**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории вероятностей.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. «Функциональные предельные теоремы»
2. Преподаватель - проф. Е.В.Булинская
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов включает следующие разделы: слабая сходимость мер в метрических пространствах,

сильная аппроксимация случайных процессов и их применения в статистике, страховании, финансах.

1. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Свойства вероятностных мер в метрических пространствах и слабая сходимость. |
| Тема 2 | Теоремы Александрова и Колмогорова-Прохорова. |
| Тема 3 | Слабая сходимость и отображения. Сходимость по распределению. |
| Тема 4 | Теорема Прохорова (прямая и обратная). |
| Тема 5 | Доказательство теоремы Линдеберга без использования характеристических функций. |
| Тема 6 | Пространство С непрерывных функций. Существование винеровской меры. |
| Тема 7 | Функциональная предельная теорема Донскера-Прохорова. |
| Тема 8 | Непрерывный вариант эмпирического процесса, сходимость к броуновскому мосту. |
| Тема 9 | Пространство D cadlag функций и топология Скорохода. |
| Тема 10 | Слабая сходимость мер в D и их плотность. |
| Тема 11 | Эмпирические процессы и критерий Колмогорова-Смирнова. |
| Тема 12 | Диффузионные процессы. |
| Тема 13 | Процессы с перемешиванием. |
| Тема 14 | Случайная замена времени. |
| Тема 15 | Функциональная предельная теорема для процессов восстановления. |
| Тема 16 | Мартингальная техника. |
| Тема 17\* | Сильная аппроксимация. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Вопросы к экзамену (или вопросы к устному зачету)*

1. Понятия регулярности и плотности меры в метрическом пространстве.
2. Слабая сходимость, определение и единственность предела.
3. Необходимые и достаточные условия слабой сходимости (теорема Александрова).
4. Достаточное условие слабой сходимости (теорема Колмогорова-Прохорова) и ее следствия для сепарабельных пространств.
5. Сохранение слабой сходимости при непрерывных отображениях и отображениях, для которых множество точек разрыва имеет нулевую предельную меру.
6. Определяющий класс и определяющий сходимость класс. Конечномерное эвклидово пространство, пространство R∞ , пространство непрерывных функций. Произведение пространств.
7. Случайный элемент со значениями в метрическом пространстве. Сходимость по распределению. Сходимость по вероятности.
8. Связь слабой сходимости мер и конечномерных распределений в пространствах R∞ и С. Относительная компактность.
9. Прямая теорема Прохорова.
10. Обратная теорема Прохорова. Доказательство центральной предельной теоремы без использования характеристических функций.
11. Критерий слабой сходимости мер в пространстве С.
12. Необходимые о достаточные условия плотности семейства мер в пространстве С.
13. Достаточные условия плотности семейства мер в пространстве С.
14. Винеровский процесс и броуновский мост.
15. Теорема Донскера-Прохорова и ее следствия.
16. Распределение максимума и минимума винеровского процесса.
17. Непрерывный аналог эмпирического процесса и его сходимость к броуновскому мосту.
18. Пространство D функций с разрывами первого рода. Топология Скорохода.
19. Полнота и сепарабельность пространства D.
20. Условия компактности в пространстве D.
21. Свойства конечномерных распределений в пространстве D.
22. Критерии плотности семейства мер в пространстве D.
23. Критерии сходимости по распределению для случайных процессов с разрывами первого рода.
24. Теорема Донскера-Прохорова в пространстве D.
25. Эмпирический процесс и критерий Колмогорова-Смирнова.
26. Броуновское движение в пространстве D.
27. Характеризация диффузионного процесса отличного от броуновского движения.
28. φ-перемешивание для последовательности случайных величин и моментные неравенства.
29. Функциональная центральная предельная теорема для процессов с перемешиванием.
30. Функции от процессов с перемешиванием и эмпирические процессы.
31. Случайная замена времени.
32. Суммы случайного числа случайных слагаемых.
33. Симметрично зависимые случайные величины.
34. Функциональная предельная теорема для процессов восстановления.
35. Мартингальная техника доказательства предельных теорем.
36. Понятие сильной аппроксимации и КМТ-конструкция.
37. Сильная аппроксимация сумм разно распределенных слагаемых. Теорема Саханенко.

**Примеры билетов**

**Билет 1.**

А) Определяющий класс и определяющий сходимость класс. Конечномерное эвклидово пространство, пространство R∞ , пространство непрерывных функций. Произведение пространств.

Б) Функциональная предельная теорема для процессов восстановления.

Задача. Пусть {Xk} – последовательность независимых одинаково распределенных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Найти совместное предельное распределение максимума и минимума величин Si – in-1Sn, при n→∞, где Si=X1+…+Xi, 0<i<n.

**Билет 2.**

А) Суммы случайного числа случайных слагаемых.

Б) Критерии сходимости по распределению для случайных процессов с разрывами первого рода.

Задача. Используя принцип отражения, найти распределение супремума броуновского движения на отрезке [0,1].

**Билет 3.**

А) Непрерывный аналог эмпирического процесса и его сходимость к броуновскому мосту.

Б) Функциональная центральная предельная теорема для процессов с перемешиванием.

Задача. Пусть Xt  - броуновский мост, 0<t<1. Тогда Yt=(1+t)Xt/(1+t) – это винеровский процесс на положительной полуоси.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Литература:

1. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*. Москва, Наука, 1977.
2. Ж.Жакод, А.Н.Ширяев. *Предельные теоремы для случайных процессов*. М.:Физматлит, 1994.
3. M.Csorgo, P.Revesz. *Strong Approximations in Probability and Statistics*. Academic Press, New York, 1991.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>