представлены в виде эмпирической функции распределения для относительных дисбалансов на рис.8. Собственно, на нем две эмпирических функции — одна для точных дисбалансов и одна для диффузионных, но в масштабе чертежа они практически сливаются (что доказывает и то, что диффузионное приближение для дисбаланса оказалось достаточно точным для целей статистического исследования). По ходу опытов отчасти проверялась и статистическая устойчивость т.е. близкое сходство эмпирических функций распределения, получаемых при разбивке исходного материала по группам компаний и/или по периодам времени (понятно, что сколько- нибудь исчерпывающая проверка однородности невозможна). Мы видим, что на рис.8 представлено распределение, в общем, близкое к нормальному с нулевым средним (медиана близко совпадает с нулем), но имеющее тяжелые хвосты, особенно левый: отрицательные значения дисбалансов доходят до (-2). (В случае такого дисбаланса хеджер должен был бы получить за опцион не цену c, а цену $3c$, чтобы остаться с нулевым капиталом.) Сомнительно, чтобы стоило искать распределение, отличное от нормального, которое описывало бы эти хвосты, поскольку сама статистическая устойчивость хвостов (т.е. то, что для возможных других, в частности - будущих, данных хвосты окажутся сходными) ничем не доказана. Но оценку стандартного отклонения того нормального закона, который описывает основную часть всех наблюдений, лучше произвести не по сумме квадратов, а каким -либо робастным методом. Классики в свое время любили брать половину расстояния между квантилями, отвечающими вероятностям 0.16 и 0.84. Тогда прямо по чертежу 8 мы получаем значение 0.22 в качестве стандартного отклонения для относительных дисбалансов. Иными словами, примерно в 2/3 всех случаев относительный дисбаланс не превосходит 22%. Хорошо это или плохо?

С точки зрения финансовых расчетов, при которых ростовщики любят высчитывать десятые доли процента, это, конечно, плохо. Но давайте сравним результат с другими прикладными возможностями теории вероятностей. Например, существует такая классическая область, как теория ошибок, которая берется указать границы для ошибки определения той или иной физической константы по ее наблюдениям в опыте. Каждый знает, что имея наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и владея основами теории вероятностей, можно не интересоваться тем, что это за наблюдения и какие для них источники ошибок, а по-просту вычислить $\bar{x}$ и s и сказать, что истинное значение измеряемой величины лежит в доверительном интервале $\bar{x} \pm k_\alpha s/\sqrt{n}$ с заданной доверительной вероятностью $1-\alpha$. Значение k_α берется из таблиц нормального закона и в зависимости от доверительной вероятности 0.95 или 0.99 может равняться 1.96 или 2.58. Но ведь мы не знаем, какое именно из этих двух значений доверительной вероятности следует взять и потому приходим к выводу, что с точностью 22% длина доверительного интервала вообще не определена. Кроме того, науке известно слишком много случаев, когда в реальной ситуации такие доверительные интервалы теории ошибок вообще опровергаются последующими более точными наблюдениями. Иными словами, точность 22%, которая подтверждается фактическими данными, очень даже хороша для вероятностных методов вообще.

Если обратиться к теоретической оценке стандартного отклонения для дисбалансов (с указанными выше параметрами опционов), считая, что значение волатильности составляет 0.02 в пересчете на 1 день, то получаются следующие результаты. Предположим, что теоретическая модель геометрического броуновского движения действует точно.Можно вычислить методом Монте-Карло стандартное отклонение для точных дисбалансов, а можно вычислить (также в модели геометрического броуновского движения) и стандартное отклонение диффузионного дисбаланса (34) путем писания формул с интегралами. Оба метода дают согласующиеся результаты 0.10 (для относительного дисбаланса). Итак, опыты на реальных данных дают результат, который лишь вдвое хуже, чем то, что могло бы быть при точном действии вероятностной модели. Это замечательный успех, который вряд ли бы получился при статистическом исследовании применимости теории ошибок. Надо полагать, что дело здесь в том втором дыхании вероятностно-статистических методов, которое заключается в установлении статистической однородности для достаточно большого (по периоду времени и по числу компаний) рынка. Подобного явления трудно ожидать для ансамбля физических опытов по измерению констант, да и исследование в этом случае представляет огромные технические трудности по сбору первичного материала, который заведомо нельзя получить в готовом электронном виде.

Итак, вывод состоит в том, что хотя теория Блэка-Шоулса-Мертона не обладает той точностью, которую требует традиция для финансовых расчетов, она все же вполне пригодна для грубой ориентировки в ценах опционов и требует для своего применения лишь какой-то оценки единственного параметра — волатильности, что совершенно элементарно делается по прошлым данным о динамике цен.

0.9 Несколько замечаний о гипотезах, которые можно высказать в связи с изложенными результатами о дисбалансах

Предыдущие результаты ориентируют в том, какие могут быть реальные дисбалансы, но только для того частного случая,когда $T = 100, K = S_0$, для которого проводились опыты (кроме того, предполагалось, что $r = 0$, но значение банковского процента, по-видимому, мало существенно). Как быть при иных значениях параметров опциона?

Как показывают опыты, цифра 22% для стандартного отклонения относительных дисбалансов не может быть не зависящей от параметров. Дело в том, что при увеличении страйк-цены K по сравнению с начальной ценой акций S_0 резко падает цена Блэка-Шоулса c, и относительные дисбалансы $D(T)/c$ оказываются большими. Обратная картина получается при снижении K в сравнении с S_0. Нормировочный множитель, который стабилизирует дисбалансы (делая их независимыми от исторически сложившейся номинальной цены акций) не может равняться c. Что можно предложить в качестве нормировочного множителя?

Дело в том, что при любых параметрах опциона можно сравнительно быстро рассчитать теоретическое значение стандартного отклонения дисбалансов, т.е. то значение, которое получилось бы при точном действии модели геометрического броуновского движения с заданной волатильностью. Это можно сделать, например, методом Монте-Карло для точных дисбалансов или теоретически для диффузионных дисбалансов. (Мы, конечно, выдвигаем ту гипотезу, что диффузионное приближение будет действовать при любых параметрах опциона, а также — что распределение дисбалансов останется примерно нормальным, без чего мало смысла в вычислении стандартного отклонения.) Такое стандартное отклонение будет пропорциональным начальной цене акций, так что при делении на него (так предлагается нормировать реальные дисбалансы) цена акций исчезнет. Выдвигается гипотеза, что при $T = 100$ для рассматриваемого рынка реальные дисбалансы, нормированные теоретическим стандартным отклонением (своим для каждой компании, поскольку оно зависит от волатильности) будут иметь примерно нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением 2 (т.е. сохранится то отношение реального стандартного отклонения к теоретическому, которое имело место при $K = S_0$).

Почему выдвигается такая гипотеза и откуда берется число 2 для данного рынка (и что должно быть вместо 2 для времени действия опциона $T \neq 100$)? Анализ формулы (34) для диффузионного дисбаланса показывает, что дисбаланс определяется, главным образом, точностью оценки будущей волатильности по прошлым данным. Этот вывод подтверждается опытами, при которых волатильность оценивалась по будущим данным (такое возможно при имитации хеджирования, когда прошлые и будущие цены акций на самом деле содержатся в имеющихся файлах данных). В этих опытах (опять-таки для $T = 100, K = S_0$) относительные дисбалансы уменьшились вчетверо: стандартное отклонение оказалось 0.05 вместо 0.22.

Была исследована экспериментально (для рынка 200 компаний) точность оценки будущей волатильности по прошлым данным. В каждом отдельном опыте брались две оценки волатильности σ_1 и σ_2 по двум соседним сотням приращений логарифма курса акций. Составлялась статистика $\ln(\sigma_2/\sigma_1)$. Эмпирическая функция распределения этой статистики приведена на рис. 9 (в нормальном масштабе). Мы видим на этом рисунке нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением (оцениваемым по квантилям) чуть больше 0.20.

Каким было бы распределение указанной статистики при точном действии модели геометрического броуновского движения (со строго постоянной волатильностью)?

Мы имели бы разность $\ln \chi_2 - \ln \chi_1$, где χ^2 — это случайная величина, имеющая χ^2-распределение с числом степеней свободы $n = 100$. Распределение это асимптотически нормально с параметрами $(n, \sqrt{2n})$, или, если угодно, приближенно имеет вид $n(1 + \xi\sqrt{2/n})$, где $\xi \sim N(0, 1)$. После извлечения корня и взятия разности логарифмов получаем, что

$$\ln \chi_2 - \ln \chi_1 \simeq (\xi_2 - \xi_1)\sqrt{1/2n},$$

что соответствует нормальному распределению с нулевым средним и стандартным отклонением $\sqrt{1/n} = 0.1$. Таким образом, для рассматриваемого рынка точность оценки будущей волатильности по 100 прошлым наблюдениям вдвое хуже, чем было бы при точном действии вероятностной модели. По-видимому, и дисбаланс при хеджировании опциона с $T = 100$ будет вдвое больше (в смысле стандартного отклонения), чем тот дисбаланс, который можно рассчитать методом Монте-Карло, моделируя ряд цен акций, оценку волатильности по 100 предыдущим наблюдениям и хеджирование с волатильностью, равной этой оценке. Таким путем предполагается возможным исключить параметр K опциона, но что касается параметра T, то нужно, видимо, для ряда значений T экспериментально изучать (по данным конкретного рынка) точность оценки волатильности по какому- либо числу прошлых наблюдений (не обязательно равному T).

0.10 Условно гетероскедастичная модель

На графиках последовательных значений приращений логарифма цены акций, несомненно, можно во многих случаях наблюдать, как размах колебаний графика пульсирует: то увеличивается, то уменьшается. Термин «гетероскедастичность» в статистике означает переменный разброс значений каких-то наблюдений, и в этом смысле приращения логарифмов цен гетероскедастичны. Это означает их статистическую неоднородность, если, конечно, наблюдаемую неоднородность не удается свести в рамках какой-либо статистической модели к одинаково распределенным случайным величинам.

Волатильность ценных бумаг,разумеется, подвержена влиянию окружающих экономических и политических факторов, но количественно выразить подобные влияния не удается. В науке с давних пор признано правило,называемое «бритвой Оккама», согласно которому не надо вводить в исследование такие факторы (или сущности, или существа), с которыми все равно ничего нельзя сделать. Вот и делается попытка описать переменную волатильность с помощью того единственного, что доступно количественному наблюдению, а именно с помощью самих цен рыночного актива. Таких попыток делается много, каждая из них в отдельности имеет мало шансов на успех (потому что ясно ведь, что на самом деле многое зависит именно от внешних факторов, которые не введены в модель), но после обсуждения всех этих попыток в литературе возникает и укрепляется мнение, какие из них являются более удачными.

Среди удачных моделей источники охотно называют модели типа ARCH, GARCH и сходные с ними (ARCH означает AutoRegression Conditionally Heteroscedastic, GARCH - Generalized ARCH). Особенно удачной (в смысле использования небольшого числа параметров) считается модель GARCH(1,1). Эта модель заключается в следующем.

Генератором случая считается последовательность $\{\epsilon_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathbf{E}\epsilon_k = 0, \mathbf{E}\epsilon_k^2 = 1$. Эти величины создают приращения логарифмов курса акций $\delta_t = \ln(S_{t+1}/S_t)$ по формулам

$$\delta_t = \sigma_t \epsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \delta_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \tag{35}$$

где α_0, α_1 и β_1 — положительные числа. Таким образом, волатильность σ_t в момент t выражается рекуррентно через σ_{t-1} и δ_{t-1}, причем происходит некое «самовозбуждение» волатильности: если значение δ_{t-1}^2 оказалось большим, то вероятнее всего окажется большим значение волатильности в следующий момент σ_t. Таким образом, внешние воздействия на рынок в модели заменяются самовозбуждением волатильности.

Модель (35) предлагается для описания ежедневных цен закрытия торгов, в то время как для колебаний цен внутри сессии она не рекомендуется. Этим данная модель отличается от более простой модели геометрического броуновского движения, которая мыслится, как применимая с тем или иным успехом в любых временных масштабах.

При работе с реальными ценами акций неизбежна замена тех или иных усреднений по ансамблю реализаций (которого нет в наблюдениях) усреднениями по времени. Поэтому параметры $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ в (35) выбираются таким образом, чтобы модель задавала стационарный случайный процесс, в котором теряется статистическая зависимость между значениями процесса, разделенными достаточно большим интервалом времени. Если положить $\xi_s^2 = \alpha_1 \epsilon_s^2 + \beta_s$, то получается следующая формула:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 (1 + \xi_{t-1}^2 + \xi_{t-1}^2 \xi_{t-2}^2 + \dots + \xi_{t-1}^2 \dots \xi_1^2 \sigma_0^2),$$

из которой ясно, что условием потери зависимости σ_t от σ_0 (при $t \to \infty$) является стремление к нулю произведения $\xi_{t-1}^2 \dots \xi_1^2$. Логарифмируя и учитывая независимость величин ξ_s, мы видим, что это приводится к условию

$$\mathbf{E} \ln(\alpha_1 \epsilon_s^2 + \beta_1) < 0.$$

Это условие предполагает лишь конечность математического ожидания для $\ln \xi_s^2$. Если же потребовать, чтобы существовало $\mathbf{E}\xi_s^2$ и чтобы $\mathbf{E}\sigma_t^2$ в пределе не зависело от σ_0, то получаем несколько более сильное условие

$$\alpha_1 + \beta_1 = \mathbf{E}\xi_s^2 < 1. \tag{36}$$

Поскольку в модели (35) величины σ_t и ϵ_t независимы, имеем равенство

$$\mathbf{E}\delta_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{t-1}^2.$$

Таким образом, даже небольшое нарушение условия (36) приводило бы к быстрому росту $\mathbf{E}\delta_t^2$ с ростом t, что совершенно бессмысленно при тех тысячах значений t, с которыми имеют дело в финансовых данных.

В литературе сложилась традиция, в силу которой для оценки параметров модели (35) постулируется какое-либо распределение величин ϵ_t (например, нормальное $N(0,1)$), либо распределение Стьюдента, нормированное условием $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$ и т.д.). После этого модель становится параметрической и параметры оцениваются методом максимума правдоподобия. Замечено, что при этом сумма оценок параметров α_1 и β_1 нередко подходит близко к критической границе (36), а встречаются и публикации, в которых граничное значение 1 превышается. Нам не приходилось видеть, чтобы авторы публикаций применяли простейший и совершенно необходимый тест модели, состоящий в делении ряда наблюдений на несколько частей и сравнении получающихся для каждой части оценок параметров. Поскольку от предположения стационарности ряда во времени уйти нельзя, такие оценки должны получаться разумно близкими. Известно, что оценки максимального правдоподобия не являются робастными, а финансовые данные не могут не быть «засоренными». Поэтому во многих случаях оценки параметров по частям одного и того же ряда наблюдений должны расходиться настолько, чтобы поставить под сомнение возможность подбора модели.

Наш интерес к GARCH-модели связан с проблемой объяснения дисбалансов при хеджировании опционов. Казалось бы, модель (35) направлена как раз на выяснение статистических свойств величин δ_t^2, которые и входят в выражение (34) для диффузионного дисбаланса. Действительно, опыты по реализации модели (35) с помощью метода Монте-Карло показывают, что вид графиков накопленных сумм величин δ_t^2 в зависимости от сочетания значений параметров может быть почти любым. В этом смысле графики на рис.4, построенные по реальным данным, в принципе, объяснимы GARCH - моделью. Объяснимы и наблюдаемые значения дисбалансов. Но те же опыты показывают, что для подобного объяснения сумму $\alpha_1 + \beta_1$ нужно приблизить к единице. Однако при этом графики накопленных сумм делаются неустойчивыми в том смысле, что при разных случайных числах, генерируемых датчиком в качестве значений величин ϵ_k, получаются непохожие друг на друга графики даже при тысячах значений t. Финансовые ряды оказываются слишком короткими, чтобы с ними можно было работать с помощью GARCH-модели с близкими к критической границе (36) значениями параметров. Если сделать $\alpha_1 + \beta_1 = 0.99$, то по двум тысячам значений δ_t нельзя надежно оценить даже стационарное значение $\mathbf{E}\delta_t^2$, в то время как по реальным данным такая оценка вполне возможна.

Что касается объяснения дисбалансов при хеджировании с помощью GARCH- модели, то принципиальная возможность подбора такого сочетания параметров, которое объясняет дисбалансы порядка 0.22 или какие-то другие, недостаточна. Хотелось бы большего. Например, оценивая параметры GARCH-модели по первой половине ряда цен акций определенной компании, мы хотели бы объяснить те дисбалансы, которые получатся при имитации хеджирования по второй половине ряда данных. Если бы этот опыт удавался, хеджер мог бы научиться отличать те компании, которые в будущем дадут большие дисбалансы, от компаний, для которых дисбалансы окажутся малыми. Но понятно, что такое возможно, если оценки параметров по первой и второй половине ряда окажутся близкими.

Кроме метода максимума правдоподобия, который априори возбуждает сомнения, параметры модели (35) можно оценивать и по дисперсиям и корреляциям величин δ_t^2. Нетрудно выписать уравнения, связывающие параметры со стационарными (по времени) значениями этих величин. Например, известно, что $\alpha_1 + \beta_1 = r_2/r_1$, где r_k — коэффициент корреляции между δ_t^2 и δ_{t+k}^2. Однако опыты с реальными данными (тот же рынок 200 компаний) принесли печальный результат: оказалось, что оценки коэффициентов корреляции, полученные по первой и второй половине ряда наблюдений цен акции одной и той же компании, как правило, совершенно различны. Эти величины по порядку составляют несколько сотых и могут колебаться вдвое и больше, не говоря уж об их отношении. Правда, было замечено, что при усреднении коэффициентов корреляции по нескольким десяткам компаний получаются уже устойчивые (для первых и вторых половин рядов) числа. Но если отправляться от таких усредненных корреляций, то получаются столь малые значения оценок параметров α_1, β_1, что дисбалансы не объясняются. И конечно, теряется возможность отличать компании с большими дисбалансами от компаний с малыми дисбалансами. Чтобы выдвинуть какую-то гипотезу для объяснения этого, обратимся еще раз к рис.4. Понятно, что большие дисбалансы при хеджировании возникают в моменты резкого изменения наклона графика накопленной суммы квадратов. Но таких моментов, можно сказать, нет на графике для первой компании и имеется один (или, может быть, два для второй компании). И это за восемь лет наблюдений. Иными словами, резкие изменения волатильности не становятся еще предметом статистики за восемь лет наблюдений (в рамках акций одной компании). А поскольку именно изменения волатильности являются предметом GARCH-модели, то применение этой модели к динамике цен одного фиксированного актива представляется (по совокупности изложенных выше наблюдений) бесперспективным. Впрочем, некоторые надежды могут возлагаться на «второе дыхание» статистического подхода при укрупнении массивов исходных данных, например, при переходе к данным по рынку в целом.

Нелегко предложить обоснованное улучшение старой и заведомо неадекватной модели броуновского или геометрического броуновского движения.

0.11 Практическое значение хеджирования по Блэку-Шоулсу-Мертону

Одно дело — теоретический результат, хотя бы и подтвержденный в определенной мере анализом фактических данных, но другое дело — возможность и необходимость его практических применений. Тут очень многое зависит не столько от математики или математической и прикладной статистики, сколько от возможных на практике вариаций теоретического сценария предполагаемых применений. Если теоретик думает об одном сценарии, а на практике возможен иной, в чем-то лучший, то это может вести к радикальным переменам. Вот мы и рассмотрим возможные вариации сценария хеджирования опционов и вытекающие из них выводы.

Итак, цена опциона по Блэку-Шоулсу-Мертону дается выражением

$$v(t, S_t) = \mathbf{E}^*[(S_T - K)_+ \exp(-r(T-t))|S_t],$$

где $\mathbf{E}^*$ означает усреднение по мартингальной мере. Эта цена как начальный ориентир достаточно разумна для покупателя опциона, поскольку покупатель вряд ли может отличить, какая мера — т.е. мартингальная или нет — описывает будущую динамику цен акций (если вообще можно говорить об адекватном описании динамики цен за оставшееся время $T-t$, возможно — довольно большое, с помощью какой-либо вероятностной меры). Она также разумна и для эмитента — в рамках того теоретического сценария, в котором эмитент является хеджером и ничего не хочет, кроме того, чтобы остаться в конце концов с нулевым капиталом. Последний вывод подтверждается многочисленными опытами на реальных данных по крайней мере в среднем (средний дисбаланс устойчиво оказывается близким к нулю), а разброс дисбалансов в отдельных имитациях хеджирования оказывается удивительно малым.

Вытекает ли из этого, что на мировых биржах опционы торгуются по ценам, разумно близким к указанной, а эмитенты опционов рассмотренным выше образом хеджируют свои обязательства? Если эти вопросы задавать знатокам дела, то ответы получаются достаточно уклончивые. Достоверно известно (и написано в ряде источников), что в 1973 году предприимчивые электронщики выпустили в продажу на Чикагской бирже опционов микрокалькулятор, который вычислял цену Блэка-Шоулса, и с успехом его продавали. Но вот хеджировались ли опционы по Блэку-Шоулсу — об этом источники умалчивают.

Дело в том, что данные о хеджировании опционов нельзя извлечь из обычной биржевой статистики: биржа сообщает о ценах сделок с акциями, но о том, кто именно купил акции и с какой целью (т.е. с целью хеджирования или нет) умалчивает (коммерческая тайна). Впрочем, данные о ценах сделок с опционами доступны и при их анализе обнаруживается, что цены существенно отличаются от теоретических («улыбка волатильности», которая упоминалась выше). Но что касается хеджирования — какие здесь возможны варианты?

Спокон века известна тривиальная стратегия хеджирования «прикрытый опцион». Она состоит в том, что одновременно с продажей опциона хеджер покупает акцию, которую, возможно, придется в будущем поставить по цене K, и больше не делает ничего до окончания срока действия опциона. Пусть для простоты $K = S_0$. Тогда в начальный момент хеджер как бы предоставляет покупателю опциона заем S_0, который в случае исполнения опциона возвращается без процентов. Цена такой услуги равна банковскому проценту, который начисляется за время действия опциона, т.е. намного ниже, чем цена Блэка-Шоулса. В теоретической модели хеджер потому берет больше, что хеджирует опцион, опасаясь, что цена акций к моменту T упадет и покупатель опциона откажется от сделки. Тогда, согласно теоретическому сценарию, тот хеджер, который ограничился стратегией прикрытого опциона, должен освободиться (причем — с омерзением: он же хеджер, а не спекулянт!) от ненужной ему акции, продав ее по цене $S_T < S_0$ и понеся при этом потери. Но если рынок акций в целом растущий, то ведь хеджер может и оставить себе эту акцию, в надежде, что в не столь отдаленном будущем цена опять поднимется, так что теоретическая угроза потерь не слишком реальна. Пусть, например, эмитент опциона — это оператор финансового рынка, который в отношении акций вообще-то держится стратегии «buy and hold», но с благотворительными целями дает возможность тем игрокам, у которых не хватает денег на покупку целой акции, поиграть на опционах, выделяя для прикрытия часть имеющихся у него акций. Для такого хеджера цена опциона — это банковский процент. Кстати, если опцион ничем не прикрыт, то при его выпуске биржа берет с эмитента немалый залог, и не вполне ясно, какой залог она возьмет, если эмитент скажет, что он будет хеджировать по Блэку-Шоулсу. А прикрытый опцион залога не требует.

Для рынка 200 компаний были проведены эксперименты по сравнению стратегии

Блэка-Шоулса со стратегией прикрытого опциона, в которых потери эмитента вычислялись так, как положено в теории (т.е. эмитента заставляли сбрасывать акцию, если не исполнялся опцион), а цена, получаемая с покупателя, во всех случаях равнялась цене Блэка-Шоулса. Естественно, в случае следования стратегии Блэка-Шоулса средний остаток капитала у эмитента равнялся нулю, а если следовать стратегии прикрытого опциона, то в среднем эмитент сохранял у себя 25% полученных за опцион денег. Правда, разброс результатов в отдельных опытах хеджирования в случае стратегии Блэка-Шоулса был намного меньше, чем в случае тривиальной стратегии. Итак, преимущество стратегии Блэка-Шоулса не в дешевизне хеджирования по этой стратегии, а в удивительной стабильности получаемых с ее помощью результатов. Получается, что на уверенно растущем рынке эта стратегия практического значения не имеет, но на непредсказуемом рынке (каким был американский рынок акций в 1973 году или каким, возможно, будет когда-нибудь складывающийся в муках российский рынок) идея следящего за ценой основного актива хеджирования опциона заслуживает серьезного внимания. Конечно, стратегия Блэка-Шоулса не может применяться в точности в виде теоретических формул (хотя бы потому, что иногда возникают резкие колебания количества приобретаемых акций), но ведь теоретическая идея при ее практическом применении обычно разлагается на составные элементы, к ним добавляются какие-то новые и из полученного сочетания что-нибудь выходит.