МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

А.В.ЛЕБЕДЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕМОГРАФИИ

М о с к в а 2015 год

Лебедев А.В.
Сборник задач по математической демографии
Учебное пособие. — М.: МГУ, 2015 (второе издание). — 96 стр.

Настоящий сборник включает в себя более ста задач в различных областях математической демографии. Представлены основные теоретические модели рождаемости и смертности, а также модели движения населения. Помимо классических разделов, сборник содержит дополнения, относящиеся к вопросам роста численности населения Земли и социально-экономическим аспектам демографии. Приведены таблицы различных демографических показателей. Используются данные Госкомстата России.

Для студентов экономического потока механико-математического факультета МГУ, а также всех интересующихся математическими моделями демографии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Преподавание предмета “Математические модели демографии” на экономическом потоке механико-математического факультета МГУ было введено в 1995 году. Настоящий сборник задач создан доцентом А.В.Лебедевым на основе семинарских занятий, которые проводятся им с 1998 г. (сначала в дополнение к лекционному курсу профессора О.В.Староверова, а затем к собственному курсу). По своей структуре и содержанию сборник в основном соответствует учебнику О.В.Староверова “Азы математической демографии” [1], а также содержит дополнения, относящиеся к вопросам роста численности населения Земли [3] и социально-экономическим аспектам демографии [2, 9] (в частности, проблеме расслоения общества по доходам в условиях рыночной экономики). Представлены основные теоретические модели рождаемости и смертности [4, 10, 11]. Приложение содержит таблицы различных демографических показателей. Используются данные источников [1, 2, 3, 11], а также информация из официальных изданий Госкомстата [5, 6].

В сборник включены как “абстрактные” теоретические задачи, посвященные математическому анализу моделей и выводу формул, так и “конкретные” прикладные, опирающиеся на реальные (или правдоподобные) данные, требующие вычисления определенных демографических показателей. При этом студенты имеют возможность применить полученные ранее знания в математическом анализе, решении дифференциальных и разностных уравнений (в том числе векторно-матричных), теории вероятностей и математической статистике [7], теории случайных процессов [8]. Ряд задач посвящен проверке статистических гипотез, что имеет немаловажное значение в демографии.

Другой аспект задач связан со введением в реальную проблематику. В частности, проводится иллюстрация “с цифрами в руках” демографической ситуации в России 1980-х и 1990-х гг.

Некоторые задачи относятся не к человеческому населению, а к так называемым эксплуатируемым популяциям (животных) [1]. Кроме определенной значимости в сельском хозяйстве и природопользовании, такие модели позволяют легче выявить и объяснить закономерности, свойственные и более сложным системам (народонаселению).

Более ста задач сгруппировано в десять глав, причем имеются ссылки из последующих на предыдущие. Результаты некоторых задач используются для решения других. Буквой “Т” отмечены задачи теоретического характера, буквой “В” — вычислительного (для их решения логично использовать компьютер).

По сравнению с первым изданием 2004 года, во втором издании исправлены обнаруженные ошибки, добавлены новые задачи (в главы 3, 5, 7, 8, 9), обобщенные гравитационные модели (в главу 9) и образцы контрольных работ, убрана глава 11 (посвященная вопросам страхования, изучаемым в других курсах).

В заключение, автор выражает надежду, что его труд поможет новым поколениям студентов овладеть важным, актуальным и интересным предметом — *математической демографией.*

Всем интересующимся современной демографией, ее проблемами и достижениями, автор рекомендует сайт “Демоскоп Weekly” (http://www.demoscope.ru).

Автор благодарен профессору О.В.Староверову (ЦЭМИ РАН), доценту Е.В.Чепурину (механико-математический факультет МГУ), профессору В.А.Ионцеву (экономический факультет МГУ), профессору Д.М.Эдиеву (СКГГТА), к.ф.-м.н. Е.М.Андрееву и Е.Л.Сороко (Центр демографии и экологии человека Института народнохозяйственного прогнозирования РАН) за полезные замечания и предложения при подготовке сборника.

1. Модели роста численности населения.

Простейшей моделью чистого размножения (без смертности) с дискретным временем, учитывающей возраст элементов популяции, является *модель Фибоначчи* (для пар кроликов, порождающих новые пары и т.д.).

Традиционной в математической демографии является модель с непрерывным временем, в которой скорость роста населения пропорциональна текущей численности (*модель Мальтуса*), т.е.

$$x'(t) = kx(t),$$

где k — некоторый коэффициент (*показатель роста, естественный прирост*). Решением этого уравнения, очевидно, является экспонента: $x(t) = x(0)e^{kt}$, $t \geq 0$.

В более общих моделях допускается зависимость показателя роста от времени и численности населения: $k = k(t, x)$. Например, в модели *демографического взрыва* полагают $k(x) = cx$, $c > 0$, при этом $x(t)$ достигает бесконечности за конечное время T. В других моделях, где k убывает до нуля с ростом x, может происходить стабилизация численности населения при $t \to \infty$.

1.1. В начальный момент $t = 0$ имеется одна пара взрослых кроликов. Найти число пар всех кроликов в любой момент t, если каждая взрослая пара на каждом шагу рождает одну пару молодых, а молодые становятся взрослыми за единицу времени (*задача Фибоначчи*).

1.2. В начальный момент $t = 0$ имеется 2 пары взрослых кроликов. Найти число пар взрослых кроликов в любой момент t, если каждая взрослая пара на каждом шагу рождает 4 пары молодых, а молодые становятся взрослыми за 2 единицы времени.

1.3. Определить рост численности населения $x(t)$ с показателем $k = k(x)$, где
а) $k(x) = l - x$,
б) $k(x) = l^\alpha - x^\alpha$, $\alpha > 0$;
в) $k(x) = \ln(l/x)$,
с начальным условием $x(0) = x_0$ при $0 < x_0 < l$.

1.4. В модели "демографического взрыва" найти зависимость между начальным значением численности населения x_0 и моментом взрыва T.

1.5. (Т) Докажите, что в модели с запаздыванием

$$x'(t) = f(x(t - \varepsilon)), \quad \varepsilon > 0,$$

где f — функция, ограниченная на любом отрезке, а $x(t)$ ограничено при $t \le 0$, невозможен "взрыв" (т.е. достижение бесконечного значения за конечное время).

1.6. Имеются две модели роста численности населения Земли [3]:
I) гиперболическая — $x(t) = C_1/(T_1 - t)$, $t < T_1$, при $C_1 = 2 \times 10^{11}$, $T_1 = 2025$;
II) тригонометрическая

$$x(t) = \frac{C_2}{\tau} \operatorname{arcctg} \frac{T_2 - t}{\tau}$$

при $C_2 = 1,85 \times 10^{11}$, $T_2 = 2005$, $\tau = 45$. Найти:
а) прогноз на 2000 год в обеих моделях;

б) момент прохождения уровня 10 млрд. в обеих моделях[1];

в) (В) наибольшее расхождение в прогнозах до 1975 г.;

г) предельное значение численности в модели II;

д) какая из моделей лучше соответствует данным табл. 1.1 в различные периоды XX века?

1.7. Имеются две изолированные популяции, экспоненциально растущие с показателями 0,2% и 2% (в год). Пусть в начальный момент отношение их численностей 2:1.

а) Найти отношение численности первой к второй через 10 лет.

б) Когда численности популяций сравняются?

1.8. Имеется две изолированные популяции с показателями роста -2% и $+2\%$ (в год). Пусть в начальный момент их численности 100 и 10 млн. чел. Найти минимум суммарной численности населения и момент его прохождения.

1.9. Популяция экспоненциально растет с показателем k, который оценивается с относительной ошибкой ε. По начальному условию x_0 делают прогноз на t лет вперед. Найти интервал возможных значений для $x(10)$, если $x_0 = 100$ млн. чел., $k = 0,01$ (в год), $\varepsilon = 0,1$.

1.10. Пусть показатель роста k — случайная величина. Найти среднюю численность населения $\tilde{x}(t)$, если

[1] Есть и другие модели. Так, по расчетам Лутца, Сандерсона и Щербова (Nature, 2001), численность населения Земли достигнет лишь 9 млрд. в течение ближайших 70 лет, а затем начнет сокращаться.

а) k принимает значения $k_1, \dots k_n$ с вероятностями $p_1, \dots p_n$;
б) k имеет нормальное распределение со средним k_0 и дисперсией σ^2;
в) k имеет показательное распределение со средним k_0.

2. Модели смертности.

Силой смертности d называют предел отношения вероятности смерти человека на промежутке $(t, t+h)$, к h, при $h \to 0$.

Силой смертности[2] $d(x)$ в возрасте x называется отношение вероятности того, что человек, доживший до возраста x, умрет в возрасте до $x+h$, к h, при $h \to 0$.

Функция дожития[3] $\bar{F}(x)$ описывает вероятность дожить до возраста x. Функция дожития представляет собой "хвост" функции распределения времени жизни F, т.е. $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Имеет место соотношение:

$$\bar{F}(x) = \exp\left\{ - \int_0^x d(u)\, du \right\}.$$

Средней продолжительностью предстоящей жизни в возрасте y $M(y)$ называется среднее время до смерти человека, дожившего до возраста y. Имеют место соотношения:

$$M(y) = \frac{1}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty \bar{F}(u)\, du = e^{D(y)} \int_0^\infty e^{-D(u+y)}\, du;$$

---

[2] В специальной литературе часто обозначается через $\mu(x)$.
[3] В специальной литературе часто обозначается через $l(x)$.

$$D(y) = \int_0^y d(u)\,du.$$

Суммарное среднее время жизни (прошлой и предстоящей) обладает свойством расти с возрастом.

Средняя продолжительность жизни T_0 равна средней продолжительности предстоящей жизни в возрасте ноль (т.е. для новорожденного).

Если предполагается, что смерть может наступить от различных причин, образующих полную группу событий (несовместных и учитывающих все возможности), то выделяют *силы смертности по причинам* (аналогично общей силе смертности). Имеет место соотношение

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i,$$

где d_i — сила смертности по i-ой причине из n возможных. Здесь также можем полагать $d_i = d_i(x)$.

При статистико-демографических исследованиях население обычно разбивается на 5-летние возрастные группы: $[x_{k-1}, x_k)$ и $[x_n, +\infty)$, $x_k = kh$, $1 \le k \le n$, $h = 5$, $n = 17$, $x_n = 85$. Оценками сил смертности по группам являются *возрастные коэффициенты смертности* m_k (числа умерших на определенное число людей данного возраста). Вводятся также оценки l_k для вероятностей дожития $\bar{F}(x_k)$ (числа доживших до данного возраста из определенного числа родившихся). Для оценки интегралов от функции дожития можно применить кусочно-линейную аппроксимацию на двусторонних интервалах и показательную — на одностороннем, т.е.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{F}(u)\,du \approx h\frac{l_{k-1}+l_k}{2}, \quad \int_{x_n}^{\infty} \bar{F}(u)\,du \approx \frac{l_n}{m_n}.$$

2.1. (Т) Найти функцию дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в следующих моделях силы смертности[4] (при $0 \le x < b$):

$$\text{а)} \quad d(x) = a/(b-x);$$

$$\text{б)} \quad d(x) = \begin{cases} c/(l+x), & x < x_0 \\ a/(b-x), & x \ge x_0 \end{cases}, \quad c < 1.$$

2.2. Пусть $d(x) = a/(b-x)$, $0 \le x < b$, и средняя продолжительность жизни 60 лет. Найти вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте y лет, если:
а) $a = 1/2$, $y = 50$;
б) $b = 90$, $y = 80$.

2.3. Пусть $F(x) = (x/b)^a$, $0 \le x \le b$, $a > 0$. Найти силу смертности и среднюю продолжительность предстоящей жизни. Вычислить вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте y лет, если:
а) $y = 45$, $b = 90$, $T_0 = 72$ (года);
б) $y = 54$, $a = 2$, $T_0 = 60$ (лет).

2.4. В *модели смертности Хелигмена-Полларда* [4, с.165] полагают

$$d(x) = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x/(1+GH^x).$$

[4] Формула а) соответствует *гиперболической модели смертности Ж.Буржуа-Пиша*; формула б) учитывает также детскую смертность в возрасте $x < x_0$.

Пусть $A = 0,0088$; $B = 0,3707$; $C = 0,2864$; $D = 0,0008$; $E = 8,37$; $F = 25,5$; $G = 0,0002$; $H = 1,0834$ (СССР, 1985-1986). Найти силу смертности в возрасте: а) 40 лет; б) 60 лет; в) 80 лет.

2.5. При $d(x) = a + be^{cx}$ (*модель Гомпертца-Мэйкхема*):

а) найти функцию дожития;

б) вычислить $\bar{F}(90)$, если $a = 0$, $\bar{F}(40) = 0,9$ и $\bar{F}(80) = 0,11$.

2.6. Для трех групп населения A, B и C возможны три причины смерти (1, 2 и 3). На группу A действуют 1 и 2, на B — 1 и 3, на C — 2 и 3. Известны силы смертности по группам d_A, d_B, d_C и функции дожития $\bar{F}_A$, $\bar{F}_B$, $\bar{F}_C$. Найти силы смертности по причинам d_1, d_2, d_3 и соответствующие им функции дожития.

2.7. Пусть в условиях задачи **2.6** $d_A = 3\,‰$, $d_B = 4\,‰$, $d_C = 5\,‰$. Найти ожидаемую суммарную силу смертности в группе D, где действуют все три причины, если влияние первой из них удастся сократить на 10%.

2.8. (Т) Вывести дифференциальное уравнение:

$$M'(y) = d(y)M(y) - 1.$$

2.9. (Т) Доказать следующую формулу (в модели с непрерывным временем):

$$M(y_1) = e^{D(y_1)} \int_{y_1}^{y_2} e^{-D(u)}\, du + e^{D(y_1) - D(y_2)} M(y_2),$$

для любых $y_1 < y_2$. Как преобразуется эта формула, если сила смертности d постоянна на интервале (y_1, y_2)? Как выразить $M(y_2)$ через $M(y_1)$?

2.10. Найти $M(25)$, если $M(20) = 48$ (лет) и сила смертности в возрасте 20–24 лет составляет $3\,{}^0\!/_{00}$ (в год). Каково приращение средней суммарной продолжительности жизни на этом отрезке возрастов?

2.11. (В) Оценить среднюю продолжительность жизни мужчин, женщин и всего населения (с точностью до года):

а) по данным табл. 2.4;

б) по данным табл. 2.5.

2.12. (В) Оценить среднюю продолжительность предстоящей жизни мужчин, женщин и всего населения в возрасте 60 лет (с точностью до года):

а) по данным табл. 2.4;

б) по данным табл. 2.5.

2.13. По данным табл. 2.1 и 2.2 определить, в каких возрастных группах смертность всего населения возросла более чем на 50%.

2.14. Имеются группы населения А и Б со значениями средней продолжительности жизни 60 и 70 лет, причем их численности относятся как 6:4. Найти среднюю продолжительность жизни всего населения. Как она изменится, если соотношение численностей станет равным 8:2, а средняя продолжительность жизни в каждой группе увеличится на 1 год?

2.15. По данным табл. 2.3 выделить доминирующую причину смерти в каждой возрастной группе и объединить их по этому признаку.

2.16. По данным табл. 2.4 для мужчин и женщин найти вероятности:

а) дожить до 60 лет, будучи в возрасте 20 лет;

б) дожить до 80 лет, будучи в возрасте 60 лет.

2.17. Решить задачу **2.16** по данным табл. 2.5.

2.18. Пусть функции распределения продолжительности жизни имеют общий вид $F(x) = (x/90)^a$, $0 \leq x \leq 90$, и средние для мужчин и женщин составляют 60 лет и 72 года. Найти вероятность того, что из случайно выбранных мужчины и женщины одного года рождения мужчина умрет раньше.

2.19. В *модели смертности У.Брасса* [10, 11] предполагается, что

$$\operatorname{logit} F(x) = \alpha + \beta \operatorname{logit} F_0(x), \quad \operatorname{logit} u = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{1-u},$$

где $F_0(x)$ — некая "стандартная" функция распределения продолжительности жизни. При $\alpha = -1$, $\beta = 1$ с помощью табл. 2.6 найти вероятности дожить до: а) 45 лет; б) 55 лет; в) 65 лет.

2.20. В городе с населением в 0,5 млн. чел. смертность составляет 2% в год. Построить 95%-доверительный интервал для числа смертей за год.

3. Модели рождаемости.

Интенсивностью демографических событий называется предел отношения вероятности наступления события на промежутке $(t, t+h)$, к h, при $h \to 0$. Предполагается, что наступление более одного события имеет вероятность $o(h)$. Если интенсивность событий λ постоянна, то число событий за время t имеет распределение Пуассона со средним λt.

Возрастной функцией фертильности (фертильностью) $f(x)$ называется предел отношения вероятности рождения ребенка женщиной в возрасте $(x, x+h)$, к h, при $h \to 0$. Возможностью многодетных рождений пренебрегаем (пропорционально увеличивая фертильность).

Брутто-коэффициентом рождаемости[5] (или просто средним числом детей, без учета смертности матерей) называется величина

$$N_b = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Нетто-коэффициентом рождаемости[6] называется величина

$$N_n = \int_0^\infty f(x)\bar{F}(x)\,dx,$$

где $\bar{F}(x)$ — функция дожития женщин. Таким образом учитывается возрастная смертность женщин, способная сократить число рождений.

В нормальных условиях нетто и брутто-коэффициенты мало отличаются между собой.

Средним возрастом матерей называется средний возраст женщины в момент рождения ребенка (независимо от очередности рождения). Для определения этой величины (в непрерывной модели) обычно используется формула

$$T_m = \frac{1}{N_b}\int_0^\infty x f(x)\,dx,$$

[5] Эту величину также называют *коэффициентом суммарной рождаемости* (КСР).

[6] В современной демографии чаще рассматривают *нетто-коэффициент воспроизводства*, равный произведению нетто-коэффициента рождаемости на долю девочек среди родившихся; см. также задачу **5.4.**

не учитывающая смертность.

При демографических исследованиях рождаемости женское население обычно разбивается на 5-летние возрастные группы (от 15 до 50 лет). Оценками фертильности являются *возрастные коэффициенты рождаемости* (числа рождений на определенное число женщин данного возраста). При оценивании остальных показателей фертильность в каждой группе полагается постоянной. В качестве значений возрастов для простоты можно взять середины интервалов.

Когортой называют совокупность людей, вступивших в некоторый промежуток времени в некоторое демографическое состояние (возможно, обладающих также некоторым дополнительным набором признаков). Часто рассматривают когорты по годам рождений (например, 5-летние).

Динамика отдельной семьи (по поколениям) иногда описывается ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона [8]. Если к семье причисляются все потомки (как мужского, так и женского пола), то необходимо также предположить, что члены семьи образуют пары только с людьми извне (не являющимися их родственниками ни в каком поколении), причем этих людей всегда достаточно для образования пар. Более реалистичны модели описания ветвящимся процессом мужских и женских линий по отдельности (при этом степень родства в паре не играет роли).

Вероятностью вырождения ветвящегося процесса q называется вероятность обращения процесса в нуль, начиная с какого-то момента времени. Таким образом, речь идет не о вырождении в биологическом или медицинском смысле слова, а о понятии из теории ветвящихся процессов, которому соответствует просто вымирание (семьи, рода, линии). Если среднее число потомков больше единицы, то вероятность вырождения равна единственному на промежутке $[0,1)$ решению уравнения

$$s = g(s),$$

где $g(s)$ — производящая функция числа потомков, а именно

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,$$

где p_k — вероятность иметь k потомков (эти вероятности могут оцениваться статистически, при обследовании определенного числа семейных пар). В случае, если среднее число потомков не больше единицы, вероятность вырождения равна единице.

3.1. Проверить гипотезу о пуассоновости потока рождений[7] по данным из таблицы (Эстония, 1980) с помощью критерия χ^2 на уровне значимости 1%.

январь	февраль–март	апрель–июнь	июль–октябрь	ноябрь–декабрь
1824	3647	5757	7272	3704

3.2. Найти среднее число детей и средний возраст матерей в следующих моделях возрастной фертильности:

а) $f(x) = Ae^{-b(x-x_0)}$, $x \geq x_0$;

[7] Зависимостью от меняющейся общей численности населения и сезонными колебаниями здесь пренебрегаем.

б) $f(x) = A_1 e^{-b_1(x-x_0)} + A_2 e^{-b_2(x-x_0)}$, $x \geq x_0$;
в) $f(x) = A(x-x_0)^\alpha (x_1-x)^\beta$, $x \in [x_0, x_1]$, $\alpha, \beta > 0$.
Указание: использовать определение и свойства бета-функции.

3.3. В *полиномиальной модели рождаемости У.Брасса* [4, с.169] возрастная фертильность описывается формулой из **3.2в** с $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $x_1 = x_0 + 33$. В этих предположениях:
а) выразить неизвестные параметры модели через среднее число детей и средний возраст матерей.
б) при $N_b = 2$, $T_m = 26,2$ найти точку максимума фертильности и его значение.

3.4. Найти вероятности вырождения для следующих распределений числа детей в семье:
а) трехточечного — $\{p_0, p_1, p_2\}$;
б) четырехточечного — $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, $p_3 > 0$;
в) геометрического (от нуля) со средним μ.

3.5. Оценить вероятности вырождения по данным табл. 3.3 для каждой из когорт, объединяя вероятности числа детей ≥ 3.

3.6. Пусть распределение числа детей задано вероятностями: $p_0 = 0,1$, $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,25$, $p_4 = 0,15$. Найти среднее число детей и средний возраст матерей, если первый ребенок рождается (в среднем) в 23 года, второй — через 4 года, третий — через 3 года, четвертый — через 2 года (смертностью пренебрегаем, численность возрастных групп матерей полагаем одинаковой).

3.7. Найти распределение числа мальчиков в семье, если вероятность рождения мальчика $0,515$, а распределение общего числа детей в семье:

а) биномиальное с параметрами $n = 4$, $p = 0,6$.

б) пуассоновское со средним 2.

3.8. В *модели Лотки* [8, с.23] распределение числа мужских потомков (продолжающих фамилию) описывается формулами: $p_k = bc^{k-1}$, $k \geq 1$, $p_0 = 1 - b/(1-c)$, $b, c > 0$, $b + c < 1$.

а) Найти среднее число мужских потомков μ и вероятность вырождения фамилии q.

б) Решить задачу при $b = 0,2$, $c = 0,6$ (США, 1920).

в) При $\mu = 2$ и $p_0 = 0,4$ найти b, c и q.

3.9. Пусть распределение числа детей в семье пуассоновское со средним $\lambda = 3$, первый ребенок рождается в среднем в 22 года, а каждый следующий — в среднем через 2 года (смертностью пренебрегаем, численность возрастных групп матерей полагаем одинаковой).

а) Найти средний возраст матерей.

б) Как изменится средний возраст матерей, если первый ребенок будет заводиться в среднем на год позже, а среднее число детей сократится в два раза?

3.10. (В) По данным табл. 3.1:

а) оценить брутто-коэффициент рождаемости и средний возраст матерей;

б) оценить нетто-коэффициент рождаемости с учетом табл. 2.4.

3.11. (В) Решить задачу **3.10** по данным табл. 2.5 и 3.2.

3.12. За год в городе родилось 10268 мальчиков и 9742 девочки. На уровне значимости 5% проверить гипотезу о том, что:

а) рождения мальчиков и девочек равновероятны;
б) вероятности рождения для мальчиков и девочек равны 0,51 и 0,49.

3.13. В городе А с населением 1 млн. чел., за год родилось 10,2 тыс. детей, а в соседнем городе Б с населением 2 млн. чел. в тот же год родилось 19,8 тыс. детей. Можно ли утверждать, что средняя рождаемость в А больше, чем в Б (на уровне значимости 5%)?

3.14. В городе с населением 1 млн. чел. рождаемость составляет 1% в год. Построить 95%-доверительный интервал для числа рождений за год.

3.15. Построить 99%-доверительный интервал для числа мальчиков на 100 тыс. рождений, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

4. Модели движения активного населения.

Экономически активное население определяется по признакам активного участия в экономической деятельности, производстве материальных и духовных благ (в отличие от детей, учащихся и неработающих пенсионеров), а также движения (перехода между группами) по своей воле. Группы могут выделяться по признакам места проживания, сферы деятельности, профессии и квалификации и т.д.

Если группы делятся по территориальному признаку, то речь идет о простейших *моделях миграции*.

Главным отличием модели движения экономически активного населения от других демографических моделей является предположение о постоянстве общей численности населения (смертностью и рождаемостью пренебрегаем, население замкнуто).

Интенсивностью перехода λ_{ij}, где $i \neq j$, называется предел отношения вероятности перехода человека из группы i в группу j на промежутке $(t, t+h)$, к h, при $h \to 0$. Предполагается, что вероятность более одного перехода имеет вероятность $o(h)$, и переходы людей происходят независимо.

Далее в задачах интенсивность иногда определяется как вероятность перехода в единицу времени, поскольку эту единицу полагаем достаточно малой.

Численность населения по группам описывается вектором $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_m)^T$, где m — число групп. Если исходной моделью является стохастическая, то это вектор средних значений (математических ожиданий) численностей групп.

В непрерывной модели динамика описывается системой дифференциальных уравнений:

$$n_i'(t) = -\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \lambda_{ij}\right) n_i + \sum_{l=1, l\neq i}^{m} \lambda_{li} n_l, \quad 1 \leq i \leq m,$$

которая может быть приведена к векторно-матричной форме

$$\vec{n}'(t) = C\vec{n}(t), \quad C = (\lambda_{ij})^T, \quad \lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \lambda_{ij}.$$

Интенсивности переходов можно выразить через интенсивности r_i выхода из групп и вероятностей последующих переходов p_{ij}, а именно:

$$\lambda_{ij} = r_i p_{ij}, \quad p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{r_i}, \quad r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ii} = -r_i.$$

Тогда получаем $C = (P^T - E)R$, где $P = (p_{ij})$, $R = (r_i \delta_{ij})$.

В дискретной модели с шагом времени h получаем рекуррентное уравнение

$$\vec{n}(t+h) = A\vec{n}(t), \quad A = E + hC,$$

где обычно полагают $h = 1$.

В непрерывной модели одно из собственных значений матрицы C равно нулю, а остальные имеют отрицательные действительные части, поэтому всегда имеет место сходимость к равновесному состоянию. В дискретной модели это необязательно (при больших интенсивностях переходов она может оказаться неустойчивой и не отражающей реальности).

Структурой населения называется его описание через отношения численностей групп к общей численности населения. В частности, для дискретной модели можем определить вектор

$$\vec{s}(t) = \frac{\vec{n}(t)}{N(t)}, \quad N(t) = \sum_{i=1}^{m} n_i(t).$$

4.1. Имеются две группы (1 и 2). Интенсивность переходов из 1 в 2 равна a, из 2 в 1 — b, причем $a, b > 0$. При неотрицательном, отличном от нуля начальном условии $\vec{n}(0) = (n_1^0, n_2^0)^T$:

а) в модели с непрерывным временем найти решение $\vec{n}(t)$;

б) в модели с дискретным временем найти решение $\vec{n}(t)$ и условия, при которых это решение всегда неотрицательно;

в) при каких a и b решение в модели с дискретным временем стабилизируется, начиная с $t = 1$?

4.2. Имеются три группы (1, 2 и 3). Интенсивность переходов из 1 в 2 и 3 равна a, из 2 в 1 и 3 — b, из 3 в 1 и 2 — c, причем $a, b, c > 0$.

а) Найти предельную структуру населения.

При начальном условии $\vec{n}(0) = (1, 0, 0)^T$:

б) найти решение при $a = b = c = 1$;

в) найти решение при $a = 1$, $b = 4$, $c = 9$;

4.3. Имеются три группы. Интенсивность переходов из 1 в 2 равна a, из 2 в 3 — b, причем $a, b > 0$, $a \neq b$. Найти:

а) общее решение;

б) решение при $a = 2$, $b = 1$, $\vec{n}(0) = (1, 0, 0)^T$;

4.4. Имеются три группы активного населения А, Б и В, вероятности выхода из которых составляют 1, 6 и 9% (в месяц). При выходе из группы человек равновероятно переходит в одну из двух других. При начальных численностях групп в 0,3, 1,3 и 0,7 млн. человек:

а) найти $\vec{n}(t)$, используя дискретную модель;

б) найти численности групп через год;

б) найти предельные численности групп.

4.5. Активное население делится на работающих (А) и безработных (Б). Вероятность потерять работу составляет 2% (в месяц), а вероятность найти ее

18% (в месяц).

а) Найти равновесный уровень безработицы;

б) Во сколько раз сократится безработица, если благодаря государственной программе занятости среднее время поиска работы уменьшится вдвое?

5. Модели естественного движения населения.

Под *естественным движением населения* понимается его движение, приращение и убывание по возрастным группам. Население предполагается замкнутым.

Численность населения по возрастным группам описывается вектором (средних значений) $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, где m — предельный возраст. В модели с двумя полами вводятся также отдельные компоненты вектора, описывающие число мужчин и женщин каждого возраста.

Дискретная модель с единичным шагом времени может быть записана в векторно-матричной форме

$$\vec{n}(t+1) = L\vec{n}(t),$$

где L называется *матрицей Лесли.*

Непрерывная детерминированная демографическая модель с одним полом описывается системой интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = -d(t,x)z, \\ z(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty b(t,x)z(t,x)\,dx, \\ z(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Здесь $z(t,x)$ — плотность населения в возрасте x в момент t, т.е. предел отношения числа людей в возрасте

$(x, x+h)$ к h при $h \to 0$, $b(t,x)$ — фертильность в возрасте x в момент t в расчете на одного человека (а не на одну женщину, как ранее), $d(t,x)$ — сила смертности, $g(x)$ — начальное условие (определяемое из переписи населения). При этом явное введение предельного возраста не обязательно.

Модель с двумя полами[8] имеет аналогичный вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} + \dfrac{\partial z_1}{\partial x} = -d_1(t,x) z_1, \quad \dfrac{\partial z_2}{\partial t} + \dfrac{\partial z_2}{\partial x} = -d_2(t,x) z_2, \\ z_1(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty b_1(t,x) z_1(t,x)\, dx, \\ z_2(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty b_2(t,x) z_1(t,x)\, dx, \\ z_1(0,x) = g_1(x), \quad z_1(0,x) = g_2(x). \end{cases}$$

Здесь индекс 1 означает описание функцией женского, 2 — мужского населения, а через $b_1(t,x)$ и $b_2(t,x)$ обозначены интенсивности рождений девочек и мальчиков соответственно у женщины в возрасте x в момент времени t.

В непрерывной модели структура населения описывается функцией

$$s(t,x) = \frac{z(t,x)}{N(t)}, \quad N(t) = \int_0^\infty z(t,x)\, dx.$$

Стабильным населением называется население, которое растет, сокращается или остается постоянным как единое целое, без изменения своей структуры. Частным случаем стабильного является *стационарное*

[8] Без учета влияния на рождаемость численности мужского населения, которая предполагается достаточной.

население, сохраняющее как структуру, так и численность. Понятно, что равновесие здесь динамическое.

Средним возрастом населения называется средний возраст людей, входящих в население. В непрерывной модели он находится по формуле

$$T_e(t) = \int_0^\infty xs(t,x)\,dx.$$

Репродуктивным потенциалом Фишера в возрасте x называется показатель, отражающий относительный средний вклад человека за его оставшуюся жизнь в дальнейший рост населения. В непрерывной модели с одним полом он вычисляется по формуле

$$c(x) = \frac{e^{kx}}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty b(u)\bar{F}(u)e^{-ku}\,du,$$

где k — показатель роста стабильного населения[9]. При постоянных параметрах модели суммарный потенциал населения меняется экспоненциально с показателем k, независимо от структуры населения.

5.1. Пусть на каждом шагу каждая взрослая пара кроликов либо рождает в среднем μ пар молодых, либо погибает с вероятностью p (не оставив потомства), а каждая молодая становится взрослой. Выписать матрицу Лесли и рекуррентную формулу. Найти среднее число пар взрослых кроликов в любой момент времени t, если в начальный момент $t = 0$ имеется одна пара взрослых кроликов, для следующих значений параметров:

[9] В специальной литературе он называется также *коэффициентом Лотки*.

а) $\mu = 1$, $p = 0,1$;
б) $\mu = 3$, $p = 0,2$;
в) $\mu = 4$, $p = 0,1$;
г) $\mu = 6$, $p = 0,5$;
д) $\mu = 1$, $p = 0,5$.

При каких начальных условиях среднее число пар кроликов меняется строго в геометрической прогрессии? При каких значениях параметров оно стремится к конечному ненулевому пределу?

5.2. (Т) Найти стабильное население в модели естественного движения с одним полом в предположении, что фертильность и сила смертности не зависят от времени. Найти условие роста населения. *Указание:* решение искать в виде $z(t,x) = e^{kt}u(x)$; использовать выражение функции дожития через силу смертности.

5.3. Найти средний возраст стабильного населения из задачи **5.2** при $F(x) = (x/100)^2$, $0 \le x \le 100$, и естественном приросте: а) $+1\%$; б) -1% (в год).

5.4. (Т) Найти стабильное население в модели естественного движения с двумя полами в предположении, что фертильность и силы смертности для обоих полов не зависят от времени. Найти условие роста населения. *Указание:* решение искать в виде $z_1(t,x) = e^{kt}u_1(x)$, $z_2(t,x) = e^{kt}u_2(x)$.

5.5. (Т) Найти средний возраст стационарного населения из **5.2**, если: а) $\bar{F}(x) = (1-(x/b))^a$, б) $F(x) = (x/b)^a$; $0 \le x \le b$, $a > 0$.

5.6. По данным табл. 5.1 оценить:
а) вероятности рождения мальчиков и девочек;
б) в каком возрасте доли мужчин и женщин вы-

равниваются.

5.7. По данным табл. 5.1 найти локальные максимумы и минимумы (всего населения), с соответствующими годами рождения.

5.8. (В) Оценить предполагаемое число рождений в 2000 году по данным табл. 5.1 и табл. 3.2 (рождаемость полагаем неизменной).

5.9. (В) Оценить предполагаемое число смертей в 2000 году по данным табл. 5.1 и табл. 2.5 (смертность полагаем неизменной).

5.10. (В) Пусть в модели с одним полом имеется стабильное население с естественным приростом 1% (в год), рождаемостью по модели У.Брасса с $T_m = 25,2$ (лет) и функцией распределения времени жизни $F(x) = (x/100)^2$. Вычислить репродуктивный потенциал в возрасте: а) 20 лет; б) 30 лет; в) 40 лет.

5.11. В модели естественного движения населения известно, что $b(x) = Ae^{-\beta(x-x_0)}$ при $x \geq x_0$, $\bar{F}(x) = e^{-x/T_0}$ при $x \geq 0$, и население стационарно. Найти A и репродуктивный потенциал Фишера в возрасте y лет, в следующих случаях:
а) $x_0 = 18$, $\beta = 1/2$, $T_0 = 60$, $y = 20$;
б) $x_0 = 21$, $\beta = 1/3$, $T_0 = 63$, $y = 24$.

6. Общие модели движения населения.

Общая модель движения населения с непрерывным временем имеет вид

$$\vec{n}'(t) = C\vec{n}(t) + \vec{a}(t),$$

где C — матрица интенсивностей (возможно, учитыващая рождаемость и смертность) и $\vec{a}(t)$ — вектор, описывающий связь с внешним миром (приток извне или, напротив, отъем населения).

Если группы делятся по территориальному признаку, речь идет о *моделях миграции* (с учетом рождаемости и смертности).

Пусть b_{ij} — интенсивность рождений детей группы j на человека из группы i, и d_i — сила смертности в группе i, $1 \leq i, j \leq m$. Определим матрицы $B = (b_{ij})$ и $D = (d_i \delta_{ij})$, тогда

$$C = B^T - D + \Lambda^T, \quad \Lambda = R(P - E).$$

Матрица D диагональна всегда. Матрица B диагональна, если дети остаются в группе родителей. В последнем случае обозначим $b_i = b_{ii}$ и $k_i = b_i - d_i$, тогда k_i — естественный прирост в группе i (какой наблюдался бы, если бы группы были изолирована).

Под показателем роста (популяции в целом) будем понимать величину k такую, что $N(t) \sim ce^{kt}$, $t \to \infty$. Если матрица C неразложима, то при неотрицательном (отличном от нуля) начальном условии k оказывается наибольшим собственным значением C, а предельная структура $\vec{s}(\infty)$ — соответствующим ему собственным вектором. Величина k лежит на отрезке между наименьшим и наибольшим из k_i, и удовлетворяет соотношению $k = (\vec{k}, \vec{s}(\infty))$, где $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Модель с дискретным временем может быть представлена в виде

$$\vec{n}(t+h) = A\vec{n}(t) + \vec{a}(t), \quad A = E + hC.$$

В ней при “неудачных” составляющих может наблюдаться расходимость.

Область применимости моделей определяется неотрицательностью текущих численностей населения в группах. В модели с непрерывным временем без отъема населения это условие выполняется всегда при неотрицательных начальных условиях.

6.1. Пусть имеется популяция кроликов двух возрастов. За один шаг времени каждая взрослая пара рождает μ пар молодых, каждая молодая пара становится взрослой, и кроме того, производится изъятие l пар взрослых кроликов (после рождений и переходов). Найти равновесные значения чисел молодых и взрослых пар. Предполагая, что в начальный момент $t = 0$ имеется ν пар взрослых кроликов:

а) найти числа пар молодых и взрослых кроликов в любой момент t в общем случае (без учета требования неотрицательности);

б) найти условия, при которых популяция кроликов растет, вымирает, стремится к конечному ненулевому пределу.

6.2. Пусть имеется популяция кроликов трех возрастов. За один шаг каждая молодая пара становится взрослой, каждая взрослая рождает 3 молодых и становится старой, из старых $1/2$ умирает. Кроме того, происходит изъятие 4 молодых, 2 взрослых и 1 старой пары (после рождений, гибелей и переходов). Найти равновесное состояние.

6.3. (Т) Имеется две группы (1 и 2). Естественный прирост в группе 1 равен a, в группе 2 — b. Кроме того, имеется постоянный поток со скоростью l

из первой группы во вторую (пока группа 1 не пуста). Рассмотреть все случаи развития событий.

6.4. (Т) Имеется 2 группы (1 и 2). Естественный прирост в группе 1 равен k_1, в 2 — k_2, интенсивность переходов из 1 в 2 равна l_1, из 2 в 1 — l_2. Найти условия, при которых популяция растет, вымирает, стремится к конечному ненулевому пределу (при неотрицательном, отличном от нуля начальном условии).

6.5. В условиях задачи **6.4** найти общее решение, показатель роста и предельную структуру при неотрицательном, отличном от нуля начальном условии, если заданы параметры:
а) $k_1 = 5$, $l_1 = 4$, $k_2 = 2$, $l_2 = 1$;
б) $k_1 = 2$, $l_1 = 1$, $k_2 = 4$, $l_2 = 2$;
в) $k_1 = 6$, $l_1 = 4$, $k_2 = 8$, $l_2 = 5$;
г) $k_1 = 5$, $l_1 = 3$, $k_2 = 9$, $l_2 = 2$;
д) $k_1 = 1$, $l_1 = 3$, $k_2 = -5$, $l_2 = 2$.

6.6. В условиях задачи **6.4** найти вектор $\vec{n}(t)$, асимптотику $N(t)$ при $t \to \infty$ и предельную структуру населения при $k_1 = 4$, $l_1 = 1$, $k_2 = 8$, $l_2 = 3$, начальном условии $\vec{n}(0) = (1, 1)^T$ и дополнительном предположении, что в группу 1 поступает поток со скоростью e^{at}, если:
а) $a = 1$;
б) $a = 4$;
в) $a = 8$.

6.7. В городе живет 4,4 млн. мужчин и 5,6 млн. женщин. Смертность среди них 8 ‰ и 7 ‰ (в год); рождаемость у женщин 30 ‰ (в год), причем мальчиков и девочек рождается поровну. Дать прогноз численностей мужчин и женщин города на 10 лет вперед.

6.8. В регионе А естественный прирост составляет $-5\,‰$ (в год), в регионе Б $+10\,‰$ (в год), интенсивность переездов из Б в А равна $5\,‰$ (в год). Пусть в А и Б живут 8 и 2 млн. чел. соответственно. Дать прогноз численностей населения регионов на 20 лет вперед:

а) без учета внешней миграции;

б) если в А идет приток извне со скоростью 30 тыс. чел. в год.

6.9. В регионах А и Б естественный прирост составляет $12\,‰$ и $8\,‰$ (в год); интенсивность переездов из А в Б равна $7\,‰$ (в год), из Б в А — $5\,‰$ (в год), исходные численности населения регионов 10,6 и 9,4 млн. чел. Дать прогноз на 10 лет вперед.

6.10. В городах А и Б живет 2 и 3 млн. чел. За год из А в Б переехало 16 тыс. чел., из Б в А — 36 тыс. чел., причем численность населения в А выросла на 40 тыс. чел., а в Б сократилась на 5 тыс. чел. Оценить интенсивности переездов и естественный прирост в городах А и Б.

7. Объединение и расщепление групп.

Объединением U называется линейное отображение вектора численностей групп в пространство меньшей размерности, при котором некоторые компоненты складываются, образуя численности новых групп (без пересечений множеств объединяемых компонент). *Матрица объединения* U состоит из 0 и 1, причем в каждом столбце стоит ровно одна 1.

Расщеплением S называется линейное отображение вектора численностей групп в пространство большей размерности, обратное некоторому объединению U в том смысле, что $US = E$ (согласованность). Кроме того, *матрица расщепления* S должна быть неотрицательна, иметь суммы элементов по столбцам, равные единице, и не иметь нулевых строк.

Ведущим вектором называется такой положительный вектор $\vec{x}$, что $SU\vec{x} = \vec{x}$ (т.е. он восстанавливается без искажений).

По ведущему вектору $\vec{x}$ матрица S однозначно строится следующим образом. Пусть M_j — множество индексов групп, объединяющихся в группу j, а всего новых групп m, тогда полагаем $S = (s_{ij})$, где

$$s_{ij} = \frac{x_i}{\sum\limits_{l \in M_j} x_l}, \quad i \in M_j, \quad 1 \le j \le m,$$

а остальные элементы матрицы равны нулю.

Рассмотрим модель движения замкнутого населения с непрерывным временем $\vec{n}'(t) = C\vec{n}(t)$, и пусть $\tilde{n}(t) = U\vec{n}(t)$, $\tilde{C} = UCS$, тогда для того, чтобы выполнялось $\tilde{n}'(t) = \tilde{C}\tilde{n}(t)$, необходимо и достаточно выполнения *условия сводимости (совершенного агрегирования)*

$$UC = UCSU.$$

В таком случае говорят, что можно объединять группы (в соответствии с U). Поскольку S не определяется по U однозначно, речь идет о существовании такого S, что условие сводимости выполняется.

В качестве ведущего вектора можно взять структуру стабильного населения (даже если условие сводимости в модели не выполняется, это должно вести к убыванию искажений со временем), либо начальное условие (получаемое, например, из переписи населения).

7.1. Шесть групп объединяются в три: первая, вторая и четвертая — в первую, третья и пятая — во вторую, шестая — в третью. Найти:

а) матрицу объединения U;

б) матрицу расщепления S с ведущим вектором $(1, 3, 2, 4, 6, 5)^T$;

в) результат объединения и расщепления для $(1, 2, 3, 4, 5, 6)^T$.

7.2. В условиях задачи **6.7.** объединить группы мужчин и женщин и дать прогноз на 10 лет вперед, используя в качестве ведущего вектора:

а) начальное условие;

б) структуру стабильного населения.

При каком выборе прогноз ближе к ранее полученному результату?

7.3. В условиях задачи **6.9.** объединить региональные группы и дать прогноз на 10 лет вперед, используя в качестве ведущего вектора начальное условие. Сравнить с ранее полученным результатом.

7.4. (Т) Определить условия, при которых можно объединять группы:

а) для модели с двумя группами;

б) для модели с тремя группами, если объединяются первые две;

в) в общем случае.

7.5. Путем объединения свести модель к наименьшему возможному числу групп и найти матрицу $\tilde{C}$, если

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.6. Путем объединения свести модель к наименьшему возможному числу групп и найти матрицу $\tilde{C}$ в следующих случаях:

а)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Регулирование движения населения.

Задача регулирования движения населения ставится преимущественно в моделях движения кадров в организациях, разделенных на группы.

Целью регулирования является (асимптотическое) достижение заданной наперед *целевой структуры* населения $\vec{g}$. Средствами регулирования могут быть различные параметры модели.

Регулирование называется *достижимым*, если необходимые значения регулируемых параметров лежат в области возможных изменений (например, неотрицательны) и все промежуточные значения численностей групп от начала до желаемой структуры возможны (положительны и не слишком велики). Соответственно, и целевая структура в таком случае называется достижимой.

Регулирование называется *допустимым*, если при нем общая численность населения со временем не стремится к нулю. Соответственно, и целевая структура в таком случае называется допустимой.

В постоянных условиях, как правило, ищется также постоянное регулирование (не зависящее от времени). В этом случае целевая структура населения должна быть стабильной и устойчивой при соответствующих значениях регулируемых параметров. Иногда этого оказывается достаточно для определения их значений.

В задаче *регулирования набором* предполагается, что переходы между m группами описываются некоторой матрицей C, и кроме того, задан вектор интенсивностей выходов вовне из групп: $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$. Обозначим $W = (w_i \delta_{ij})$. Взамен вышедших из организации производится набор новых сотрудников, причем в i-ую группу принимается доля q_i от всех вышедших (в единицу времени), $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_m)$. Получаем

$$\vec{n}'(t) = (C - W)\vec{n}(t) + \vec{q}(\vec{w}, \vec{n}(t)).$$

Тогда для достижения целевой структуры $\vec{g}$ при постоянной численности организации получаем *вектор регу-*

лирования набором

$$\vec{q} = \frac{(W - C)\vec{g}}{(\vec{w}, \vec{g})},$$

а для организации с показателем роста α, т.е. $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$, верно

$$\vec{q} = \frac{(\alpha E + W - C)\vec{g}}{(\vec{w}, \vec{g})}.$$

Условием достижимости здесь является $\vec{q} \geq 0$.

При *регулировании внешним перераспределением* для общей модели движения населения

$$\vec{n}'(t) = C\vec{n}(t) + \vec{a}(t)$$

средством регулирования является вектор $\vec{a}(t)$. При общей численности населения $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$ получаем

$$\vec{a}(t) = N(t)(\alpha E - C)\vec{g}.$$

В формальной модели регулирования внешним перераспределением возможен выход $\vec{n}(t)$ из области неотрицательных значений, что накладывает дополнительные условия достижимости.

В задаче *регулирования перемещениями* средствами регулирования являются интенсивности (или вероятности) переходов между группами (т.е. элементы матрицы C) — все или часть их. Пусть $C = C(\theta)$, где θ — некоторый параметр (возможно, векторный). Прежде всего, находим показатель роста $k = (\vec{k}, \vec{g})$. Если $k \geq 0$, то регулирование допустимо. Далее, решаем уравнение $(C(\theta) - kE)\vec{g} = 0$. Если уравнение имеет решение θ_0, а остальные собственные значения $C(\theta_0)$ меньше k, то регулирование достижимо.

8.1. Пусть в организации имеются две группы (1 и 2), интенсивности переходов между которыми равны 1/3, а интенсивности уходов из них во внешний мир равны 1/6. Найти вектор регулирования набором $\vec{q}$ и проверить его достижимость для следующих целевых структур при постоянной численности организации:
а) $\vec{g} = (1/2, 1/2)^T$;
б) $\vec{g} = (2/5, 3/5)^T$;
в) $\vec{g} = (1/3, 2/3)^T$.
г) в случае, когда целевая структура недостижима, найти наименьший показатель роста $\alpha \geq 0$, при котором она становится достижимой, и соответствующий вектор набора $\vec{q}$.

8.2. (Т) Доказать, что множество достижимых структур в модели регулирования набором (с постоянным или растущим населением), всегда непусто и выпукло.

8.3. Решить задачу **8.1** при помощи регулирования внешним перераспределением $\vec{a}$ в предположении, что самостоятельных уходов во внешний мир не происходит.

8.4. Решить задачу **8.1** для организации, растущей экспоненциально с показателем $\alpha = 1/6$.

8.5. Решить задачу **8.3** для организации, растущей экспоненциально с показателем $\alpha = 1/6$.

8.6. (Т) В модели регулирования набором для населения из двух групп с интенсивностями переходов

l_1 из 1 в 2, l_2 из 2 в 1, и интенсивностями выбытия w_1, w_2 найти наименьший показатель роста $\alpha \geq 0$, при котором достижима целевая структура $\vec{g} = (g_1, g_2)^T$.

8.7. В организации работают три группы специалистов по квалификации: А (низкая), Б (средняя), В (высокая). Вероятности выбытия из них w_1, w_2, w_3; интенсивности переходов l_1 из А в Б, l_2 из Б в В. Оптимальное соотношение численностей задано вектором $\vec{g}$. Специалистов можно нанимать извне, причем их общая численность должна оставаться постоянной.

а) Найти набор для поддержания целевой структуры.

б) При каких интенсивностях повышения квалификации будет достаточно набирать только в группу А?

в) При каких интенсивностях выбытия будет достаточно набирать только в группу А?

8.8. Имеется три группы, интенсивности выходов из которых равны. Вероятность перехода из 1 в 2 равна p, из 1 в 3 — $1 - p$, $0 \leq p \leq 1$; переходы для каждой из групп 2 и 3 в остальные две группы равновероятны. В предположении, что можно регулировать p:

а) найти предельную структуру $\vec{s}$ для любого p;

б) найти p, обеспечивающее целевую структуру $\vec{g}$;

в) описать множество достижимых структур в данной модели.

8.9. Имеется три группы, интенсивности выходов из которых равны. Вероятность перехода из 1 в 2 равна p_1, из 1 в 3 — $1 - p_1$, из 2 в 1 — p_2, из 2 в 3 — $1 - p_2$, $0 \leq p_{1,2} \leq 1$; переходы из группы 3 в остальные две группы равновероятны. В предположении, что можно регулировать p_1 и p_2:

а) найти предельную структуру $\vec{s}$ для любых p_1, p_2;

б) найти p_1 и p_2, обеспечивающие целевую структуру $\vec{g}$;

в) описать множество достижимых структур в данной модели.

8.10. Пусть имеется замкнутая система из двух сообщающихся групп с показателями роста $+1$ и -1. Будет ли допустимым регулирование, направленное на достижение целевой структуры:

а) $\vec{g} = (3/5, 2/5)^T$;

б) $\vec{g} = (1/3, 2/3)^T$.

8.11. Имеется две группы, коэффициент естественного прироста в первой k_1, во второй k_2, интенсивность перехода из первой во вторую l_1, из второй в первую l_2. В предположении, что можно регулировать $l_1 \geq 0$, найти показатель роста k и значение l_1, соответствующие целевой структуре, в следующих случаях:

а) $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $l_2 = 1$, $\vec{g} = (1/2, 1/2)^T$;

б) $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $l_2 = 4$, $\vec{g} = (1/4, 3/4)^T$;

в) $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $l_2 = 1$, $\vec{g} = (1/2, 1/2)^T$;

г) $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $l_2 = 4$, $\vec{g} = (3/4, 1/4)^T$.

Во всех случаях проверить регулирование на допустимость и достижимость.

9. Мотивация движения населения

Предположим, что условия жизни в каждой группе населения могут быть охарактеризованы определенным набором факторов, и движение людей между группами мотивируется желанием улучшить эти условия.

Условия жизни в группе могут описываться либо вектором значений факторов $\vec{x}$, либо единым показателем — *уровнем жизни* u, который, в свою очередь, либо просто совпадает с уровнем доходов (как главным фактором выбора), либо представляет собой значение некоторой функции $u(\vec{x})$, оценивающей влияние различных факторов и называемой *функцией полезности.*

Функция предпочтения $f(\vec{x},\vec{y})$ описывает численно предпочтение, оказываемое человеком условиям $\vec{y}$ перед $\vec{x}$.

Простейшей функцией предпочтения является линейная:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = a + (\vec{b}, \vec{y} - \vec{x}), \quad \vec{b} \geq 0.$$

В этой модели предполагается, что интенсивности переходов между группами λ_{ij} могут зависеть от предпочтений нелинейно, но поддаются линеаризации, т.е. существуют такие строго возрастающие выпуклые вниз функции $G_i(x)$, $x > 0$, что

$$G_i(\lambda_{ij}) = f(\vec{x}_i, \vec{x}_j), \quad \lambda_{ij} = G_i^{-1}(f(\vec{x}_i, \vec{x}_j)),$$

где $\vec{x}_i$ — условия в i-ой группе. Тогда для любых i, j, k выполнено тождество:

$$G_i(\lambda_{ij}) = G_k(\lambda_{kk}) - G_k(\lambda_{ki}) + G_k(\lambda_{kj}).$$

В других моделях учитывается возможное разнообразие условий в группах, характеризуемое некоторыми распределениями случайных наборов факторов. Пусть, для простоты, условия характеризуются единым показателем, уровнем жизни. Рассмотрим функцию предпочтения

$$f(u,v) = \begin{cases} 1, & u < v, \\ 1/2, & u = v, \\ 0, & u > v. \end{cases}$$

Коэффициентом групповой привлекательности q_{ij} тогда называется величина $\mathbf{M}f(\xi_i, \xi_j)$, где ξ_i — случайный уровень жизни в i-ой группе. Если уровни жизни имеют непрерывные распределения F_i, то

$$q_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_j(u))\, dF_i(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(u)\, dF_j(u).$$

Для любых i, j выполнено тождество $q_{ij} + q_{ji} = 1$. Интенсивности переходов определяются как $\lambda_{ij} = c_i q_{ij} a_j$, где $c_i \geq 0$ (способность людей уйти из i-ой группы) и $0 \leq a_j \leq 1$ (доступность j-ой группы).

Коэффициенты групповой привлекательности инвариантны относительно любого монотонно возрастающего непрерывного преобразования над уровнем жизни во всех группах одновременно.

Возникающие в представленных моделях величины λ_{ii} можно интерпретировать как интенсивности переходов внутри групп (переездов в пределах города, региона и т.п.) либо игнорировать (при расчетах межгруппового движения населения).

Все рассмотренные выше модели относятся к *моделям, основанным на различиях* (когда движение населения между группами мотивируется различиями этих групп). Другой тип представляют собой *модели, основанные на сходстве* (когда движение населения между группами мотивируется сходством этих групп). Под сходством обычно имеется в виду некоторая близость, например, в смысле расстояния между населенными пунктами, регионами, странами и др.

Предположим, например, что группам соответствуют города и мы изучаем миграцию между ними.

Обобщенная гравитационная модель имеет вид:

$$v_{ij} = k\frac{n_i^{\alpha} n_j^{\beta}}{r_{ij}^{\gamma}},$$

где v_{ij} — скорость движения населения из i-го города в j-ый, n_i — численность населения i-го города, r_{ij} — расстояние между городами i и j, $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Подчеркнем, что речь идет именно о скорости движения, а не об интенсивности.

Модель называется гравитационной, поскольку сначала предполагалось $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$ (*модель Стюарта*), по аналогии с законом всемирного тяготения Ньютона.

9.1. Пусть уровень жизни определяется функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, $\alpha_{1,2} > 0$. Найти распределение уровня жизни, если факторы x_1, x_2 независимы и имеют распределения:
а) равномерные на $[0, r_1]$ и $[0, r_2]$, $r_{1,2} \geq 0$;
б) логнормальные с параметрами (μ_1, σ_1^2) и (μ_2, σ_2^2).

9.2. Имеются три группы. Интенсивности переходов из первой составляют 0,2; 0,4 и 0,8 соответственно. Восстановить матрицу интенсивностей переходов для модели с линейной функцией предпочтения, если линеаризующие функции $G_1(x) = x^2$, $G_2(x) = e^x - 2$, $G_3(x) = (x-2)/(3-x)$, $x > 0$.

9.3. Пусть в группе А средний уровень жизни a и в группе Б — b. Найти коэффициент групповой привлекательности q, если распределения уровня жизни в А и Б:

а) показательные;

б) равномерные (начиная от нуля);

в) Парето, т.е. вида $F(x) = 1 - (\lambda/x)^\alpha$, $x \geq \lambda$, с одинаковым параметром формы $\alpha > 1$;

г) нормальные с дисперсиями σ_1^2, σ_2^2.

9.4. (Т) При каком числе групп представление интенсивностей в виде $\lambda_{ij} = c_i q_{ij} a_j$ сокращает число независимых параметров?

9.5. (В) Найти величины c_i и q_{ij}, в предположении, что все группы полнодоступны (т.е. все $a_j = 1$), по матрице интенсивностей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 10 & 15 & 18 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.6. Движение населения между тремя городами описывается обобщенной гравитационной моделью с параметром $\gamma = 1$. Известны расстояния $r_{12} = 3$, $r_{13} = 2$, $r_{23} = 4$; численности населения городов $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 9$; скорости $v_{12} = 12$, $v_{13} = 27$, $v_{21} = 12$. Найти остальные параметры модели и скорость v_{32}.

9.7. Движение населения между тремя городами описывается обобщенной гравитационной моделью с параметром $\gamma = 2$. Известны расстояния $r_{12} = 2$, $r_{13} = 1$, $r_{23} = 1$; численности населения городов $n_1 = 8$, $n_2 = 1$, $n_3 = 27$; скорости $v_{12} = 2$, $v_{21} = 4$, $v_{23} = 36$. Найти остальные параметры модели и скорость v_{13}.

10. Социально-экономическое расслоение.

Коэффициентом фондов[10] k_f называется отношение среднего дохода самых богатых 10% населения к среднему доходу самых бедных 10%. Коэффициент фондов принимает любые значения, не меньшие 1.

Кривая Лоренца определяется как множество точек вида (x, y), каждая из которых означает, что доле x самого бедного населения принадлежит доля y всего дохода. Кривая Лоренца заключена в единичном квадрате под его диагональю, проходит через ее концы и выпукла вниз. Если известна функция распределения доходов $F(w)$, $w \geq 0$, кривая задается параметрически по формуле

$$\{(F(w), L(w), w \geq 0\}, \quad L(w) = \frac{1}{W}\int_0^w u\,dF(u),$$

где W — средний доход. Если таким образом получается множество из отдельных точек, их соединяют отрезками прямых (кусочно-линейная аппроксимация).

Коэффициент Джини G равен отношению площади между диагональю и кривой Лоренца к половине пло-

[10] Его называют также *децильным коэффициентом*.

щади единичного квадрата. Таким образом, получаем

$$G = 1 - 2\int_0^\infty L(w)\,dF(w).$$

Коэффициент Джини принимает значения от 0 до 1.

При социально-экономических исследованиях население иногда делят на группы одинаковой численности по возрастанию доходов. Если имеется n групп, доли дохода которых составляют $r_1, \ldots, r_n$, то коэффициент Джини можно оценить по формуле, следующей из кусочно-линейного приближения [11]:

$$G = 1 - \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n-1} s_i\right), \quad s_i = \sum_{j=1}^{i} r_j.$$

Коэффициенты фондов и Джини вводятся как меры социально-экономического расслоения общества и оценивают степень неравномерности распределения доходов у населения (чем она выше, тем коэффициенты больше).

Уровнем бедности z называют величину, лица с доходами не выше которой считаются бедными. Если уровень бедности установлен, то можно определить различные *показатели бедности*, например

$$P_\alpha = \int_0^z \left(1 - \frac{w}{z}\right)^{\alpha-1} dF(w), \quad \alpha \geq 1.$$

В частности, $P_1 = H$ — *доля бедных* во всем населении, $P_2 = D$ — *относительная нехватка доходов.*

[11] В силу выпуклости вниз кривой Лоренца оценка получается немного заниженной.

10.1. (Т) Найти коэффициент фондов и коэффициент Джини G при фиксированных наименьшем доходе a и среднем доходе W для следующих распределений:

а) равномерного;

б) Парето.

Построить соответствующие кривые Лоренца.

10.2. (Т) Пусть население делится на группы с доходами a и b, $a < b$, доли групп в общей численности населения равны p и q. Найти коэффициент Джини.

10.3. (Т) При каком соотношении численностей групп в **10.2** коэффициент Джини максимален? Найти его значение. Решить задачу при $a = 4$, $b = 9$.

10.4. Пусть население делится на две группы, численности которых относятся как 5:1, а доходы как 1:5.

а) Найти коэффициент Джини.

б) Как он изменится, если вторую группу обложить 10-процентным налогом в пользу первой?

10.5. При каком значении параметра формы распределения Парето 25% самых богатых людей имеют 50% всего дохода? Каковы в этом случае значения коэффициентов фондов и Джини?

10.6. По табл. 10.1 оценить коэффициент Джини[12].

10.7. Найти показатели бедности P_α, $\alpha = 1, 2, 3$ при уровне бедности $z = 2$ для распределения доходов:

а) равномерного на $[1, 5]$;

б) Парето $F(x) = 1 - x^{-3}$, $x \geq 1$;

[12] Реальное значение 0.394

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Модели роста численности населения.

1.1.

$$x(t) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}.$$

Решаем конечно-разностное уравнение $x(t) = x(t-1) + x(t-3)$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $x(1) = 2$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ равны $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. График решения представлен на рис. 1.

1.2.

$$x(t) = 2^t + 2^{t/2}(\cos\gamma t + \frac{1}{\sqrt{7}}\sin\gamma t), \text{ где } \gamma = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

Решаем конечно-разностное уравнение $x(t) = x(t-1) + 4x(t-3)$ с начальными условиями $x(0) = x(1) = x(2) = 2$. Корни характеристического уравнения $\lambda^3 - \lambda^2 - 4 = 0$ равны $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = (-1 \pm i\sqrt{7})/2 = \sqrt{2}(\cos\gamma \pm i\sin\gamma)$. График решения представлен на рис. 2.

1.3. Решаем соответствующие дифференциальные уравнения.

а)

$$x(t) = \frac{x_0 l e^{lt}}{(l - x_0) + x_0 e^{lt}};$$

б)

$$x(t) = \frac{x_0 l e^{l^\alpha t}}{((l^\alpha - x_0^\alpha) + x_0^\alpha e^{\alpha l^\alpha t})^{1/\alpha}};$$


Рост числа пар кроликов в модели Фибоначчи
Число пар кроликов
время, шаг
0
20
40
60
80
100
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Рис. 1:

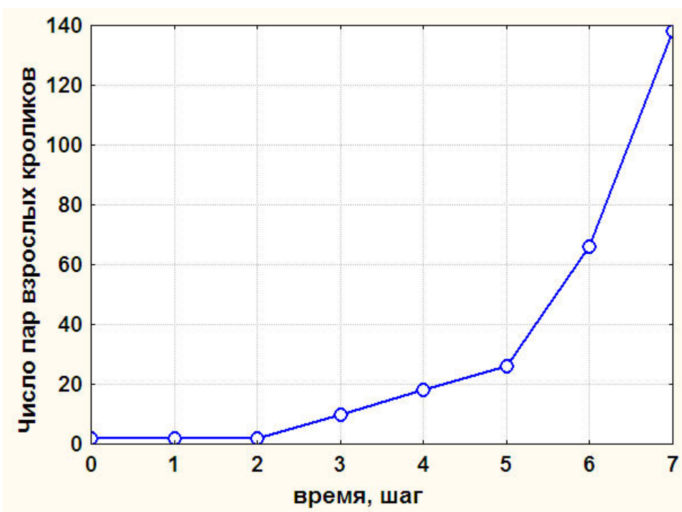
Число пар взрослых кроликов
время, шаг
0
20
40
60
80
100
120
140
0 1 2 3 4 5 6 7

Рис. 2:

в)
$$x(t) = l(x_0/l)^{e^{-t}}.$$

График решения **1.3а** (логистическая кривая) при $x_0 = 0,05$, $l = 1$ представлен на рис. 3.

1.4. $T = 1/(cx_0)$. Решая дифференциальное уравнение $x'(t) = cx^2$, получаем формально $x(t) = x_0/(1 - cx_0t)$.

1.5. *Указание:* разбить временную ось на отрезки длины ε и действовать по индукции.

1.6. а) 8 млрд. чел.; 6 млрд. чел.; б) 2005 год; 2057 год; в) 156 млн. чел., в 1956 г.; г) 12,9 млрд. чел.; д) до 1965 года лучше первая модель, в 1965–1990 гг. прогнозы мало отличаются от данных и друг от друга, после 1990 года лучше вторая.

Графики модельных прогнозов и реальных данных представлены на рис. 4. Через DN обозначена разность между предсказаниями моделей I и II.

1.7. а) примерно 5:3; б) через 38,5 лет.

1.8. 63,2 млн. чел.; через 57,6 лет. Находится минимум функции $x(t) = 100e^{-0,02t} + 10e^{0,02t}$.

1.9. От 109,4 до 111,6 млн. чел.

1.10. а) $\tilde{x}(t) = x_0 \sum\limits_{i=1}^{n} p_i e^{k_i t}$; б) $\tilde{x}(t) = x_0 \exp\{k_0 t + \sigma^2 t^2/2\}$; в) $\tilde{x}(t) = x_0/(1 - k_0 t)$, $0 \le t < 1/k_0$. Во всех случаях находим $\tilde{x}(t) = x_0 \mathbf{M} e^{kt}$.

2. Модели смертности.

2.1.

а)
$$\bar{F}(x) = \left(1 - \frac{x}{b}\right)^a, \quad M(x) = \frac{b - x}{a + 1};$$

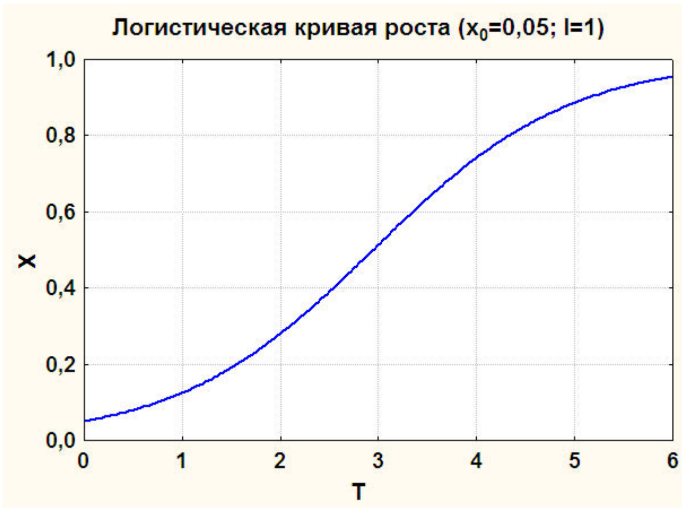
Логистическая кривая роста (x0=0,05; l=1)
X
T
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0
1
2
3
4
5
6

Рис. 3:

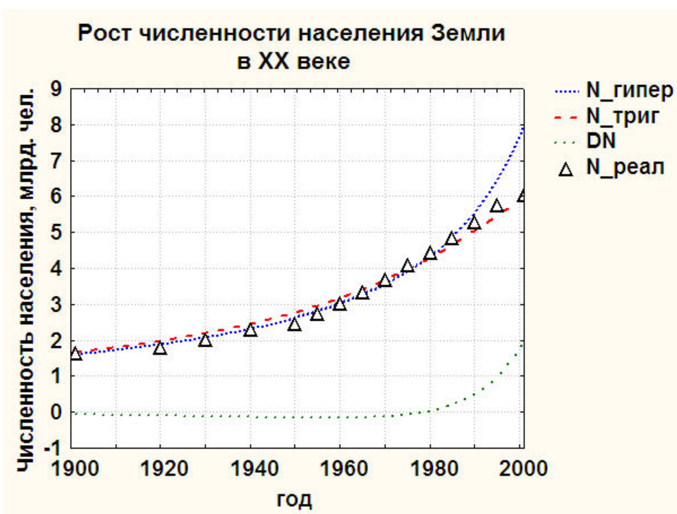
Рост численности населения Земли
в XX веке
Численность населения, млрд. чел.
год
N_гипер
N_триг
DN
N_реал
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
1900
1920
1940
1960
1980
2000

Рис. 4:

б) При $0 \le x < x_0$:

$$\bar{F}(x) = \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{-c},$$

$$M(x) = \frac{b - x_0}{a+1}\left(\frac{l+x}{l+x_0}\right)^{c} + \frac{l+x}{1-c}\left(\left(\frac{l+x_0}{l+x}\right)^{1-c} - 1\right);$$

при $x_0 \le x < b$:

$$\bar{F}(x) = \left(1 + \frac{x_0}{l}\right)^{-c}\left(\frac{b-x}{b-x_0}\right)^{a}, \quad M(x) = \frac{b-x}{a+1}.$$

2.2. а) 2/3; $26\frac{2}{3}$; б) 1/3; $6\frac{2}{3}$. Используем результаты **2.1а**, находим недостающие параметры из формулы $T_0 = M(0) = b/(a+1)$.

2.3. Пусть $z = x/b$, тогда получаем

$$d(x) = \frac{ax^{a-1}}{b^a - x^a},\ M(x) = T_0\left(\frac{1-z}{1-z^a} - \frac{z}{a}\right),\ T_0 = \frac{ab}{a+1};$$

а) 0,94; 29,4 лет; б) 0,64; 19,5 лет.

Формулы для $d(x)$, $M(x)$ в **2.1а** и **2.3** совпадают при $a = 1$.

2.4. а) 0,005; б) 0,024; в) 0,108.

2.5. а) $\bar{F}(x) = \exp\{-ax - (b/c)(e^{cx} - 1)\}$; б) 0,009. Обозначим $u = e^{40c}$, $v = b/c$, тогда $\bar{F}(40) = e^{-v(u-1)}$, $\bar{F}(80) = e^{-v(u^2-1)}$. Логарифмируя и решая соответствующие системы уравнений, получаем u и v, а затем $\bar{F}(90) = e^{-v(u^{9/4}-1)}$.

2.6.

$$d_1 = \frac{d_A + d_C - d_B}{2}, d_2 = \frac{d_A + d_B - d_C}{2}, d_3 = \frac{d_B + d_C - d_A}{2};$$

$$\bar{F}_1 = \sqrt{\frac{\bar{F}_A \bar{F}_C}{\bar{F}_B}}, \bar{F}_2 = \sqrt{\frac{\bar{F}_A \bar{F}_B}{\bar{F}_C}}, \bar{F}_3 = \sqrt{\frac{\bar{F}_B \bar{F}_C}{\bar{F}_A}}.$$

Решаем систему трех линейных уравнений относительно d_1, d_2, d_3 и пользуемся выражением функции дожития через силу смертности.

2.7. 5,8 ‰. По результатам **2.6** находим $d_1 = 2$ ‰; $d_2 = 1$ ‰; $d_3 = 3$ ‰. Снижая влияние первой причины на 10%, получаем $d_1^* = 1,8$ ‰ и $d_D^* = d_1^* + d_2 + d_3$.

2.8. *Указание:* продифференцировать выражение для $M(y)$.

2.9. При постоянной силе смертности d на (y_1, y_2) получаем

$$M(y_1) = e^{-(y_2-y_1)d} M(y_2) + \frac{1 - e^{-(y_2-y_1)d}}{d};$$

$$M(y_2) = e^{(y_2-y_1)d} M(y_1) - \frac{e^{(y_2-y_1)d} - 1}{d}.$$

2.10. 43,7 лет; 0,7 лет. Пользуясь формулой из **2.9**, получаем $M(25) \approx 43,69$ (года). С другой стороны, более простое линейное приближение $M(y+h) \approx (1 + hd)M(y) - h$, следующее из дифференциального уравнения, дает $M(25) \approx 43,72$ (года), так что результаты почти не отличаются.

2.11. а) 65, 75 и 70 лет; б) 60, 72 и 66 лет.

Данные о смертности из табл. 2.4 и 2.5 графически отображены на рис. 5 и 6.

2.12. а) 15, 19 и 18 лет; б) 13, 18 и 16 лет.

2.13. От 20 до 55 лет.

2.14. Уменьшится на 1 год.

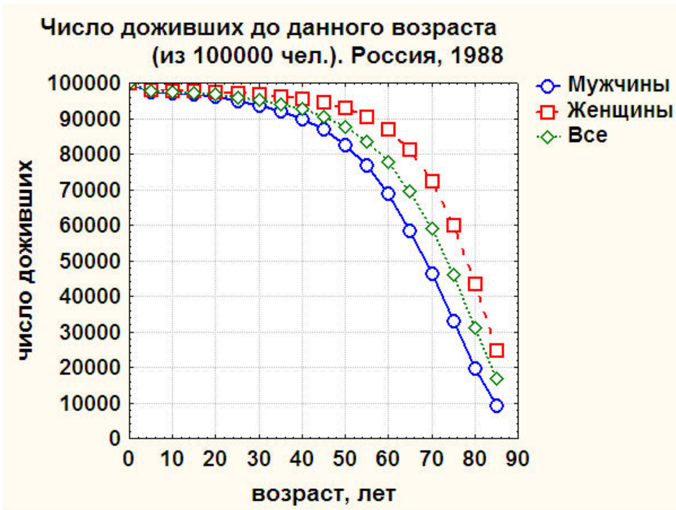
Число доживших до данного возраста
(из 100000 чел.). Россия, 1988
Мужчины
Женщины
Все
число доживших
возраст, лет
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
100000
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

Рис. 5:

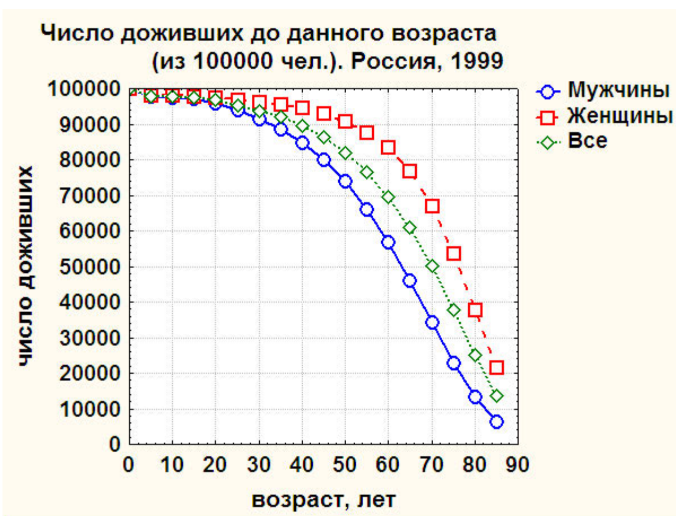
Число доживших до данного возраста
(из 100000 чел.). Россия, 1999
Мужчины
Женщины
Все
число доживших
возраст, лет
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
100000
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

Рис. 6:

2.15. В возрасте 0–4 лет болезни органов дыхания, в 5–34 лет несчастные случаи, в 35–49 лет новообразования, от 50 лет болезни системы кровообращения.

2.16. а) 0,72; 0,89; б) 0,29; 0,50. Используем формулу условной вероятности.

2.17. а) 0,59; 0,86; б) 0,23; 0,45.

2.18. 2/3. С помощью результатов **2.3** находим неизвестные параметры для мужчин и женщин: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$. Пусть случайная продолжительность жизни мужчины ξ_1, женщины ξ_2, тогда искомая вероятность

$$p = \mathbf{P}(\xi_1 < \xi_2) = \int_0^{90} \left(\frac{x}{90}\right)^2 d\left(\frac{x}{90}\right)^4.$$

2.19. а) 0,9; б) 0,86; в) 0,78. Графики логитов и функции дожития представлены на рис. 7 и рис. 8.

2.20. От 9,8 до 10,2 тыс. смертей. Используем сначала пуассоновское, а затем нормальное приближение.

3. Модели рождаемости.

3.1. Гипотеза принимается, т.к. $\chi^2_{\text{набл}} \approx 11,06 < \chi^2_{\text{кр}}(0,01;4) = 13,3$.

3.2.

а) $N_b = A/b$, $T_m = x_0 + 1/b$;

б) $N_b = A_1/b_1 + A_2/b_2$,

$$T_m = \frac{A_1/b_1^2 + A_2/b_2^2}{A_1/b_1 + A_2/b_2} + x_0;$$

в) $N_b = A(x_1 - x_0)^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1)$,

$$T_m = x_0 + (x_1 - x_0)\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}.$$

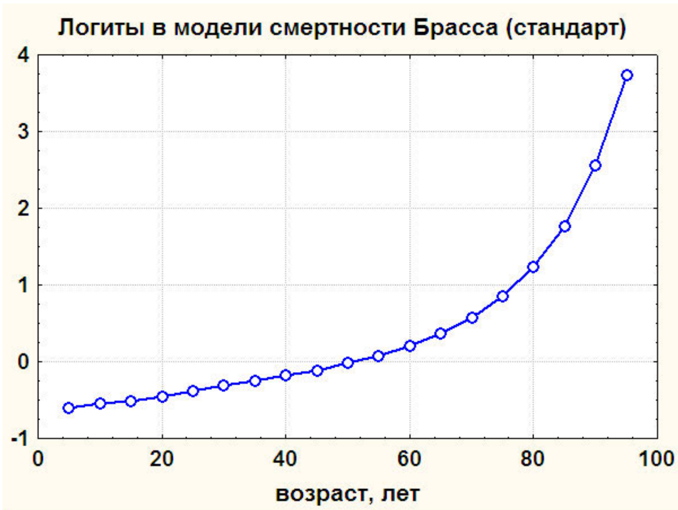
Логиты в модели смертности Брасса (стандарт)
4
3
2
1
0
-1
0
20
40
60
80
100
возраст, лет

Рис. 7:

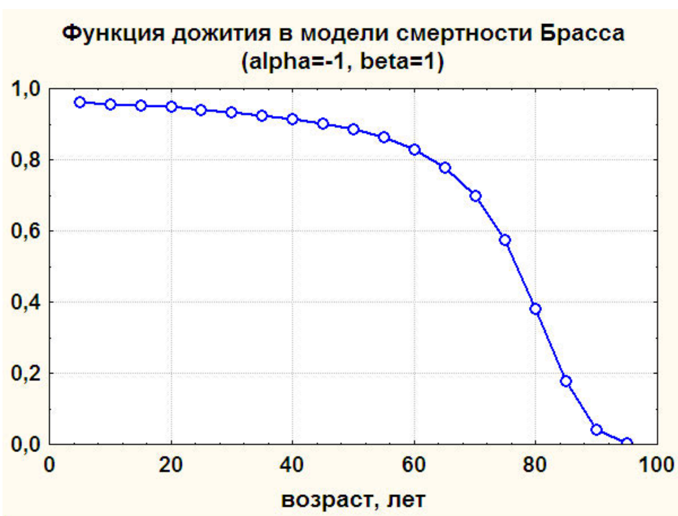
Функция дожития в модели смертности Брасса
(alpha=-1, beta=1)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0
20
40
60
80
100
возраст, лет

Рис. 8:

3.3. а) $A = N_b/98826,75$; $x_0 = T_m - 13,2$. Используя формулы из **3.2в**, получаем $N_b = (33^4/12)A$, $T_m = x_0 + 33 \cdot (2/5)$, откуда и выражаем параметры; б) $f_{\max} \approx 0,108$ при $x_{\max} = 24$ (года). Определяем параметры A, t_0 по выведенным формулам. Точку максимума находим дифференцированием. Заметим, что в модели Брасса всегда $x_{\max} = x_0 + 11$.

График возрастной функции фертильности в модели Брасса при условиях **3.3б** представлен на рис. 9. Видно, что модель завышает рождаемость в младших возрастах (до 15 лет).

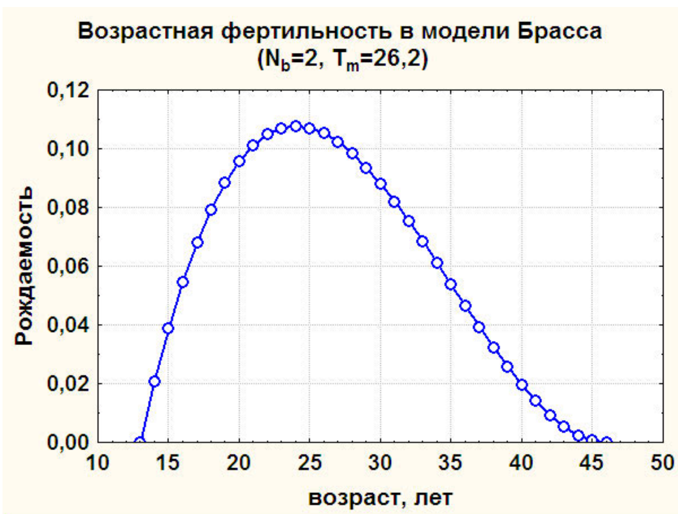

Рис. 9:

3.4.

а) $q = \min\{p_0/p_2, 1\}$;

б)

$$q = \frac{\sqrt{(p_2+p_3)^2+4p_0p_3}-(p_2+p_3)}{2p_3};$$

в) $q = \min\{1/\mu, 1\}$.

3.5. а) $0,156$; б) $0,09$; в) $0,067$. Во всех случаях используем результат **3.4б**.

3.6. 2,15 детей; 25,5 лет. Для определения среднего возраста матерей можно разбить их на группы по полному числу детей, вычислить среднее в каждой, а затем взять взвешенную сумму и нормировать ее на долю женщин, имеющих детей $(1-p_0)$.

3.7. а) биномиальное с параметрами $n = 4$, $p = 0,309$; б) пуассоновское со средним 1,03. Используем формулы для случайного числа независимых случайных слагаемых (индикаторов).

3.8.

а)

$$\mu = \frac{b}{(1-c)^2}; \quad q = \frac{1-(b+c)}{c(1-c)} \text{ при } \mu > 1, \quad q = 1 \text{ иначе};$$

б) $\mu = 1,25$; $q \approx 0,83$.

в) $b = 0,18$; $c = 0,7$; $q = 4/7$. Приравнивая μ и p_0 заданным значениям, получаем систему уравнений относительно b и c.

3.9. а) 24,2 года. В группе женщин, имеющих $r \geq 1$ детей, средний возраст матерей оказывается равным $21 + r$. Используя формулы пуассоновского распределения, получаем $T_m = 21 + 3/(1-e^{-3})$. б) Уменьшится на 0,3 года. Здесь получаем $T_m = 22 + 1,5/(1-e^{-1,5}) \approx 23,9$.

3.10. а) 2,12 детей; 25,9 лет; б) 2,06 детей.

3.11. а) 1,17 детей; 25,6 лет; б) 1,13 детей.

Возможные небольшие расхождения результатов **3.10,11** с другими источниками могут быть вызваны грубостью используемого приближения и/или различиями в определении и методиках вычисления.

3.12. а) гипотеза отвергается; б) гипотеза принимается. В обоих случаях применяем критерий хи-квадрат (как и в **3.1**).

3.13. Да, можно утверждать, что в городе А средняя рождаемость больше. В предположении равенства средних рождаемостей, с учетом отношения численностей населения городов, рождение очередного ребенка с вероятностью 1/3 происходит в А и с вероятностью 2/3 в Б. Всего произошло 30 тыс. рождений. Применяя критерий хи-квадрат, получаем $\chi^2_{\text{набл}} = 6 > \chi^2_{\text{кр}}(0,05;1) = 3,8$.

3.14. От 9,8 до 10,2 тыс. рождений. Используем сначала пуассоновское, а затем нормальное приближение.

3.15. Примерно от 5020 до 5280 мальчиков.

4. Модели движения активного населения.

4.1.

а)

$$\vec{n}(t) = \frac{n_1^0 + n_2^0}{a+b}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \frac{an_1^0 - bn_2^0}{a+b}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-(a+b)t};$$

б)

$$\vec{n}(t) = \frac{n_1^0 + n_2^0}{a+b}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \frac{an_1^0 - bn_2^0}{a+b}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1-(a+b))^t.$$

Условия неотрицательности:

$$a + b \leq 2, \quad an_1^0 \geq (b-1)n_2^0, \quad bn_2^0 \geq (a-1)n_1^0.$$

Обозначим $\lambda = 1 - (a+b)$, тогда в любом случае верно $\lambda < 1$. Прежде всего, необходимо потребовать $\lambda \geq -1$, иначе решение идет "вразнос", неизбежно заходя в область отрицательных значений. Далее, необходимо потребовать $\vec{n}(1) \geq 0$. Этого оказывается достаточно, поскольку все значения $\vec{n}(t)$ лежат либо на отрезке, соединяющем точки $\vec{n}(0)$ и $\vec{n}(1)$ (при $\lambda < 0$), либо на отрезке, соединяющем $\vec{n}(0)$ и $\vec{n}(\infty) \geq 0$ (при $\lambda > 0$). При $\lambda = 0$ с момента $t = 1$ наступает стабилизация.

в) $a + b = 1$.

4.2.

а)

$$\vec{s}(\infty) = \frac{1}{bc + ac + ab}\begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix};$$

б)

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t};$$

в)

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{5}{98}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t} + \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-21t}.$$

График решения **4.2в** представлен на рис. 10.

4.3.

а)

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} a-b \\ -a \\ b \end{pmatrix} e^{-at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-bt}.$$

б)

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

График решения **4.3б** представлен на рис. 11.

4.4.

а)

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} 0,955^t \quad \text{(млн. чел.)};$$

б) А: 0,9 млн. чел., Б: 0,9 млн. чел., В: 0,5 млн. чел.

в) А: 1,8 млн. чел., Б: 0,3 млн. чел., В: 0,2 млн. чел.

График решения представлен на рис. 12. На самом деле, интенсивности переходов меньше по величине, подвержены сезонным колебаниям и т.п.

4.5. а) 10%; б) в 1,9 раза.

5. Модели естественного движения населения.

5.1. Примем среднее число пар молодых за n_1, среднее число пар взрослых за n_2, и $\vec{n} = (n_1, n_2)^T$, тогда

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \mu(1-p) \\ 1 & 1-p \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(t+1) = L\vec{n}(t).$$

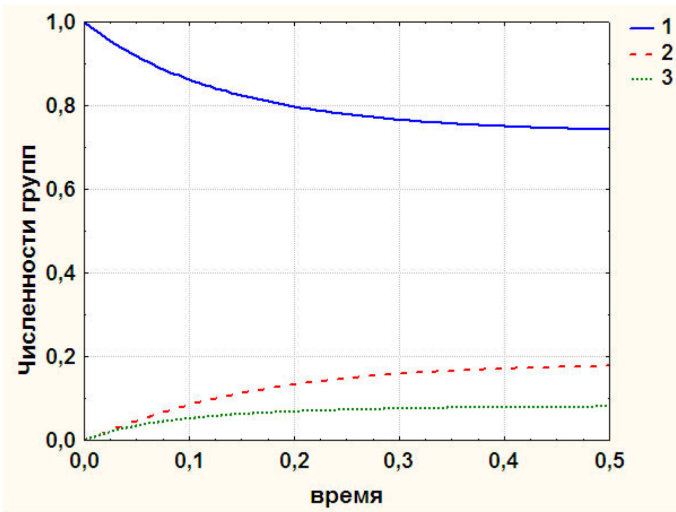
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
Численности групп
время
1
2
3

Рис. 10:

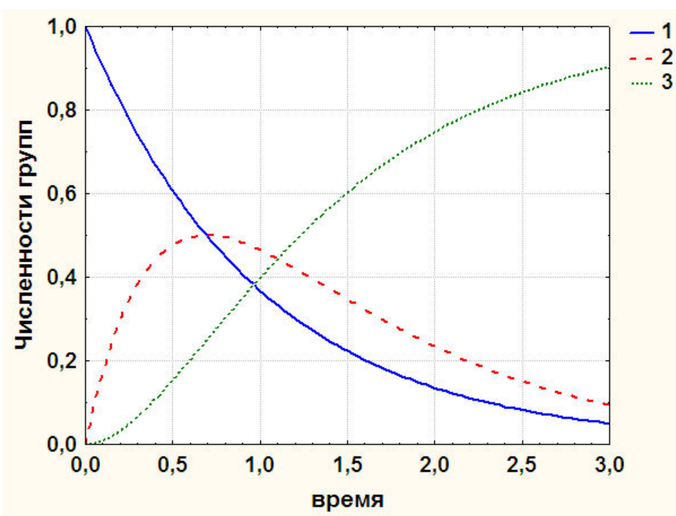
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
Численности групп
время
1
2
3

Рис. 11:

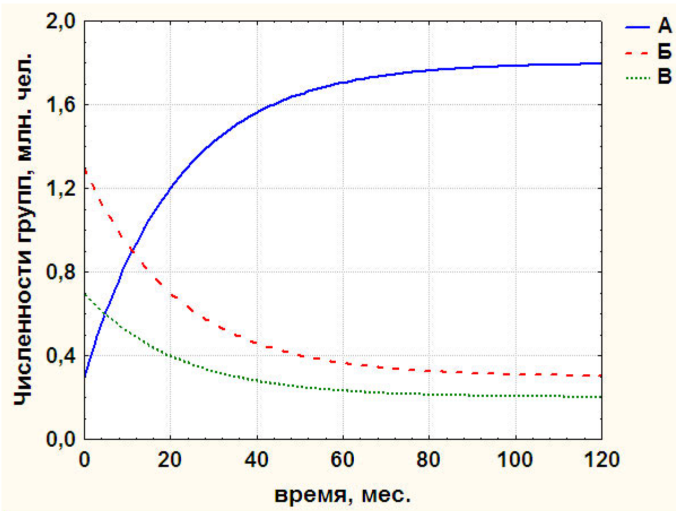

Рис. 12:

Собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = (q \pm \sqrt{q(q+4\mu)})/2, \quad q = 1 - p.$$

а) $(5/7)1,5^t + (2/7)(-0,6)^t$; б) $(5/8)2^t + (3/8)(-1,2)^t$; в) $(8/13)2,4^t + (5/13)(-1,5)^t$; г) $(4/7)2^t + (3/7)(-1,5)^t$; д) $(2/3) + (1/3)(-0,5)^t$.

Строго в геометрической прогрессии среднее число пар (молодых и взрослых) растет при $n_1^0 = (\lambda_1 - q)n_2^0$, т.е. когда $\vec{n}(0)$ — собственный вектор L, соответствующий λ_1. К конечному ненулевому пределу стремится при $\mu = p/q$, $0 < p < 1$: тогда $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_2| < 1$.

5.2. $z(t,x) = ce^{k(t-x)}\bar{F}(x)$, где $c > 0$, $\bar{F}(x)$ — функция дожития, k — показатель роста, единственный корень уравнения

$$I(\lambda) = \int_0^\infty b(x)\bar{F}(x)e^{-\lambda x}\,dx = 1;$$

условие роста:

$$I(0) = \int_0^\infty b(x)\bar{F}(x)\,dx > 1,$$

из него следует $k > 0$, поскольку $I(\lambda)$ убывает. Заметим, что $I(0)$ есть нетто-коэффициент рождаемости (в расчете на одного человека).

5.3. а) 31,9 лет; б) 43,6 года. Удобно сделать замену $u = x/100$, тогда

$$T_e^{(\text{а})} = 100\frac{\int_0^1 u(1-u^2)e^{-u}\,du}{\int_0^1 (1-u^2)e^{-u}\,du}, T_e^{(\text{б})} = 100\frac{\int_0^1 u(1-u^2)e^{u}\,du}{\int_0^1 (1-u^2)e^{u}\,du}.$$

Графики соответствующих структур представлены на рис. 13.

5.4. $z_1(t,x) = c_1\bar{F}_1(x)e^{k(t-x)}$, $z_2(t,x) = c_2\bar{F}_2(x)e^{k(t-x)}$, где $\bar{F}_1(x)$ и $\bar{F}_2(x)$ — функции дожития женщин и мужчин, k — единственный корень уравнения

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty b_1(x)\bar{F}_1(x)e^{-\lambda x}\,dx = 1;$$

условие роста $I_1(0) > 1$. Заметим, что $I_1(0)$ есть нетто-коэффициент рождаемости девочек, т.е. нетто-коэффициент воспроизводства.

5.5. а) $b/(a+2)$; б) $(b/2)(a+1)/(a+2)$.

5.6. а) 0,514 для мальчиков и 0,486 для девочек; б) около 35 лет.

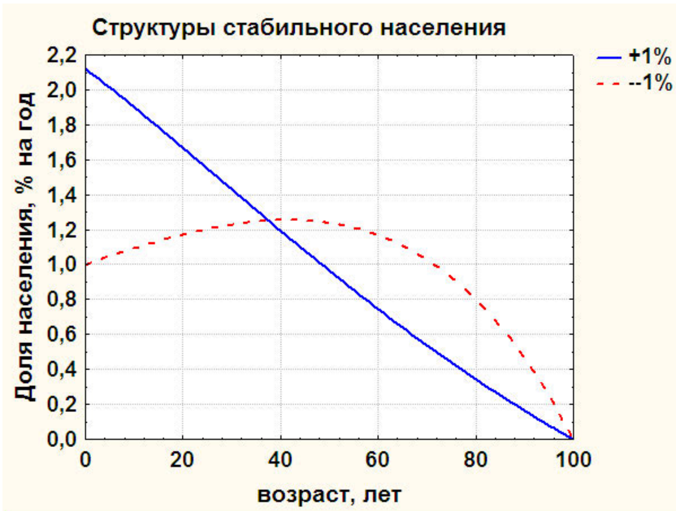

Рис. 13:

5.7. Максимумы: 10–14 лет (1986–1990 гг.), 40–44 года (1956–1960 гг.), 60–64 года (1936–1940 гг.), 70–74 года (1926–1930 гг.). Минимумы: 30–34 года (1966–1970 гг.), 55–59 лет (1941–1945 гг.), 65–49 лет (1931–1935 гг.).

Возрастная структура населения России представлена столбчатой диаграммой на рис. 14.

5.8. 1,2 млн. рождений.

5.9. 2,2 млн. смертей.

5.10. а) 0,92; б) 0,32; в) 0,02. График возрастной динамики репродуктивного потенциала для данной модели представлен на рис. 15. Видно, что потенциал сначала растет (что обусловлено значением $k > 0$), а затем убывает до нуля.

5.11. а) $A = (31/60)e^{0,3}$, $c(20) = e^{-0,7}$; б) $A = (22/63)e^{1/3}$; $c(24) = e^{-2/3}$. Используем условие $I(0) = 1$.

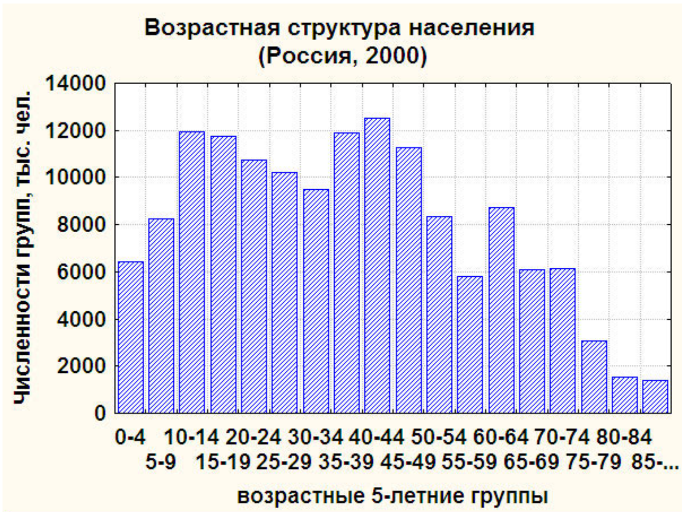
Возрастная структура населения
(Россия, 2000)
Численности групп, тыс. чел.
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0-4 10-14 20-24 30-34 40-44 50-54 60-64 70-74 80-84
5-9 15-19 25-29 35-39 45-49 55-59 65-69 75-79 85-...
возрастные 5-летние группы

Рис. 14:

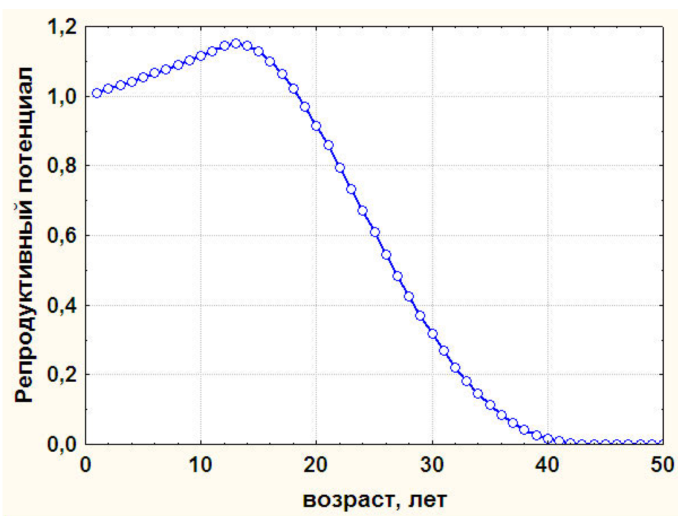
Репродуктивный потенциал
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0
10
20
30
40
50
возраст, лет

Рис. 15:

6. Общие модели движения населения.

6.1. Равновесное состояние: l молодых и l/μ взрослых.

а) Пусть $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+4\mu})/2$, тогда

$$n_1(t) = (\mu\nu - l)\frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2} + l,$$

$$n_2(t) = \left(\nu - \frac{l}{\mu}\right)\frac{\lambda_1^{t+1} - \lambda_2^{t+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{l}{\mu}.$$

б) Обозначим $r = \nu - l/\mu$, тогда популяция растет при $r > 0$, вымирает при $r < 0$, стационарна при $r = 0$ (что следует из формул).

6.2. 5 молодых, 3 взрослых, 4 старых.

6.3. Сначала динамика описывается уравнениями

$$n_1(t) = \frac{l}{a} + \left(n_1^0 - \frac{l}{a}\right)e^{at}, \quad n_2(t) = -\frac{l}{b} + \left(n_2^0 + \frac{l}{a}\right)e^{bt}.$$

Однако если $an_1^0 < l$, то начиная с момента

$$t_{\text{cr}} = -\frac{1}{a}\ln\left(1 - \frac{an_1^0}{l}\right)$$

группа 1 становится пуста, и в дальнейшем

$$n_1(t) = 0, \quad n_2(t) = n_2(t_{\text{cr}})e^{b(t - t_{\text{cr}})}.$$

6.4. Обозначим $u = k_1 - l_1 + k_2 - l_2$, $v = k_1k_2 - k_1l_2 - k_2l_1$. Популяция растет, если либо $u > 0$ и $v \geq 0$, либо $v < 0$; вымирает, если $u < 0$ и $v > 0$; стремится к ненулевому пределу, если $u \le 0$, $v = 0$. Поведение определяется знаками корней характеристического уравнения, имеющего в данном случае вид $\lambda^2 - u\lambda + v = 0$.

6.5. Решаем системы линейных однородных дифференциальных уравнений:

а)

$$\vec{n}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}, \quad k = 3, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix}1/3\\2/3\end{pmatrix};$$

б)

$$\vec{n}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad k = 3, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix};$$

в)

$$\vec{n}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t}+c_2\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}e^{-2t}, \quad k = 7, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix};$$

г)

$$\vec{n}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{8t}+c_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{t}, \quad k = 8, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix}1/4\\3/4\end{pmatrix};$$

д)

$$\vec{n}(t) = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}e^{-8t},\ k = -1,\ \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

6.6. Решаем системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

а)

$$\vec{n}(t) = \frac{19}{20}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{6t}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}e^{t}, \quad N(t) \sim \frac{19}{10}e^{6t}.$$

б)

$$\vec{n}(t) = \frac{9}{8}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{6t} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{4t},$$

$$N(t) \sim \frac{5}{2}e^{6t}, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix};$$

в)

$$\vec{n}(t) = \frac{7}{8}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{6t} - \frac{1}{24}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{8t},$$

$$N(t) \sim \frac{1}{3}e^{8t}, \quad \vec{s}(\infty) = \begin{pmatrix}3/4\\1/4\end{pmatrix}.$$

6.7. 4,90 млн. мужчин и 6,06 млн. женщин. Решение имеет вид

$$\vec{n}(t) = 0,35\begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix}e^{0,008t} - 0,85\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-0,008t}.$$

6.8. а) А: 7,44 млн. чел., Б: 2,21 млн. чел. Решение имеет вид

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{0,005t} + 7\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-0,005t}.$$

б) А: 8,01 млн. чел., Б: 2,21 млн. чел. В данном случае внешняя миграция компенсирует естественную убыль в группе А, но не влияет на численность группы Б, поскольку нет обратных переходов.

6.9. А: 11,65 млн. чел., Б: 10,47 млн. чел. Решение имеет вид

$$\vec{n}(t) = 10,1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{0,01t} + 0,1\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}e^{-0,002t}.$$

График решения представлен на рис. 16. Видно, что на рассматриваемом отрезке времени рост численностей регионов близок к линейному, так что удобней использовать линейное приближение.

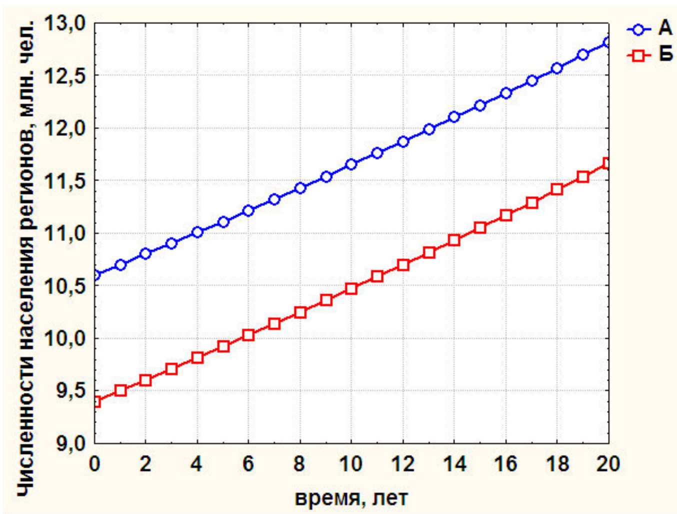

Рис. 16:

6.10. Интенсивность переезда из А в Б — 8 ‰, из Б в А — 12 ‰; естественный прирост в А — 10 ‰, в Б — 5 ‰ (в год). *Указание:* чтобы найти естественный прирост в группе, надо вычесть из итогового прироста миграционный.

7. Объединение и расщепление групп.

7.1.

а)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б)

$$S = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

в) $(7/8, 21/8, 2, 7/2, 6, 6)^T$.

7.2. а) 4,83 млн. мужчин и 6,14 млн. женщин. Объединяя мужчин и женщин, получаем население с показателем роста 9,36 ‰. б) 5,24 млн. мужчин и 5,59 млн. женщин. Структура стабильного населения имеет вид $(15/31, 16/31)^T$, показатель роста 8 ‰.

На рассматриваемом отрезке времени выбор начального условия в качестве ведущего вектора дает более точный прогноз.

7.3. А: 11,73 млн. чел., Б: 10,40 млн. чел. Объединяя региональные группы, получаем население с показателем роста 10,12 ‰. Относительная ошибка прогноза (по сравнению с ранее полученным) менее 1%.

7.4. а) $k_1 = k_2$; б) $k_1 = k_2$, $\lambda_{13} = \lambda_{23}$; в) если объединяются группы с индексами из множества M, то должны выполняться условия:

- все k_i, $i \in M$, равны;

- для любого $j \notin M$ все λ_{ij}, $i \in M$, равны.

Здесь имеем $\lambda_{ij} = c_{ji}$, $k_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$.

7.5. Можно объединить группы первую с третьей, вторую с пятой, четвертая группа остается без изменений. Нумеруя новые группы в той же последовательности, получаем

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверяем условия **7.4в**. Прежде всего находим $k_1 = k_3 = k_4 = 11$ и $k_2 = k_5 = 9$. Имеет смысл пытаться объединять группы только с одинаковыми k_i. Далее проверяем равенства для λ_{ij} на каждом множестве индексов. Оказывается, в частности, что первую и третью группы объединить можно, но четвертую к ним присоединить уже нельзя, поскольку, например, $\lambda_{12} = 2 \neq \lambda_{42} = 1$.

7.6.

а) Можно объединить вторую, третью и четвертую группы,

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

б) Можно объединить первую и вторую группы,

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Регулирование движения населения.

8.1. а) $(1/2, 1/2)^T$; б) $(0, 1)^T$; в) $(-1/3, 4/3)^T$, недостижимо. В последнем случае наименьшее α, при котором структура достижима, равно 1/6, тогда $\vec{q} = (0, 2)^T$. *Указание:* решить неравенство $\vec{q}(\alpha) \geq 0$.

8.2. *Указание:* рассмотреть условие $\vec{q} \geq 0$.

8.3. а) 0, т.е. регулирование не требуется; б) $N_0(-1/15, 1/15)^T$; в) $N_0(-1/9, 1/9)^T$.

8.4. а) $(1, 1)^T$; б) $(2/5, 8/5)^T$; в) $(0, 2)^T$.

8.5. а) $N_0 e^{t/6}(1/12, 1/12)^T$; б) $N_0 e^{t/6}(0, 1/6)^T$; в) $N_0 e^{t/6}(-1/18, 2/9)^T$.

8.6. $\alpha = \max\{0, l_2 g_2/g_1 - (w_1 + l_1), l_1 g_1/g_2 - (w_2 + l_2)\}$. Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} (\alpha + w_1 + l_1)g_1 - l_2 g_2 \geq 0 \\ (\alpha + w_2 + l_2)g_2 - l_1 g_1 \geq 0 \\ \alpha \geq 0 \end{cases}.$$

8.7.

а)

$$\vec{q} = \frac{1}{w_1 g_1 + w_2 g_2 + w_3 g_3} \begin{pmatrix} (w_1 + l_1)g_1 \\ (w_2 + l_2)g_2 - l_1 g_1 \\ w_3 g_3 - l_2 g_2 \end{pmatrix};$$

б) $l_1 = w_3 g_3/g_2$; $l_2 = (w_2 g_2 + w_3 g_3)/g_1$;

в) w_1 любое; $w_2 = l_1 g_1/g_2 - l_2$; $w_3 = l_2 g_2/g_3$.

8.8. а) $\vec{s} = (1/3, 2(1+p)/9, 2(2-p)/9)^T$; б) $p = 3(g_2 - g_3/2)$; в) отрезок, соединяющий точки $(1/3, 2/9, 4/9)^T$ и $(1/3, 4/9, 2/9)^T$.

8.9. а)

$$\vec{s} = \frac{1}{4 + p_1 + p_2 - 2p_1 p_2} \begin{pmatrix} 1 + p_2 \\ 1 + p_1 \\ 2(1 - p_1 p_2) \end{pmatrix};$$

б) $p_1 = (g_2 - g_3/2)/g_1$; $p_2 = (g_1 - g_3/2)/g_2$; в) область на плоскости $g_1 + g_2 + g_3 = 1$, ограниченная четырехугольником с вершинами $(1/2, 1/2, 0)^T$, $(1/4, 1/4, 1/2)^T$, $(2/5, 1/5, 2/5)^T$, $(1/5, 2/5, 1/5)^T$. Данный четырехугольник представлен на рис. 17.

Рис. 17:

8.10. а) да; б) нет. *Указание:* найти показатель роста популяции с целевой структурой; население не должно убывать.

8.11.

а) $k = 3$, $l_1 = 0$. Допустимо и достижимо.

б) $k = 5/4$, $l_1 = 39/4$. Допустимо и достижимо.

в) $k = 5/2$, $l_1 = -1/2$. Допустимо и недостижимо.

г) $k = -1/4$, $l_1 = 7/12$. Недопустимо и достижимо.

9. Мотивация движения населения

9.1. а) функция распределения

$$F(x) = \frac{\alpha_2 (x/c)^{1/\alpha_2} - \alpha_1 (x/c)^{1/\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \text{ при } \alpha_1 \neq \alpha_2;$$

$$F(x) = \left(\frac{x}{c}\right)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{x}{c}\right), \text{ при } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,$$

где $c = u(r_1, r_2)$. При расчетах удобно сделать замену $y_1 = x_1/r_1$, $y_2 = x_2/r_2$, а также использовать графическое представление.

б) логнормальное с параметрами $(\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2, (\sigma_1\alpha_1)^2 + (\sigma_2\alpha_2)^2)$.

9.2.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,8 \\ 0,65 & 0,71 & 0,92 \\ 0,73 & 1,21 & 2,04 \end{pmatrix}.$$

Используем формулы для $G_i(\lambda_{ij})$, полагая $k = 1$, для $i = 2$ и $i = 3$. Например, $G_2(\lambda_{21}) = 0,2^2 - 0,4^2 + 0,2^2 = -0,08$, откуда $\lambda_{21} \approx 0,65$ и т.д.

9.3. а) $b/(a + b)$; б) $1 - a/(2b)$ при $a \leq b$, $b/(2a)$ при $a > b$; в) $1 - (1/2)(a/b)^\alpha$ при $a \leq b$, $(1/2)(b/a)^\alpha$ при $a > b$; г) $\Phi((b - a)/\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$, где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Графики коэффициентов в **9.3а–в** (при $a = 1$, $\alpha = 2$) представлены на рис. 18. В принципе, все они ведут себя аналогично.

9.4. От четырех и больше (если учитывать диагональные элементы Λ)[13]. В случае n групп матрица Λ

[13] Если не учитывать, то от шести и больше.

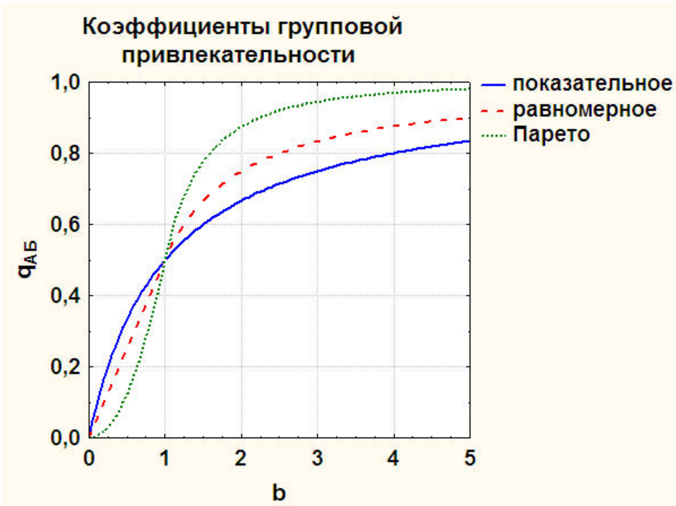

Рис. 18:

содержит n^2 элементов. В представлении через коэффициенты имеется $2n$ величин c_i, a_j и $n(n-1)/2$ определяюших значений q_{ij} (с учетом $q_{ij} + q_{ji} = 1$), так что всего $(n^2 + 3n)/2$ параметров.

9.5. $c_1 = 12$; $c_2 = 30$; $c_3 = 20$; $q_{12} = 2/3$; $q_{23} = 3/5$; $q_{13} = 3/4$. *Указание:* использовать тот факт, что $q_{ii} = 1/2$, так что $c_i = 2\lambda_{ii}$.

9.6. $\alpha = \beta = 1/2$, $k = 18$, $v_{32} = 27$.

9.7. $\alpha = 1/3$, $\beta = 2/3$, $k = 4$, $v_{13} = 72$.

10. Социально-экономическое расслоение.

10.1.

а)

$$k_f = \frac{19W - 9a}{W + 9a}, \quad G = \frac{W - a}{3W}, \quad y = \frac{(W - a)x^2 + ax}{W};$$

б)

$$k_f = \frac{0,1^{a/W}}{1-0,9^{a/W}}, \quad G = \frac{W-a}{W+a}, \quad y = 1-(1-x)^{a/W}.$$

Недостающие параметры распределений находим из выражений для среднего W: верхняя граница равномерного распределения $2W-a$, параметр формы распределения Парето $\alpha = W/(W-a)$.

Графики зависимости коэффициентов фондов и Джини от W/a представлены на рис. 19 и рис. 20.

Кривые Лоренца для указанных распределений в случаях одинакового отношения W/a и одинакового коэффициента Джини представлены на рис. 21 и рис. 22.

Видно, что при одинаковом соотношении среднего и минимального дохода распределение Парето является гораздо более "несправедливым".

10.2. Из геометрического представления выводим формулу

$$G = \frac{(b-a)pq}{ap+bq}.$$

10.3. $\sqrt{b} : \sqrt{a}$, $(\sqrt{b}-\sqrt{a})/(\sqrt{b}+\sqrt{a})$; $3:2$, $1/5$. Используем формулу для G из **10.2**, находим максимум дифференцированием по p. Получаем $p = \sqrt{b}/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

10.4. а) 1/3; б) уменьшится на 0,05.

10.5. $\alpha = 2$; $k_f \approx 6,16$; $G = 1/3$. Используем результаты задачи **10.1б**. Кривая Лоренца должна проходить через точку $(0,75; 0,5)$, отсюда находим $W/a = 2$ и т.д.

10.6. $0,37$. Кусочно-линейная кривая Лоренца по данным табл. 10.1 представлена на рис. 23.

10.7. а) 1/4, 1/16, 1/48; б) 7/8, 5/16, 1/8.

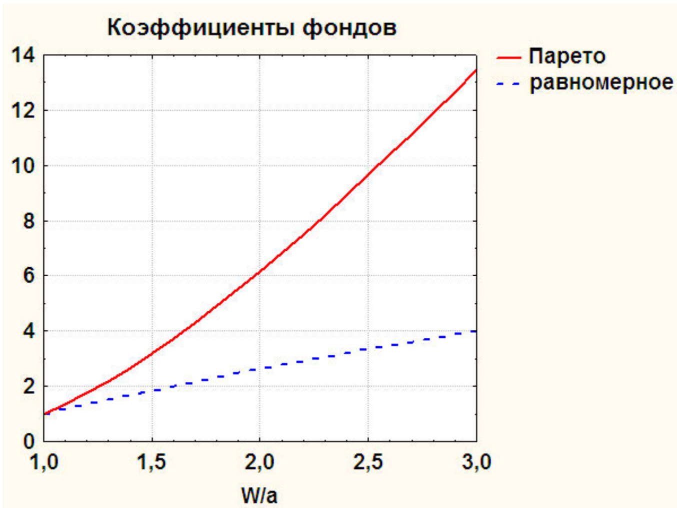
Коэффициенты фондов
14
12
10
8
6
4
2
0
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
W/a
Парето
равномерное

Рис. 19:

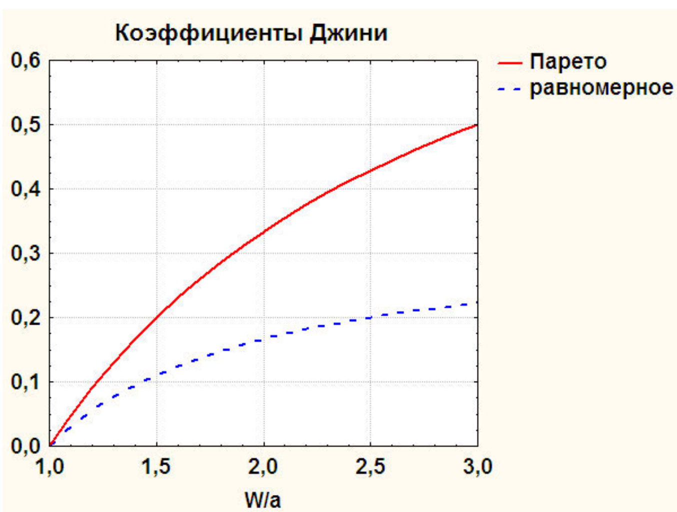
Коэффициенты Джини
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
W/a
Парето
равномерное

Рис. 20:

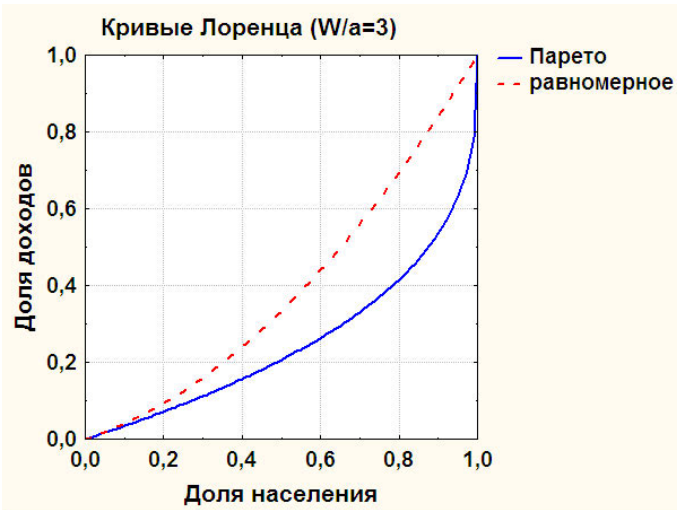
Кривые Лоренца (W/a=3)
Парето
равномерное
Доля доходов
Доля населения
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0

Рис. 21:

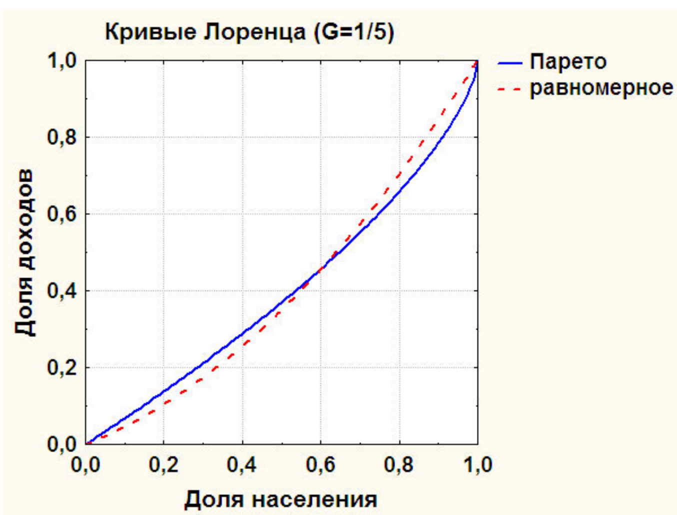
Кривые Лоренца (G=1/5)
Парето
равномерное
Доля доходов
Доля населения
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0

Рис. 22:

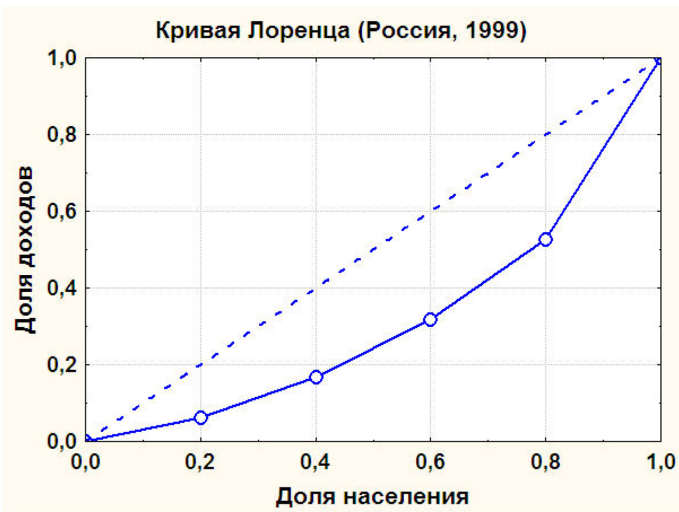
Кривая Лоренца (Россия, 1999)
Доля доходов
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
Доля населения

Рис. 23:

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1

1. Имеется популяция животных двух возрастов: молодые и взрослые. За единицу времени молодые становятся взрослыми, а пара взрослых либо рождает в среднем 6 пар молодых, либо погибает с вероятностью 0,5. В начальный момент $n = 0$ имеется 7 пар взрослых. Найти среднее число пар взрослых в любой момент времени $n > 0$.

2. Рост численности населения описывается обобщенной моделью Мальтуса: $x' = k(x)x$, где $k(x) = 0,01x$. Пусть $x(0) = 2$, найти $x(30)$.

3. Сила смертности $d(x) = a/(b - x)$, $0 < x < b$, где $b = 75$. Средняя продолжительность жизни 50 лет. Найти вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте 45 лет.

4. В модели смертности Брасса найти вероятность дожить до 70 лет, если $\alpha = -1,2$; $\beta = 0,9$.

5. Распределение числа потомков $p_0 = 1/9$, $p_1 = 2/9$, $p_2 = 5/9$, $p_3 = 1/9$. Найти среднее число потомков и вероятность вырождения.

6. В модели Лотки $\mu = 2$, $p_0 = 0,3$. Найти параметры b, c и вероятность вырождения.

7. Функция возрастной фертильности

$$f(x) = \begin{cases} (3/5)e^{(x_0-x)/4} - (2/5)e^{(x_0-x)} & ,x \geq x_0, \\ 0 & ,x < x_0 \end{cases} ,x_0 = 18.$$

Найти среднее число детей и средний возраст матерей.

8. В модели рождаемости Брасса найти рождаемость в возрасте 25 лет и максимальную рождаемость

при среднем числе детей 2,2 и среднем возрасте матерей 26,7 лет.

Контрольная работа № 2

1. Сила смертности $d(x) = a/(b - x)$, $0 < x < b$, где $a = 1/2$. Средняя продолжительность жизни 74 года. Найти средний возраст стационарного населения.

2. В модели естественного движения населения известно, что $b(x) = Ae^{(18-x)/2}$, $x \geq 18$; $\bar{F}(x) = e^{-x/60}$ и население стационарно. Найти A и репродуктивный потенциал Фишера в возрасте 30 лет.

3. Открытое население из двух групп описывается уравнением:

$$\vec{n}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{n}(t) + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

При начальном условии $\vec{n}(0) = (1, 1)^T$ найти $\vec{n}(t)$ и предельную структуру населения.

4. Построить матрицы объединения U и расщепления S, если объединяются группы: 1,6 в 1; 2,5 в 2; 3,4 в 3, и ведущий вектор $\vec{x} = (1, 4, 2, 3, 5, 8)^T$. Найти значение $S(2, 3, 1)^T$.

5. Выяснить, какие группы можно объединять при следующей матрице C:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

и построить матрицу для новых групп.

6. В организации две группы, интенсивность перехода из первой во вторую 7, из второй в первую 5, интенсивность ухода вовне из первой 3, из второй 1. В задаче регулирования набором найти наименьший показатель роста $\alpha \geq 0$, при котором достижима структура $\vec{g} = (1/5, 4/5)^T$, и соответствующий вектор набора $\vec{q}$.

7. Имеется две группы, коэффициент естественного прироста в первой 2, во второй 4, интенсивность перехода из первой во вторую l, из второй в первую 1. Найти k и l, соответствующие целевой структуре $\vec{g} = (1/2, 1/2)^T$. Проверить на допустимость и достижимость.

Контрольная работа № 3

1. В модели мотивации движения населения с линейной функцией предпочтения известно, что $\lambda_{11} = 2$, $\lambda_{12} = 3$, $G_1(x) = x^3 + 50$, $G_2(x) = x^2$. Восстановить матрицу интенсивностей переходов.

2. Найти величины c_i и q_{ij}, в предположении, что все группы полнодоступны (т.е. все $a_j = 1$), по матрице интенсивностей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 30 & 20 & 8 \\ 5 & 16 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Найти коэффициент групповой привлекательности q_{12} для групп с уровнем жизни, имеющим распределение Вейбулла вида $F(x) = 1 - e^{-(x/\mu)^2}$, $x > 0$, с параметрами $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 7$.

4. Движение населения между тремя городами описывается обобщенной гравитационной моделью с пара-

метром $\gamma = 1$. Известны расстояния $r_{12} = 3$, $r_{13} = 2$, $r_{23} = 4$; численности населения городов $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 9$; скорости $v_{12} = 12$, $v_{13} = 27$, $v_{21} = 12$. Найти остальные параметры модели и скорость v_{32}.

5. Доходы граждан имеют равномерное распределение, причем 10% самых богатых принадлежит 18% всего дохода. Найти коэффициенты фондов и Джини.

6. Оценить коэффициент Джини в случае 5 групп равной численности по возрастанию доходов, если доли доходов этих групп составляют: $r_1 = 0,06$, $r_2 = 0,12$, $r_3 = 0,18$, $r_4 = 0,24$, $r_5 = 0,40$.

7. Доходы граждан имеют распределение Парето с наименьшим доходом 6 и средним доходом 12. Найти долю бедных и относительную нехватку доходов, если уровень бедности 8.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1.1.
Рост численности населения Земли в XX веке [3]

Год	Население, млн.
1900	1650*
1920	1811
1930	2020
1940	2295
1950	2450*
1955	2752
1960	3019
1965	3336
1970	3689
1975	4080
1980	4450
1985	4854
1990	5294
1995	5765
2000	6060

Примечание: * отмечены усредненные данные по интервалу оценок.

Таблица 2.1.

Возрастные коэффициенты смертности в РФ в 1988 г. (число умерших за год на 1000 человек данного пола и возраста) [1]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
< 5	5,4	4,0	4,7
5–9	0,7	0,4	0,55
10–14	0,6	0,3	0,45
15–19	1,4	0,6	1,0
20–24	2,4	0,7	1,6
25–29	2,8	0,7	1,8
30–34	3,6	1,0	2,3
35–39	4,6	1,5	3,0
40–44	6,2	2,1	4,1
45–49	10,3	3,5	6,7
50–54	14,0	4,9	9,1
55–59	22,0	8,3	14,4
60–64	31,7	13,5	20,1
65–69	45,4	21,7	29,3
70–74	67,8	37,4	45,6
75–79	96,4	61,2	68,9
80–84	139,8	100,2	107,2
≥ 85	207,8	174,0	178,7

Таблица 2.2.

Возрастные коэффициенты смертности в РФ в 1999 г. (число умерших за год на 1000 человек данного пола и возраста) [5]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
< 5	4,8	3,7	4,3
5–9	0,6	0,4	0,5
10–14	0,6	0,3	0,5
15–19	2,0	0,8	1,4
20–24	4,5	1,1	2,9
25–29	5,2	1,3	3,3
30–34	6,5	1,7	4,1
35–39	8,4	2,2	5,3
40–44	11,5	3,2	7,3
45–49	16,2	4,8	10,3
50–54	22,3	7,2	14,2
55–59	31,5	10,7	19,8
60–64	42,5	15,4	26,7
65–69	59,0	25,4	38,2
70–74	78,5	40,7	53,1
75–79	101,3	66,2	75,3
80–84	149,9	116,1	123,5
≥ 85	203,6	206,9	208,1

Таблица 2.3.

Возрастные коэффициенты по основным причинам смерти всего населения СССР в 1986 г. (число умерших на 100000 человек) [1]

Возраст	1	2	3	4	Всего
0–4	2,6	8,7	246,6	51,9	664,4
5–9	1,0	6,4	6,0	16,1	44,1
10–14	1,6	5,6	2,9	11,7	32,9
15–19	3,5	6,6	2,9	21,9	51,4
20–24	7,2	9,3	3,6	23,5	68,5
25–29	9,7	13,8	3,7	25,2	79,5
30–34	14,9	25,5	4,5	30,5	104,5
35–39	26,8	45,7	5,7	35,9	147,8
40–44	53,8	78,4	8,8	47,0	229,7
45–49	99,8	124,8	12,4	52,5	339,5
50–54	202,7	181,7	22,6	57,6	535,1
55–59	371,5	276,5	36,7	60,2	842,0
60–64	705,3	373,3	60,1	58,5	1322,2
65–69	1327,3	478,9	105,7	64,4	2135,6
70–74	2615,0	599,6	193,4	79,7	3675,8
75–79	4711,5	631,5	328,8	103,4	5993,1
80–84	7879,8	545,4	514,7	130,2	9312,5
≥ 85	16489,2	477,4	1019,3	187,1	18506,0

Основные причины смерти:

1 — болезни системы кровообращения;
2 — новообразования;
3 — болезни органов дыхания;
4 — несчастные случаи, отравления, травмы.

Таблица 2.4.
Число доживающих до данного возраста в России[14]
(из 100000 человек), 1988 г.

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
0	100000	100000	100000
5	97375	98049	97701
10	97031	97856	97431
15	96732	97703	97202
20	96065	97406	96715
25	94944	97083	95981
30	93598	96724	95114
35	91938	96247	94027
40	89832	95549	92604
45	86912	94497	90590
50	82687	92921	87650
55	76899	90560	83524
60	68906	86924	77644
65	58479	81118	69492
70	46376	72462	59027
75	33977	60154	46157
80	19732	43461	31240
85	9310	24690	16769

[14] Согласно данным "Демоскоп Weekly. Приложение. Справочник статистических таблиц". Колонка "Все население" рассчитана приближенно.

Таблица 2.5.

Число доживающих до данного возраста в России[15]
(из 100000 человек), 1999 г. [5]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
0	100000	100000	100000
5	97649	98175	97904
10	97361	97987	97664
15	97011	97803	97395
20	95966	97421	96671
25	93909	96887	95353
30	91474	96282	93805
35	88565	95507	91931
40	84917	94467	89548
45	80147	92986	86373
50	73823	90768	82041
55	66071	87731	76576
60	56735	83392	69663
65	45909	76766	60874
70	34259	67030	50152
75	22918	53762	37877
80	13258	37708	25116
85	6342	21525	13705

[15] Колонка “Все население” рассчитана приближенно.

Таблица 2.6.
Логит-преобразования стандартной функции распределения продолжительности жизни в модели Брасса для некоторых возрастов [10, 11].

Возраст, лет	logit $F_0(x)$
5	-0,6015
10	-0,5498
15	-0,5131
20	-0,4551
25	-0,3829
30	-0,3150
35	-0,2496
40	-0,1816
45	-0,1073
50	-0,0212
55	0,0821
60	0,2100
65	0,3721
70	0,5818
75	0,8593
80	1,2375
85	1,7722
90	2,5573
95	3,7424

Таблица 3.1.

Возрастные коэффициенты рождаемости в РФ, 1988 г. (число родившихся живыми на 1000 женщин данного возраста) [5]

Возраст, лет						
15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
49,6	167,9	114,1	61,8	25,6	5,6	0,2

Таблица 3.2.

Возрастные коэффициенты рождаемости в РФ, 1999 г. (число родившихся живыми на 1000 женщин данного возраста) [5]

Возраст, лет						
15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
29,5	93,1	65,2	32,7	11,3	2,2	0,1

Таблица 3.3.

Брачная рождаемость в СССР (обследование 1985 г., число детей на 1000 семейных пар) по годам рождения жен [1]

	0	1	2	3	4	5	≥ 6	Всего
1925–29	111	229	331	163	71	40	55	2267
1930–34	67	221	372	161	66	42	71	2461
1935–39	49	235	425	147	51	33	60	2358

Таблица 5.1.
Распределение населения РФ по полу и возрасту
(в тыс. чел.), 2000 г. [5]

Возраст, лет	Мужчины	Женщины	Все население
< 1	624	589	1213
0–4	3289	3121	6410
5–9	4239	4025	8264
10–14	6082	5848	11930
15–19	5970	5800	11770
20–24	5422	5317	10739
25–29	5238	4972	10210
30–34	4804	4690	9494
35–39	5905	5975	11880
40–44	6121	6396	12517
45–49	5397	5885	11282
50–54	3893	4472	8365
55–59	2523	3264	5787
60–64	3621	5094	8715
65–69	2317	3757	6074
70–74	2034	4088	6122
75–79	744	2326	3070
80–84	335	1209	1544
≥ 85	266	1121	1387

Таблица 10.1.
Распределение общего объема денежных доходов
по 20%-группам населения России в 1999 г. (%) [6]

I	II	III	IV	V
6,2	10,6	14,9	21,0	47,3

Список литературы

[1] *Староверов О.В.* Азы математической демографии. М.: Наука, 1997.

[2] *Староверов О.В., Котельникова С.Н.* Моделирование социально-экономических процессов. М.: МГИЭМ, 2001.

[3] *Капица С.П.* Общая теория роста человечества. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. М.: Наука, 1999.

[4] Система знаний о народонаселении / Под ред. Д.И.Валентея. М.: Высшая школа, 1991.

[5] Демографический ежегодник России. М.: Госкомстат, 2000.

[6] Социальное положение и уровень жизни в России. М.: Госкомстат, 2000.

[7] *Беляев Ю.К., Чепурин Е.В.* Основы математической статистики. М.: МГУ, 1982.

[8] *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.

[9] *Алешковский И.А.* Детерминанты внутренней миграции населения. Анализ отечественных и зарубежных исследований. М.: МАКС Пресс, 2006.

[10] *Брасс У.* Об одном способе выражения закономерностей смертности // Изучение продолжительности жизни / Сб. статей под ред. и с предисл. Е.М.Андреева, А.Г.Волкова. М.: Статистика, 1977. С. 39–93.

[11] United Nations. Manual X. Indirect techniques for demographic estimation. NY: UN, 1983.

Лебедев А.В.
Сборник задач
по математической демографии
Учебное пособие
МГУ, 2015
(второе издание).