**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории вероятностей.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.«Основы стохастики. Стохастические модели»
2. Преподаватель - проф. А.Н. Ширяев
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов посвящен основным современным стохастическим моделям, в курсе даются математические основы теории вероятностей, а также изучаются основные классы теории случайных процессов (мартингалы, марковские цепи, гауссовские процессы).
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Классическое определение вероятности |
| Тема 2 | Условные вероятности. Независимость |
| Тема 3 | Условное математическое ожидание. |
| Тема 4 | Дискретные случайные величины и их характеристики |
| Тема 5 | Предельные теоремы |
| Тема 6 | Случайное блуждание |
| Тема 7 | Мартингалы |
| Тема 8 | Дискретные марковские цепи. |
| Тема 9 | Эргодическая теорема. |
| Тема 10 | Вероятностная модель эксперимента с бесконечным числом событий. Аксиоматика Колмогорова |
| Тема 11 | Математическое ожидание |
| Тема 12 | Многомерное нормальное распределение |
| Тема 13 | Разные виды сходимости случайных величин. |
| Тема 14 | Слабая сходимость вероятностных мер |
| Тема 15 | Метод характеристических функций в доказательстве предельных теорем. |
| Тема 16 | Случайные процессы |
| Тема 17\* | Винеровский процесс |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов. Определение вероятностного пространства, алгебры, событий. Классические вероятностные задачи на подсчет случайных шансов. Число элементарных исходов, когда происходит выбор с возвращением/без возвращения, выборки упорядоченные/неупорядоченные. Связь с задачей подсчета числа размещений дробинок по ячейкам. Классические вероятностные задачи на подсчет случайных шансов (задача о совпадениях, выигрыш в лотерею). Биномиальное распределение. Мультиномиальное распределение. Многомерное гипергеометрическое распределение.
2. Определение условной вероятности, свойства. Формула полной вероятности. Формула Байеса, теорема Байеса. Определение независимости событий. Пример, что из попарное независимости событий вообще говоря не следует их независимости. Схема Бернулли.
3. Распределение случайной величины. Свойства функции распределения случайной величины. Определение математического ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции, свойства. Наилучший в среднеквадратичном линейный прогноз значений одной случайной величины по значений другой случайной величины.
4. Схема Бернулли. Неравенство Чебышева, следствия. Закон больших чисел Бернулли. Предельные теоремы (локальная, Муавра-Лапласа, Пуассона).
5. Случайное блуждание. Вероятности разорения и средняя продолжительность при игре с бросанием монеты. Принцип отражения. Закон арксинуса.
6. Определение. Примеры мартингалов. Определение момента остановки. Тождества Вальда.
7. Общее определение марковского процесса. Определение дискретной марковской цепи. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Однородная марковская цепь. Классификация состояний марковской цепи (несущественные, возвратные, сообщающиеся, нулевые, периодические, эргодические состояния), теорема о "солидарности" их свойств.
8. Неразложимая дискретная марковская цепь. Необходимое и достаточное условие возвратности состояния однородной дискретной марковской цепи.
9. Определение эргодичной дискретной марковской цепи. Стационарное распределение. Эргодическая теорема в случае однородной дискретной марковской цепи.
10. Аксиоматика Колмогорова. Алгебры и сигма-алгебры. Измеримые пространства, , , , где T - произвольное множество. Примеры дискретных мер, примеры абсолютно непрерывных мер. Многомерное нормальное распределение. Теорема Колмогорова о продолжении мер в (без доказательства).
11. Определение случайной величины и ее свойства. Функция распределения и ее свойства. Построение интеграла Лебега. Математическое ожидание, свойства. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости (без доказательства). Семейство равномерное интегрируемых случайных величин, достаточное условие равномерной интегрируемости.
12. Неравенство Чебышева, Коши-Буняковского, Иенсена, Ляпунова, Гёльдера, Минковского.
13. Теорема Радона-Никодима (без доказательства). Определение условного математического ожидания и условной вероятности, свойства.
14. Разные виды сходимости последовательностей случайных величин, определения, соотношения разных видов сходимости друг с другом, контрпримеры. Лемма Бореля-Кантелли. Определение характеристической функции, свойства, примеры.
15. Определение слабой сходимости вероятностных мер. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Теорема Пуассона.
16. Гауссовские, стационарные и марковские случайные процессы, случайные функции с ортогональными и независимыми приращениями. Винеровский процесс.

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка, примеры см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

А. Определение эргодичной дискретной марковской цепи. Стационарное распределение. Эргодическая теорема в случае однородной дискретной марковской цепи.

Б. Теорема Радона-Никодима (без доказательства). Определение условного математического ожидания и условной вероятности, свойства.

Билет №2.

А. Определение. Примеры мартингалов. Определение момента остановки. Тождества Вальда.

Б. Разные виды сходимости последовательностей случайных величин, определения, соотношения разных видов сходимости друг с другом, контрпримеры. Лемма Бореля-Кантелли. Определение характеристической функции, свойства, примеры.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Перечень основной учебной литературы:

1. Ширяев А.Н. *Вероятность*. В 2-х книгах, 5-е изд., Москва, МЦНМО, 2011.

2. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*. Москва, Наука, 1977.

3. Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов.* Москва, Физматлит, 2003.

4. Боровков А.А. *Теория вероятностей.* 4-е изд. Москва, Едиториал УРСС, 2003.

Перечень дополнительной литературы:

5. Гнеденко Б.В. *Теория вероятностей*. 8-е изд. Москва, УРСС, 2005.

6. Петров В.В. *Суммы независимых случайных величин*. Москва, Физматлит, 1972.

7. Ширяев А.Н. *Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений*, М.: МЦНМО, 2011.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html