**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Стохастические модели в естественных науках.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ. «Экстремальные проблемы теории гиперграфов»
2. Преподаватель - доцент Д.А. Шабанов
3. Аннотация курса: курс посвящен вероятностным методам в экстремальной комбинаторике. Изучаются проблемы турановского типа в теории графов и гиперграфов, проблемы теории раскрасок гиперграфов, элементы аддитивной комбинаторики и теории Рамсея. Большое внимание уделяется различным вероятностным методам, лежащим в основе доказательств основных теорем.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Теорема Турана |
| Тема 2 | Теорема Эрдеша-Стоуна |
| Тема 3 | Числа Турана для гиперграфов |
| Тема 4 | Теорема турановского типа для графов без треугольников |
| Тема 5 | Оценки чисел Рамсея |
| Тема 6 | Теоремы Алона и Ширера о графах, не содержащих больших клик |
| Тема 7 | Теоремы турановского типа для гиперграфов с большим обхватом |
| Тема 8 | Проблема Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов |
| Тема 9 | Критерий Плухара и теорема Черкашина-Козика |
| Тема 10 | Локальная лемма Ловаса и раскраски простых гиперграфов |
| Тема 11 | Теорема Сауэра о регулярных гиперграфах с большим обхватом |
| Тема 12 | Теорема Косточки-Рёдля о конструкции гиперграфов с большим обхватом |
| Тема 13 | Упаковки гиперграфов |
| Тема 14 | Элементы аддитивной комбинаторики |
| Тема 15 | Метод контейнеров, теорема Ордентлича-Рота |
| Тема 16 | Метод контейнеров, подход Сакстона-Томасона |
| Тема 17\* | Применения метода контейнеров |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена*

1. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана ex(n,G) для произвольного графа G. Верхняя оценка числа Турана ex(n,), следствие из нее – оценки числа ребер дистанционного графа в и .
2. Теорема Эрдеша-Стоуна об асимптотическом поведении ex(n,G).
3. Числа Турана T(n,k,b) для гиперграфов, понятие (n,k,b)-системы. Рекуррентные неравенства для чисел T(n,k,b), простая нижняя оценка T(n,k,b). Турановские плотности t(k,b), рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности t(k,b) (конструкция А. Сидоренко). Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для T(n,k,b). Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости k-однородного гиперграфа. Нижняя оценка для t(k,b), ее порядок при фиксированном k и растущем b.
4. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи-Комлоша-Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины d. Следствие: верхняя оценка числа Рамсея R(3,t). Точность оценки в теореме Айтаи-Комлоша-Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).
5. Верхняя оценка числа Рамсея R(s,t) при фиксированном s и растущем t.
6. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных .
7. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.
8. Теорема о нижней оценке числа независимости k-однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины d (б/д). Аналогичная теорема Рёдля-Дьюка-Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.
9. Экстремальная задача Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка m(k,r). Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка m(k,r). Теорема Алона об асимптотическом поведении m(k,r) при растущем r.
10. Критерий Плухара r-раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных r-цепей. Нижняя оценка Радхакришнана-Сринивасана для m(k,2) (доказательство Черкашина-Козика).
11. Теорема Эрдеша-Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша--Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом (б/д). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка m\*(k,r). Теорема Косточки-Мубаи-Рёдля-Тетали о нижней оценке m\*(k,r) при больших r.
12. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.
13. Теорема Косточки-Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.
14. Упаковки гиперграфов, теорема Лу-Секеи об отрицательных корреляциях в пространстве случайных биекций. Теорема о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствия: достаточное условие совершенной G-упаковки; оценка для нижней степени вершины, гарантирующей существование совершенного k-сочетания.
15. Числа Ван дер Вардена W(k,r), нижняя оценка в общем случае. Оценки W(3,r): нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши.
16. Метод контейнеров, теорема Ордентлича-Рота о числе сильных независимых множеств в однородных регулярных простых гиперграфах.
17. Метод контейнеров, подход Сакстона-Томасона. Степенная мера подмножества вершин, теорема о построении контейнеров малой меры. Оценки числа независимых множеств в регулярных гиперграфах.
18. Применения метода контейнеров: предписанное хроматическое число регулярных гиперграфов.

*Экзаменационные билеты формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

А. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи-Комлоша-Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины d. Следствие: верхняя оценка числа Рамсея R(3,t). Точность оценки в теореме Айтаи-Комлоша-Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).

Б. Теорема Косточки-Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.

В. Гиперграф называется кликой, если любые два его ребра пересекаются.

1) Пусть H=(V,E) - n-однородная клика. Какие значения могут принимать и ?

2) Пусть H=(V,E) - n-однородная клика и . Докажите, что .

Билет №2.

А. Теорема Эрдеша-Стоуна об асимптотическом поведении ex(n,G).

Б. Теорема Эрдеша-Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша--Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом (б/д). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка m\*(k,r). Теорема Косточки-Мубаи-Рёдля-Тетали о нижней оценке m\*(k,r) при больших r.

В. Мы знаем, что если H - k-однородный гиперграф и , то . Докажите, что если , то для H можно гарантировать справедливую раскраску в два цвета, т.е. правильную раскраску, в которой мощности цветовых классов будут почти равны (отличаться не более чем на 1).

Билет №3

А. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.

Б. Числа Ван дер Вардена W(k,r), нижняя оценка в общем случае. Оценки W(3,r): нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши.

В. Пусть W(n,m) - это внедиагональное число Ван дер Вардена, т.е. это минимальное N т.,ч. в любой раскраске {1,…,N} в красный и синий цвета найдется либо красная арифметическая прогрессия длины n, либо синяя арифметическая прогрессия длины m. Докажите, что при фиксированном m и растущем n выполнено

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

1) A. F. Sidorenko, *What we know and what we do not know about Turan numbers*, Graphs and Combinatorics, vol. 11 (1995),

p. 179-199.

2) B. Bollobas, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

3) I. Barany, *Applications of Graph and Hypergraph Theory in Geometry*, Combinatorial and Computational Geometry, vol. 52 (2005), p. 31-50.

4) А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, Задача Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы, Успехи математических наук, т.66 №5 (2011), с. 109-182.

5) A. V. Kostochka, *Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey,* More Sets, Graphs and Numbers, Bolyai Society Mathematical Studies, vol.15, eds. E. Gyori, G. O. H. Katona, L. Lovasz, Springer, 2006, p. 175-198.

6) Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, М. Бином. Лаборатория знаний, 2007.

7) P. Erdos, L. Lovasz, *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions,* Infinite and Finite Sets,

Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, North Holland, Amsterdam, vol.10 (1973), p. 609-627.

8) A. V. Kostochka, V. Rodl, *Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number*, Random Structures and Algorithms, vol.36 №1 (2010), p. 46-56.

9) R. L. Graham, B. L. Rotshild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, 2nd edition, Wiley, New York, 1990.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html