**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 10 от 07 июня 2017 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Функциональные предельные теоремы (Functional limit theorems).

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: английский.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ, «Functional limit theorems»
2. Преподаватель – д.ф.м.н., проф. Е.В.Булинская (Prof. E.V.Bulinskaya)
3. Аннотация курса: The main attention in the course is paid to weak convergence and strong approximation of random elements in functional spaces C and D. Properties of Wiener process and Brownian bridge, as well as, functional limit theorems for generalized renewal processes are studied. Poissonian measures and empirical processes are also treated.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Properties of probability measures in metric spaces. |
| Тема 2 | Criteria of weak convergence. |
| Тема 3 | Weak convergence and mappings. Convergence in distribution. |
| Тема 4 | Prohorov's theorem (direct and converse). Possible applications. |
| Тема 5 | The space C of continuous functions. Existence of Wiener measure. |
| Тема 6 | Donsker-Prohorov's theorem. |
| Тема 7 | Functions of Brownian motion paths. |
| Тема 8 | Empirical processes. Kolmogorov-Smirnov's criterium. |
| Тема 9 | The space D and the Skorohod topology. |
| Тема 10 | Weak convergence and tightness in D. |
| Тема 11 | Ramdom change of time. |
| Тема 12 | Generalized renewal processes. |
| Тема 13 | Reward-renewal processes and their applications. |
| Тема 14 | Poissonian measures. |
| Тема 15 | Mixing processes. |
| Тема 16 | Strong approximation. |
| Тема 17\* | Martingales. Exchangeable random variables. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена*

1. Regularity and tightness of probability measures. Weak convergence in metric spaces.
2. Potmanteau theorem. The Kolmogorov and Prohorov criterium of weal convergence.
3. Determining and convergence-determining classes in various metric spaces.
4. Random elements. Convergence in distribution. Convergence in probability.
5. Finite-dimensional distributions and their role in weak convergence of corresponding measures.
6. Weak convergence and mappings.
7. Relative compactness. Proof of the direct Prohorov theorem.
8. Proof of Lindebrg’s theorem (not using the characteristic functions).
9. The Cramer-Wold device.
10. Necessary and sufficient conditions of tightness in the space C of continuous functions.
11. Wiener process and Brownian bridge.
12. Proof of Donsker’s theorem.
13. Distributions of maximum and minimum of Wiener process.
14. Kolmogorov’s theorem for empirical distributions.
15. The Skorohod topology in the space D of cadlag functions.
16. Finite-dimensional distributions and tightness in D.
17. Weak convergence of randomly selected sums.
18. Generalized renewal processes and strong law of large numbers.
19. Functional limit theorem for generalized renewal processes.
20. Martingale methods and Rebolledo’s central limit theorem.

*Экзаменационные билеты формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее.*

­­Exam questions 1.

А. Regularity and tightness of probability measures.

В. Functional limit theorem for generalized renewal processes.

C. For each n, let Xn1, …, Xnn independent random variables with P(Xnk=1) = pn and P(Xnk= 0) = 1-pn, and define Yn by Yn(t)=Σk<nt Xnk. Assume npn→λ and prove that Yn converge weakly to an appropriate Poisson process (with paths in D).

­­Exam questions 2.

А. Determining and convergence-determining classes in various metric spaces.

B. The Skorohod topology in the space D of cadlag functions.

C. The set C is nowhere dense in D.

­­Exam questions 3.

А. Finite-dimensional distributions and tightness in D.

B. Proof of Donsker’s theorem.

C. Derive the joint distribution of maximum and minimum of Si –in-1 Sn, 0<i<n, in the Lindeberg-Levy case.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Перечень литературы:

1) P.Billingsley. Convergence of Probability Measures. J.Wiley and Sons, New York, 1968.

2) E.V.Bulinskaya, A.I.Sokolova. Limit theorems for generalized renewal processes. Probability Theory and its Applications, 2017, v. 62, N. 1, p. 44-67.

3) M.Csorgo, L.Horvath. Limit Theorems in Change-Point Analysis. J.Wiley and Sons, Chichester, 1997.

4) M.Csorgo, P.Revesz. Strong Approximations in Probability and Statistics. Academic Press, New York, 1991.

5) J.Jacod, A.N.Shiryaev. Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

6) G.R.Shorack, J.A.Wellner. Empirical Processes with Applications to Statistics. J.Wiley and Sons, New York, 1986.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html