**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории случайных процессов.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. «Ветвящиеся процессы с пространственной динамикой».
2. Преподаватель - проф. Е. Б. Яровая.
3. Аннотация курса: курс посвящен современному разделу теории случайных процессов − теории ветвящихся случайных блужданий по многомерным целочисленным решеткам. С помощью ветвящихся случайных блужданий изучается поведение систем, элементы которых могут размножаться, исчезать или перемещаться по пространству в различных средах по правилам, учитывающим фактор случайности.
4. Обычно такие процессы описываются в терминах рождения, гибели и блуждания частиц. Центральная задача теории ветвящихся случайных блужданий – изучение эволюции процессов во времени в зависимости от структуры среды. Принципиальную роль здесь играет модель с конечным числом источников ветвления, которая позволяет исследовать эффекты, обусловленные двумя принципиально важными обстоятельствами: неоднородностью ветвящейся среды и неограниченностью пространства, в котором происходит блуждание. Задачи, рассмотренные в этом курсе, объединены общим методом основанном на анализе асимптотики целочисленных моментов популяции частиц, а также численностей частиц в каждом узле решетки.
5. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Случайное блуждание по многомерной решетке. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Описание модели ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по многомерным решеткам. |
| Тема 2 | Производящие функции Лапласа для численностей частиц в каждой точке решетки и общей численности частиц на всей решетке. |
| Тема 3 | Дифференциальные и интегральные уравнения для моментов |
| Тема 4 | Свойства возмущенного генератора случайного блуждания |
| Тема 5 | Задача Коши для уравнений первых моментов. О монотонности решения задачи Коши |
| Тема 6 | Понятие критичности ветвящегося случайного блуждания. Предельное по времени поведение моментов в надкритическом случае |
| Тема 7 | Предельная теорема для надкритического случайного блуждания |
| Тема 8 | Общие методы исследования в критическом и докритическом случаях. Лемма о свертках |
| Тема 9 | Критический случай. Первые моменты численностей частиц на решетках размерностей меньших пяти |
| Тема 10 | Критический случай. Первые моменты численностей частиц на решетках размерностей больших четырех и старшие моменты |
| Тема 11 | Докритический случай. Первые моменты |
| Тема 12 | Докритический случай. Старшие моменты |
| Тема 13 | Вероятность выживания популяции |
| Тема 14 | Вероятность наличия частиц в произвольной точке |
| Тема 15 | Влияние интенсивности источника и размерности пространства на свойства ветвящегося случайного блуждания. |
| Тема 16 | Предельные теоремы |
| Тема 17\* | Фазовые переходы в моделях ветвящихся случайных блужданий |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к устному зачету):*

1. Симметричные случайные блуждания с непрерывным временем и их свойства.
2. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона.
3. Модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по многомерным решеткам.
4. Дифференциальные уравнения для производящих функций.
5. Дифференциальные уравнения для моментов.
6. Интегральные уравнения для моментов.
7. Спектральные свойства генератора случайного блуждания. Критерий Вейля
8. Задача Коши для уравнений первых моментов.
9. О монотонности решения задачи Коши.
10. Понятие критичности ветвящегося случайного блуждания.
11. Предельное по времени поведение моментов в надкритическом случае.
12. Метод моментов. Предельная теорема для надкритического случайного блуждания.
13. Общие методы исследования в критическом и докритическом случаях.
14. Лемма о свертках.
15. Критический случай. Первые моменты численностей частиц на решетках размерностей меньших пяти
16. Критический случай. Первые моменты численностей частиц на решетках размерностей больших четырех
17. Критический случай. Старшие моменты.
18. Докритический случай. Первые моменты.
19. Докритический случай. Старшие моменты.
20. Вероятность вырождения популяции.
21. Вероятность наличия частиц в произвольной точке.
22. Влияние интенсивности источника и размерности пространства на свойства ветвящегося случайного блуждания. Предельные теоремы.
23. Фазовые переходы в моделях ветвящихся случайных блужданий.

*Экзаменационные билеты содержат два вопроса (1 и 2) из указанного списка и одной задачи (3), примеры задач см. далее в образцах билетов.*

Образцы билетов.

­­Билет №1.

1. Модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по многомерным решеткам.

2. Предельное по времени поведение моментов в надкритическом случае.

3. Доказать, что в критическом ветвящемся случайном блуждании с одним источником на одномерной и двумерной решетках асимптотическое поведение среднего числа частиц *m1(t,x,y)* в произвольной точке решетки *y*  и переходной вероятности *p(t,x,y)* совпадают.

Билет №2.

1. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

2. Вероятность вырождения популяции в ветвящемся случайном блуждании.

3. Для симметричного ветвящегося случайного блуждания с двумя источниками одинаковой интенсивности большей нуля указать при каких интенсивностях источника на решетках размерности *d*≥3 в зависимости от свойств блуждания и расстояния между источниками не будет положительных собственных значений, будет одно или два положительных собственных значения у эволюционного оператора.

Билет №3

1. Дифференциальные уравнения для моментов численностей частиц.

2. Предельная теорема в надкритическом случае.

3. Установить асимптотическое поведение численностей частиц в источнике ветвления, при расположении частицы в источнике в начальный момент времени, в докритическом симметричном ветвящемся случайном блуждании с одним источником.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Перечень литературы:

1. В. И. Афанасьев. Случайные блуждания и ветвящиеся процессы. Лекционные курсы НОЦ. М : МИАН, 2007. 188 с.

ISBN: 5-98419-018-4.

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 544 с.
2. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961. 247 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1973. Т. II. 640 с.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн M. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534
5. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967. 231 с.
6. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 739 с.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 393
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 426 с.
9. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 442 с.
10. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. M.: Наука, 1985. 144 с.
11. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2. 752 с.
13. Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: Центр прикладных исследований при механико- математическом факультете МГУ, 2007. 104 с. ISBN: 978-5-211-05431-8.
14. Яровая Е. Б. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. 2010. Т. 55, № 4. С. 705–731.
15. Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся блужданий с несколькими источниками ветвления // Математические заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 124–140.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html