**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Вероятностно-статистические методы.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. «Случайные графы»
2. Преподаватель – доц. Д.А. Шабанов
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов курс посвящен теории случайных графов. Изучаются общая теория случайных подмножеств, распределения числа малых подграфов в случайном графе, эволюция случайного графа, вопросы о связности случайного графа, проблемы наличия длинных путей и циклов, хроматическое число и число независимости случайного графа.
4. Тематическое содержание курса

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Модели случайных графов |
| Тема 2 | Теория случайных подмножеств конечных множеств |
| Тема 3 | Асимптотическая эквивалентность биномиальной и равномерной моделей |
| Тема 4 | Пороговые вероятности для монотонных свойств |
| Тема 5 | Малые подграфы в случайном графе, пороговая вероятность наличия фиксированного графа в случайном |
| Тема 6 | Метод моментов доказательства предельных теорем |
| Тема 7 | Пуассоновская теорема для числа малых подграфов в случайном графе |
| Тема 8 | Центральная предельная теорема для числа малых подграфов в случайном графе |
| Тема 9 | Эволюция случайного графа. Случай сильно разреженного графа |
| Тема 10 | Формула Кэли и число унициклических графов на фиксированном числе вершин |
| Тема 11 | Унициклические компоненты в разреженном случайном графе |
| Тема 12 | Теорема о гигантской компоненте в случайном графе |
| Тема 13 | Структура случайного графа внутри фазового перехода |
| Тема 14 | Теоремы о максимальной сложности компоненты внутри фазового перехода |
| Тема 15 | Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин фиксированной степени в случайном графе |
| Тема 16 | Связность случайного графа |
| Тема 17 | Случайные моменты наступления связности в графовом случайном процессе |
| Тема 18 | Совершенные паросочетания в случайном графе |
| Тема 19 | Теорема о наличии больших путей в случайном графе |
| Тема 20 | Гамильтоновы циклы в случайном графе |
| Тема 21 | Неравенства для концентрации вероятностных мер |
| Тема 22 | Независимые множества в случайном графе, поведение числа независимости в плотном случайном графе |
| Тема 23 | Число независимости в динамической модели случайного графа |
| Тема 24 | Хроматическое число случайного графа |
| Тема 25 | Концентрация значения хроматического числа случайного графа в нескольких значениях |
| Тема 26 | Метод интерполяции, поведение числа независимости в разреженном случайном графе |
| Тема 27 | Квазислучайные графы, теорема об эквивалентных определениях |
| Тема 28 | Фазовый переход в случайном подграфе квазислучайного графа |
| Тема 29 | Свойства первого порядка в случайных графах, законы нуля или единицы в плотных случайных графах |
| Тема 30 | Теорема Эренфойхта, критерий справедливости закона нуля или единицы |
| Тема 31 | Законы нуля или единицы в случайном разреженном графе, расширения в случайных графах |
| Тема 32 | Теорема Спенсера и Шелаха |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Другие модели случайных графов: случайные регулярные графы, случайные подграфы неполных графов. Графовые случайные процессы.
2. Теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели. Монотонные свойства конечных подмножеств. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества.
3. Асимптотическая эквивалентность моделей G(p) и G(m): одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания монотонным свойством для случайных подмножеств в этих моделях.
4. Пороговые вероятности обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства. Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.
5. Малые подграфы в случайном графе G(n,p). Функция m(G), сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа G(n,p), изоморфных данному фиксированному графу G. Методы первого и второго моментов. Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа G(n,p), изоморфного данному фиксированному графу G.
6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова (б/д). Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Доказательство метода моментов. Многомерный метод моментов (б/д).
7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа G(n,p), изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G, в условиях . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы, примеры ее применения.
8. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа G(n,p), изоморфных данному фиксированному графу G, в условиях .
9. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай : максимальный размер и структура компонент связности.
10. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай : максимальный размер компонент связности и отсутствие сложных компонент. Оценка вероятности большого уклонения биномиальной случайной величины от своего среднего значения (неравенство Чернова).
11. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д).
12. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай . Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).
13. Числа C(k,k+l). Лемма о количестве лесов с k компонентами на множестве из n вершин с помеченными корнями деревьев. Нахождение точного значения C(k,k). Теоремы Райта и Боллобаша об оценках величины C(k,k+l) (б/д).
14. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай . Теорема о среднем значении и дисперсии общего числа вершин в унициклических компонентах. Предельное распределение числа унициклических компонент (б/д).
15. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай . Лемма о среднем значении числа l-компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.
16. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай . Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность (по вероятности) максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.
17. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе G(n,p). Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k. Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе G(n,p).
18. Связность случайного графа G(n,p). Теорема о предельной вероятности связности G(n,p) при условии . Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности G(n,p). Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа G(n,m).
19. Графовый случайный процесс, случайные моменты первого появления монотонно возрастающих свойств. Вершинная и реберная k-связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в G(n,p). Теорема об одновременном наступлении k-связности и отсутствии вершин степени меньше k в графовом случайном процессе.
20. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе G(n,p) совершенного паросочетания.
21. Пути и маршруты в графах. Теорема о длине максимального пути в случайном графе G(n,p). Понятие случайного двухцветного мультиграфа G(n,r,r), алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
22. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства для малых подмножеств U в случайном графе G(n,p). Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа G(n,p) при условии , где .
23. Неравенства концентрации в теории вероятностей. FKG-неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы-Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.
24. Независимые множества в случайном графе. Число независимости и его асимптотическое поведение при p=const. Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа .
25. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа G(n,p) с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа для случая p=const. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа G(n,p) в общем случае (б/д).
26. Независимые множества G(n,p) в случае p=c/n. Метод интерполяции и закон больших чисел для .
27. Квазислучайные графы. Матрица смежности графа и ее собственные значения. Оценки числа ребер между двумя подмножествами вершин с помощью спектрального радиуса в регулярных графах. Теорема Грэма-Чанг-Уилсона об эквивалентных определениях квазислучайной последовательности графов.
28. Случайные подграфы неполных графов. Теорема о фазовом переходе в случайном подграфе (n,d,λ)-графа.
29. Свойства первого порядка в случайных графах. Законы нуля или единицы при . Теорема Эренфойхта, критерий справедливости закона нуля или единицы.
30. Законы нуля или единицы в случайном графе при . Расширения в случайных графах. Теорема Спенсера-Шелаха.

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

А. Асимптотическая эквивалентность моделей G(p) и G(m): одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания монотонным свойством для случайных подмножеств в этих моделях.

Б. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай . Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).

В. Найдите пороговую вероятность для свойства связности случайного двудольного графа G(n,n,p).

Билет №2.

А. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа G(n,p), изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G, в условиях . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы, примеры ее применения.

Б. Связность случайного графа G(n,p). Теорема о предельной вероятности связности G(n,p) при условии . Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности G(n,p). Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа G(n,m).

В. Пусть X – число пар непересекающихся треугольников в случайном графе G(n,p). Пусть . Найдите предельное распределение случайной величины X с ростом n.

Билет №3

А. Малые подграфы в случайном графе G(n,p). Функция m(G), сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа G(n,p), изоморфных данному фиксированному графу G. Методы первого и второго моментов. Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа G(n,p), изоморфного данному фиксированному графу G.

Б. Эволюция случайного графа G(n,p). Случай . Лемма о среднем значении числа l-компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.

В. Пусть G={1,…,n}. Найдите пороговую вероятность в G(n,p) для свойства содержать арифметическую прогрессию длины k.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1) B. Bollobas, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

2) S. Jansen, T. Luczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

3) Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

4) В.Ф. Колчин, *Случайные графы*, 2-е изд., М.: Физматлит, 2004.

Дополнительная литература:

5) T. Luczak, B. Pittel, J. Wierman, *The structure of a random graph at the point of phase transition*, Transactions of the American Mathematical Society, т. 341 №2, 1994, с. 721-748.

6) A. Frieze, M. Krivelevich, R. Martin, *The emergence of a giant component in random subgraphs of pseudo-random graphs*, Random Structures and Algorithms, т. 24 №1, 2004, с. 42-50.

7) M. Bayati, D. Gamarnik, P. Tetali, *Combinatorial approach to the interpolation method and scaling limits in sparse random graphs*, Annals of Probability, т.41 №6, 2013, с. 4080-4115.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html