**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории случайных процессов.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. «Асимптотические методы в теории гауссовских процессов»
2. Преподаватель – г.н.с. В.И. Питербарг.
3. Аннотация курса: Кратко изложена общая теория гауссовских распределений. Рассмотрены основные методы исследования точных асимптотик хвоста распределения максимума гауссовского процесса. Изучены свойства множеств типа пересечений для гауссовских случайных процессов. Доказаны пуассоновские предельные теоремы для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности и процесса, скорости сходимости в них. Доказана предельная теорема для максимума.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Гауссовские конечномерные распределения. Существование и свойства плотности. |
| Тема 2 | Условные гауссовские распределения. Свойства условных дисперсии и среднего. |
| Тема 3 | Тождество сравнения гауссовских конечномерных распределений. |
| Тема 4 | Лемма сравнения Слепяна. |
| Тема 5 | Лемма сравнения Бермана. |
| Тема 6 | Асимптотики хвостов гауссовских конечномерных распределений. |
| Тема 7 | Интеграл Дадли и энтропийное неравенство. |
| Тема 8 | Лемма Пикандса об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса на бесконечно малом интервале. |
| Тема 9 | Теорема Пикандса об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса. |
| Тема 10 | Теорема об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского нестационарного процесса. |
| Тема 11 | Свойства множеств пересечения кривых траекториями гауссовских случайных процессов. Теорема об отсутствии касаний |
| Тема 12 | Свойства множеств пересечений уровня негауссовскими процессами. Теорема Булинской. Моменты числа пересечений. |
| Тема 13 | Метод моментов исследования асимптотического поведения вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов с гладкими траекториями. Формула Райса. |
| Тема 14 | Точечные случайные процессы на прямой. Основные определения. |
| Тема 15 | Пуассоновская предельная теорема для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности. |
| Тема 16 | Пуассоновская предельная теорема для больших выбросов гауссовского стационарного процесса с непрерывным временем. |
| Тема 17\* | Предельная теорема для максимума. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Вопросы для оценки результатов обучения.

1. Гауссовские конечномерные распределения. Теоремы сравнения.
2. Свойства эргодичности гауссовских стационарных последовательностей.
3. Сильная интегрируемость гауссовских векторов. Закон 0 или 1. Гильбертово пространство, порожденное гауссовской случайной функцией.
4. Сепарабельность и измеримость гауссовских случайных функций. Осцилляции.
5. Энтропийная оценка для хвоста распределения максимума гауссовской случайной функции.
6. Основные методы исследования точных асимптотик хвоста распределения максимума гауссовского процесса. Примеры. Обобщения.
7. Свойства множеств типа пересечений для гауссовских случайных процессов.
8. Пуассоновские предельные теоремы для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности и процесса. Скорость сходимости. Предельная теорема для максимума.

Примеры вопросов и задач:

* Определение и свойства энтропийного интеграла Дадли. Неравенство для максимума.
* Пуассоновская предельная теорема для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности.
* Пусть *W(t)* - стандартный винеровский процесс. Определим процесс . Найти его среднее и ковариационную функцию. Вычислить среднее число пересечений уровня *1* траекториями этого процесса на отрезке *[0,1].*.
* Характеризация гауссовских распределений в линейных пространствах. Альтернативное определение.
* Лемма Пикандса об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса на бесконечно малом интервале
* Пусть *W(t)* - стандартный винеровский процесс. Найти точную асимптотику хвоста распределения максимума процесса *W(t+1)-W(t)* на конечном интервале.
* Метод моментов исследования асимптотического поведения вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов с гладкими траекториями. Формула Райса.
* Асимптотики хвостов гауссовских конечномерных распределений.
* Пусть X и Y – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Найдите точную асимптотику хвоста распределения их произведения

6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Список литературы:

1) Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. - 366 с

2) Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. American Mathematical Soc., 1996

3) Питербарг В. И. Двадцать лекций о гауссовских процессах. МЦНМО. М. 2015.

4) Vladimir I. Piterbarg, Twenty Lectures About Gaussian Processes. Atlantic Financial Press, London, 2015 .

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html