

ЗАДАЧИ

по спецкурсу А.В.Лебедева

”ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН”

(осень 2007/2008 учебного года)

1. Установить, к области притяжения какого экстремального закона относится распределение F и найти линейную нормировку для максимумов:
 - а) $F(x) = \cos^3(1/x)$, $x \geq 2/\pi$;
 - б) $F(x) = 1 - (1 + x + x^2/2)e^{-x}$, $x \geq 0$;
 - в) $F(x) = 1 - e^{-\sqrt{x}}$, $x \geq 0$;
 - г) $F(x) = 1 - e^{-1/x^2}$, $x < 0$;
 - д) $F(x) = (x + 1)^3/8$, $x \in [-1, 1]$;
 - е) $\bar{F}(x) \sim xe^{-x^4}$, $x \rightarrow \infty$;
 - ж) $\bar{F}(x) \sim x^3e^{-x^2}$, $x \rightarrow \infty$.
2. Вывести и доказать законы больших чисел для максимумов в случае:
 - а) распределения Вейбулла $F(x) = 1 - e^{-x^\beta}$, $x > 0$, $\beta > 0$;
 - б) распределения с хвостом вида $\bar{F}(x) \sim x^\alpha e^{-x^\beta}$, $x \rightarrow \infty$, $\beta > 0$.
3. Проверить выполнение соответствующих усиленных законов больших чисел.
4. Для скользящего максимума первого порядка $\xi_n = \max\{a\eta_n, b\eta_{n-1}\}$ найти стационарное распределение, экстремальный индекс и невырожденный предельный закон для максимумов в случаях:
 - а) $a = 1/3$, $b = 2/3$, $F_\eta(x) = \exp\{-1/x\}$, $x > 0$;
 - б) $a = 4/5$, $b = 3/5$, $F_\eta(x) = \exp\{-1/x^2\}$, $x > 0$.
5. Вычислить экстремальный индекс обобщенной авторегрессии $\xi_n = A_n\xi_{n-1} + \eta_n$, где A_n , η_n — последовательности независимых случайных величин, не зависящие между собой, если:
 - а) $\bar{F}_\eta(x) \sim x^{-2}$, $x \rightarrow \infty$; $F_A(x) = x^5$, $x \in [0, 1]$;
 - б) $\bar{F}_\eta(x) \sim x^{-3} \ln x$, $x \rightarrow \infty$; $F_A(x) = \ln(x + 1)/\ln 2$, $x \in [0, 1]$.
6. Найти коэффициент корреляции Кендалла, коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости для совместных распределений:
 - а) $F(x_1, x_2) = \exp\{-(e^{-4x_1} + e^{-x_2})^{1/2}\}$;
 - б) $F(x_1, x_2) = (e^{-x_1} + e^{-5x_2} - 1)^{-1}$, $x_{1,2} \leq 0$;
7. Найти коэффициент корреляции Спирмена, коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости для совместных распределений:
 - а) $F(x_1, x_2) = e^{-(1/x_1 + 1/x_2)} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - e^{-1/x_1})(1 - e^{-1/x_2})\right)$, $x_{1,2} > 0$;
 - б) $F(x_1, x_2) = e^{2x_1} \min\{e^{3x_1}, e^{x_2}\}$, $x_{1,2} \leq 0$.
8. Проверить, какие из перечисленных совместных распределений являются многомерными экстремальными законами.