**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Стохастические модели в экономике.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ.«Современные проблемы теории массового обслуживания»
2. Преподаватель - проф. Л.Г. Афанасьева
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов включает в себя следующие разделы теории массового обслуживания: «Вероятностный аппарат теории массового обслуживания», «Простейшие марковские модели», «Процессы восстановления», «Одноканальная система с пуассоновским входящим потоком. Различные методы исследования» и др.
4. Тематическое содержание курса

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Описание систем массового обслуживания. Элементы систем, показатели эффективности. Исторический обзор. Модель Эрланга. |
| Тема 2 | Вероятностный аппарат теории массового обслуживания. Цепи Маркова с дискретным временем, определение и общие свойства. |
| Тема 3 | Эргодическая теорема для цепи Маркова с конечным множеством состояний. Эргодические цепи Маркова со счетным множеством состояний. Эргодические теоремы Феллера и Фостера. Критерий Мустафы-Твиди. |
| Тема 4 | Марковские процессы с дискретным множеством состояний (Цепи Маркова с непрерывным временем). Инфинитезимальная матрица. Конструктивное описание процесса. Вложенная цепь Маркова с дискретным временем. Прямые и обратные системы уравнений Колмогорова. |
| Тема 5 | Стационарные марковские процессы. Эргодичность. Эргодическая теорема Фостера. |
| Тема 6 | Процессы размножения и гибели. Система дифференциальных уравнений. Теорема Ройтера. Достаточное условие эргодичности. Стационарное распределение. |
| Тема 7 | Экспоненциальное распределение. Свойство отсутствия памяти. Пуассоновский процесс. Классификация систем массового обслуживания. |
| Тема 8 | Простейшие марковские модели. Система M/M/1/∞. Нестационарное распределение числа требований в системе. Условие эргодичности. Стационарное распределение. |
| Тема 9 | Бесконечноканальная система. Нестационарное и стационарное распределения числа занятых каналов. Период занятости. |
| Тема 10 | Система с несколькими параллельными каналами. Нестационарное и стационарное распределения числа требований в системе. Операционные характеристики. |
| Тема 11 | Система M/G/1/∞: метода исследования. Вложенная цепь Маркова. Стационарное распределение. Условие эргодичности. |
| Тема 12 | Виртуальное время ожидания в системе M/G/1/∞. Интегрально-дифференциальное уравнение Такача. Стационарное распределение времени пребывания заявки в системе. Нестационарное распределение виртуального времени ожидания. |
| Тема 13 | Метод дополнительной переменной при анализе системы M/G/1/∞. Марковский процесс, описывающий функционирование системы. Стационарные вероятности состояний. Период занятости. |
| Тема 14 | Система с отказами, пуассоновским входящим потоком и произвольно распределенным временем обслуживания. Стационарное распределение числа занятых приборов. |
| Тема 15 | Потоки с ограниченным последействием. Основные результаты из теории восстановления: Теорема Блекуэлла в решетчатом и нерешетчатом случаях, узловая теорема восстановления Смита. |
| Тема 16 | Одноканальная система типа GI/GI/1/∞. Интегральное уравнение Линдли. Связь с теорией случайных блужданий. Условие эргодичности. Решение уравнения Линдли в частных случаях. |
| Тема 17 | Многоканальная система обслуживания вида GI/M/n/∞. Вложенная цепь Маркова. Стационарное распределение. |
| Тема 18 | Процессы восстановления. Функция восстановления, эксцесс и дефект. Теорема Стейна. Уравнение восстановления. |
| Тема 19 | Асимптотические свойства функции восстановления. Элементарная теорема восстановления. Тождество Вальда. |
| Тема 20 | Теорема Блекуэлла в решетчатом случае. Предельное распределение дефекта и эксцесса в решетчатом случае. |
| Тема 21 | Узловая теорема восстановления. Эквивалентность узловой теоремы восстановления и теоремы Блекуэлла. Непосредственная интегрируемость по Риману. |
| Тема 22 | Стационарные процессы восстановления. Закон «0» или «1» Хьюитта-Сэвиджа. Теорема Блекуэлла в нерешетчатом случае. Предельное распределение дефекта и эксцесса в нерешетчатом случае. |
| Тема 23 | Предельные теоремы для процессов восстановления. Закон больших чисел для процесса восстановления. Центральная предельная теорема для процесса восстановления. |
| Тема 24 | Обрывающийся процесс восстановления. Определение, уравнение восстановления. Асимптотическое поведение решения уравнение восстановления, когда выполнено условие Крамера. |
| Тема 25 | Система обслуживания с пуассоновским входящим потоком и одним прибором (M/G/1). Процесс виртуального времени ожидания в системе M/G/1. Интегрально-дифференциальное уравнение. |
| Тема 26 | Условие существования стационарного распределения для M/G/1. Вид стационарного распределения, Формула Поллачека-Хинчина. |
| Тема 27 | Случайное блуждание на прямой. Верхние лестничные индексы и высоты. Связь с обрывающимися процессами восстановления. Асимптотическое поведение случайного блуждания на прямой при наличии математического ожидания скачка. |
| Тема 28 | Граничные функционалы на траекториях случайного блуждания. Система GI/G/1. Связь времени ожидания со случайным блужданием. Эргодическая теорема для системы GI/G/1. |
| Тема 29 | Регенерирующие случайные процессы. Два определения: их эквивалентность. Примеры регенерирующих процессов. |
| Тема 30 | Теорема Смита для апериодических регенерирующих процессов. Приложения к теории массового обслуживания. Эргодическая теорема для многоканальной системы GI/G/r. |
| Тема 31 | Асимптотика времени до появления редкого события в регенерирующих случайных процессах. Приложения к теории очередей и теории надежности. Асимптотика времени безотказной работы сложной системы с быстро восстанавливающимися приборами. |
| Тема 32 | Случайные потоки. Пуассоновский поток. Рекуррентный поток. Дважды стохастический пуассоновский поток. Определение и основные свойства. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к устному зачету)*.

1. Цепи Маркова с дискретным временем. Вероятности перехода за n шагов. Классификация состояний. Теорема солидарности.
2. Эргодическая теорема для конечных цепей. Стационарные цепи Маркова.
3. Теоремы Феллера и Фостера, критерий Мустафы-Твиди для цепей Маркова со счетным множеством состояний.
4. Цепи Маркова с непрерывным временем. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Инфинитезимальная матрица.
5. Прямые и обратные системы дифференциальных уравнений Колмогорова.
6. Стационарные цепи Маркова. Эргодическая теорема Фостера.
7. Экспоненциальное распределение. Конструктивное описание цепи Маркова с непрерывным временем. Вложенная цепь Маркова.
8. Процессы размножения и гибели. Теорема Ройтера.
9. Достаточное условие эргодичности процесса размножения и гибели. Стационарное распределение.
10. Пуассоновский процесс. Определение и основные свойства.
11. Классификация систем обслуживания. Символика Кендалла.
12. Система M/M/1/∞. Нестационарное распределение числа требований в системе.
13. Система M/M/1/∞. Условие эргодичности. Стационарное распределение.
14. Система M/G/∞. Нестационарное распределение числа занятых каналов. Условие существования предельного распределения и его вид.
15. Система M/M/n/∞. Нестационарное и стационарное распределения. Операционные характеристики.
16. Система M/G/1/∞. Процесс виртуального времени ожидания. Интегрально-дифференциальное уравнение Такача.
17. Система M/G/1/∞. Стационарное решение уравнения Такача. Операционные характеристики в стационарном режиме.
18. Система M/G/1/∞. Вложенная цепь Маркова. Условие эргодичности. Стационарное распределение.
19. Система M/G/1/∞. Метод дополнительной переменной. Стационарное распределение соответствующего марковского процесса.
20. Система M/G/1/∞. Функциональное уравнение для распределения периода занятости.
21. Система M/M/n/0. Стационарное распределение.
22. Система M/G/n/0. Метод дополнительной переменной. Предельное распределение числа занятых приборов.
23. Потоки с ограниченным последействием. Процесс восстановления. Функция восстановления.
24. Теорема Блекуэлла.
25. Узловая теорема восстановления.
26. Предельное распределение дефекта и эксцесса.
27. Система GI/GI/1/∞. Связь процесса времени ожидания n-го требования со случайным блужданием.
28. Случайное блуждание на прямой. Два типа: осциллирующий и уходящий (в -∞ или в +∞). Асимптотический анализ при наличии математического ожидания скачка.
29. Система GI/GI/1/∞. Интегральное уравнение Линдли. Примеры его решения.
30. Система GI/M/n/∞. Вложенная цепь Маркова. Стационарное распределение.
31. Процессы восстановления. Функция восстановления, эксцесс и дефект. Теорема Стейна.
32. Уравнение восстановления.
33. Элементарная теорема восстановления.
34. Тождество Вальда.
35. Теорема Блекуэлла в решетчатом случае.
36. Предельное распределение дефекта и эксцесса в решетчатом случае.
37. Узловая теорема восстановления. Эквивалентность узловой теоремы восстановления и теоремы Блекуэлла.
38. Закон «0» или «1» Хьюитта-Сэвиджа.
39. Теорема Блекуэлла в нерешетчатом случае.
40. Предельное распределение дефекта и эксцесса в нерешетчатом случае.
41. Закон больших чисел для процесса восстановления.
42. Центральная предельная теорема для процесса восстановления.
43. Обрывающийся процесс восстановления. Определение, уравнение восстановления.
44. Асимптотическое поведение решения уравнение восстановления, когда выполнено условие Крамера.
45. Процесс виртуального времени ожидания в системе M/G/1. Интегрально-дифференциальное уравнение.
46. Условие существования стационарного распределения для M/G/1. Вид стационарного распределения, Формула Поллачека-Хинчина.
47. Случайное блуждание на прямой. Верхние лестничные индексы и высоты. Связь с обрывающимися процессами восстановления.
48. Асимптотическое поведение случайного блуждания на прямой при наличии математического ожидания скачка.
49. Система GI/G/1. Связь времени ожидания со случайным блужданием.
50. Эргодическая теорема для системы GI/G/1.
51. Регенерирующие случайные процессы. Два определения: их эквивалентность.
52. Теорема Смита для апериодических регенерирующих процессов.
53. Эргодическая теорема для многоканальной системы GI/G/r.
54. Асимптотика времени до появления редкого события в регенерирующих случайных процессах.
55. Асимптотика времени безотказной работы сложной системы с быстро восстанавливающимися приборами.
56. Случайные потоки. Пуассоновский поток. Рекуррентный поток.
57. Дважды стохастический пуассоновский поток. Определение и основные свойства.
58. Регенерирующие потоки. Определение и примеры.
59. Свойства регенерирующего потока.
60. Условие эргодичности системы Reg/G/1. Примеры таких систем.

*Примеры задач.*

* 1. Найти стационарное распределение числа требований в системе M/M/2/∞ с неидентичными приборами: среднее время обслуживания на первом приборе , а на втором .
  2. С помощью уравнения Линдли для системы с эрланговским входящим потоком /M/1/∞ показать, что стационарное распределение времени ожидания требования F(x) имеет вид F(x)=1-α. Выразить α и β через параметры системы.
  3. Система M/M/1/∞. В моменты скачков входящего пуассоновского потока поступают группы требований с заданным распределением объема группы. Найти условие эргодичности и стационарное распределение числа требований в системе, если в группе всегда k требований.
  4. Пользуясь методом урезания доказать элементарную теорему восстановления в случае, когда среднее время между восстановлениями равно бесконечности.
  5. Доказать усиленный закон больших чисел для процесса восстановления.
  6. Установить, что моменты освобождения системы M/G/1 являются точками регенерации процесса виртуального времени ожидания. Показать, что это неверно для общей системы GI/G/1.

*Темы для самостоятельной работы.*

1. Системы обслуживания с ограниченным временем ожидания или пребывания в системе. Литература ([5], §4.7; [4], §7.5).
2. Системы с ненадежными приборами. Приоритетные системы. Литература ([4], §7.1, §7.4, §4.4; [5], §4.8, §4.9).
3. Системы с повторными вызовами. Литература ([5], §4.10).
4. Граничные функционалы на траекториях случайного блуждания. Факторизационные тождества.
5. Связь распределения времени ожидания и числа требований в системе G/G/1.
6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсовинформационно-телекоммуникационнойсети «Интернет»:

*Основная литература*:

1. Л.Г. Афанасьева, Е.В. Булинская. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. МГУ, 1980.
2. Л.Г. Афанасьева. Очерки исследования операций. МГУ, 2007.
3. А.А. Боровков. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. Москва, «Наука», 1979.

*Дополнительная литература*:

1. П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. Теория массового обслуживания. Москва, РУДН, 1995.
2. Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания. Москва, Ком. Книга, 2005.
3. Т.П. Саати. Элементы теории массового обслуживания. «Советское Радио», Москва, 1971.
4. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. т.2. «Мир», Москва, 1967.
5. Д. Кокс, В. Смит. Теория восстановления. «Советское радио», Москва, 1967.
6. J. Grandell, Doubly stochastic Poisson processes. Springer, Berlin, 1976.
7. S. Asmussen. Applied Probability and Queues. Wiley, Chichester, 1987.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html