**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Вероятностно-статистические методы.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. «Диффузионные процессы»
2. Преподаватель - проф. А.Ю. Веретенников
3. Аннотация курса: курс посвящен теории стохастического интегрирования. В первую очередь, рассмотрен интеграл Ито по винеровскому процессу, который вводится двумя способами. Также рассмотрен интеграл по мартингальной мере, позволяющий строить процессы со скачками. Доказана формула Ито как для непрерывных процессов типа стохастического интеграла, так и для аналогичных процессов со скачками. Дальнейшее развитие темы будет раскрыто в модуле «Теория стохастичесих дифференциальных уравнений».
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тема 1 | Сведения из теории меры и интегрирования; сигма-алгебры; предельные теоремы Лебега, о монотонной сходимости, лемма Фату. | |
| Тема 2 | Теорема Колмогорова о непрерывности случайного процесса и поля. | |
| Тема 3 | Другие теоремы о непрерывности: непрерывность в пространствах Гельдера, непрерывность гауссовских процессов. | |
| Тема 4 | Винеровский процесс (ВП), его свойства. | |
| Тема 5 | Квадратическая вариация ВП. | |
| Тема 6 | Стохастический интеграл Ито по ВП: первое определение, основные свойства. | |
| Тема 7 | Марковские моменты и моменты остановки. Мартингальные неравенства для стохастического интеграла Ито. | |
| Тема 8 | Формула Ито для процесса, имеющего стохастический дифференциал Ито. | |
| Тема 9 | Структурные меры, второе определение стохастического интеграла. | |
| Тема 10 | Экспоненты Гирсанова; теорема Гирсанова о замене меры и о ВП по новой мере. | |
| Тема 11 | Примеры стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Линейные СДУ. | |
| Тема 12 | Теоремы Ито и Гирсанова о существовании и единственности решения. | |
| Тема 13 | Стохастически непрерывные процессы с независимыми приращениями. | |
| Тема 14 | Структура процесса с дискретной мерой Леви. | |
| Тема 15 | Стохастический интеграл по случайной мартингальной мере. | |
| Тема 16 | Формула Ито для процессов со скачками. | |
| Тема 17 | Теорема Леви-Хинчина о процессах с независимыми приращениями | |
| Тема 18 | Понятие стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Сильные и слабые решения. Теорема Ито о сильных решениях. |
| Тема 19 | Экспоненты Гирсанова и теорема Гирсанова о замене меры; слабые решения СДУ как следствие теоремы Гирсанова. |
| Тема 20 | Единственность решения по распределению. |
| Тема 21 | Теорема Бенеша о слабых решениях. Единственность по распределению. |
| Тема 22 | Обобщения теоремы Бенеша. |
| Тема 23 | Теорема Скорохода о слабой сходимости и едином вероятностном пространстве. |
| Тема 24 | Теорема Скорохода о существовании слабого решения. |
| Тема 25 | Неравенство Крылова. |
| Тема 26 | Теорема Крылова о слабых решениях. |
| Тема 27 | Принцип Ямада — Ватанабе. |
| Тема 28 | Теоремы Ямада — Ватанабе о сильных решениях. |
| Тема 29 | Теорема Накао. |
| Тема 30 | Другие теоремы о сильных решениях (Звонкина и др.). |
| Тема 31 | Теорема Басса о слабой единственности. |
| Тема 32 | Марковское свойство решений СДУ. |
| Тема 33 | Связь винеровского процесса с оператором Лапласа и тепловым уравнением. |
| Тема 34 | Связь решений СДУ с эллиптическими и параболическими уравнениями второго порядка. |
| Тема 35 | Неравенство Харнака для недивергентных эллиптических операторов второго порядка, его интерпретация в терминах СДУ |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к устному зачету):*

1. Теоремы Прохорова, Улама о компактности семейства мер.

2. Теорема о том, что мера определяется множеством значений интегралов по ней от непрерывных ограниченных функций.

3. Теорема Колмогорова о непрерывности процесса и/или поля.

4. Построение винеровского процесса (ВП) как предела простых случайных блужданий.

5. Вычисление квадратической вариации ВП.

6. Определение стохастического интеграла Ито по ВП, изометрия, доказательство основных свойств.

7. Неравенство Дуба-Колмогорова для дискретных мартингалов.

8. Доказательство мартингального свойства стохастического интеграла.

9. Марковские моменты и их дискретизация.

10. Неравенство Дуба для мартингалов.

11. Формула Ито для произведения.

12. Формула Ито для полиномов.

13. Формула Ито для непрерывных функций с двумя непрерывными производными с помощью её приближения полиномами.

14. Определение стохастического интеграла по случайным мерам.

15. Стохастические экспоненты: супермартингальное свойство, мартингальное свойство для ограниченных подынтегральных функций.

16. Теорема Леви-Хинчина о процессах с независимыми приращениями.

17. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), теорема Ито о сильных решениях.

18. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), слабые решения СДУ как следствие теоремы Гирсанова о замене меры.

19. Теорема Гирсанова о замене меры.

20. Теорема Скорохода о слабых решениях СДУ.

21. Теорема Крылова о слабых решениях СДУ.

22. Теорема Ямада-Ватанабе о сильной единственности.

23. Теорема Звонкина о сильном решении СДУ.

24. Марковское свойство решений СДУ (по лекциям Крылова).

25. Представление решения уравнения Лапласа с помощью винеровского процесса.

26. Представление решения уравнения теплопроводности с помощью винеровского процесса.

27. Представление решения эллиптических уравнений с помощью СДУ.

28. Представление решения параболических уравнений с помощью СДУ.

Примеры типовых задач

1. Обоснуйте возможность определения стохастического интеграла как непрерывной функции верхнего предела.

2. Применить формулу Ито к модулю многомерного винеровского процесса (ВП).

3. С помощью формулы Ито или другими методами показать возвратность одномерного ВП.

4. С помощью формулы Ито или другими методами показать невозвратность трехмерного ВП.

Примеры тем для самостоятельной работы

1. Теорема о непрерывности процесса в смысле Гельдера.

2. Достаточные условия непрерывность для гауссовского процесса или поля.

3. Доказательство непрерывности винеровского процесса.

4. Непосредственное построение винеровского процесса с непрерывными траекториями.

5. Стохастический интеграл по многомерному ВП.

6. Стохастический интеграл со случайными нижним и верхним пределами (моментами остановки).

7. Аппроксимации стохастического интеграла интегральными суммами Римана.

8. Неравенство Буркхольдера-Дэвиса-Ганди для стохастического интеграла.

9. «Прямое» доказательство формулы Ито без помощи сведения к полиномам.

10. Достаточные условия (Гихмана-Скорохода, Новикова и др.) стохастической экспоненты оказаться мартингалом.

11. Характеризация Леви винеровского процесса.

12. Структура процессов с независимыми приращениями с дискретной мерой Леви.

13. Формула Ито для диффузионных процессов со скачками.

14. Априорные оценки моментов решений СДУ.

15. Возвратные и транзиентные СДУ; функции Ляпунова.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов.* Москва, Физматлит, 2003.

2. Жакод Ж., Ширяев А.Н. *Предельные теоремы для случайных процессов*. Москва, Физматлит, 1994.

3. Вентцель А.Д., *Курс теории случайных процессов*, Москва, Наука, 1996.

4. Крылов Н.В., *Введение в теорию случайных процессов*, части 1, 2, Москва, МГУ, 1986-1987.

5. Watanabe S., Ikeda N. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1989.

6. Крылов Н.В., *Управляемые процессы диффузионного типа*, Москва, Наука, 1977.

7. Хасьминский Р.З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.* М., 1989.

8. Эллиотт Р. *Стохастический анализ и его приложения*, Москва, Мир, 1986.

9. Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*. Москва, Мир, АСТ, 2003.

Дополнительная литература:

1. С.В. Анулова, А.Ю. Веретенников, Н. В. Крылов, и др. Стохастическое исчисление. ВИНИТИ, Москва, сер. Фундаментальные исследования, 1989, т.35. (Engl. Transl. S. V. Anulova, A. Yu. Veretennikov, N. V. Krylov, R. Sh. Liptser, A. N. Shiryaev, “Stochastic calculus”, Probability Theory III: Stochastic Calculus, 1998, Springer Paperback – Dec. 2010)

2. N. V. Krylov, Introduction to the Theory of Random Processes (Graduate Studies in Mathematics), AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

3. D. Stroock, S. R. S. Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes, 2006 ed., Springer, Berlin, Paperback 2014.

4. D. Applebaum, [Lévy Processes and Stochastic Calculus](https://books.google.com/books/about/Lévy_Processes_and_Stochastic_Calculus.html?id=q7eDUjdJxIkC#_blank), CUP, Cambridge, 2004.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

<http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html>

**Приложение утверждено на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 10 от 07 июня 2017 г.**