

**Оценка возможностей одного простого метода расчета величины риска**

А.Л. Долгополов, В.Н. Тутубалин, А.А. Чапчаев

**Evaluation of a simple method for Value at Risk assesment**

A.L. Dolgopolov, V.N. Tutubalin, A.A. Chapchayev

**Аннотация**

В работе рассматривается простой метод для расчета величины риска (Value at Risk, VaR), основанный на привлечении дополнительной информации - динамики биржевых цен актива с шагом по времени 10 минут (в то время как VaR вычисляется с шагом по времени 1 сутки).

**1. Введение: сложившиеся практические приложения актуарно-финансовой математики**

Глядя из высотного здания Московского университета на те или иные финансовые институты, нельзя составить себе полного представления о задачах финансовой системы: для этого надо было бы работать в одном из её подразделений. Но одна из задач достаточно очевидна. Имеется большое количество людей, которые хранят свои деньги в карманах, потому что они там прекрасно помещаются, а с другой стороны, имеется сравнительно небольшая группа таких людей, у которых деньги в карманах не помещаются, и потому они их хранят в сейфах. Задача перекачки денег из карманов в сейфы актуальна во все времена. Например, можно заниматься страхованием, при котором сначала берутся деньги за страховой полис, а через некоторое время производится выплата страхового возмещения (если наступил страховой случай и попался достаточно упорный страхователь, которого не удается убедить в том, что он сам что-нибудь так сильно нарушил, что на возмещение не имеет права). Или можно давать деньги в долг под определенные проценты. В последнем случае риск невозврата заставляет банк так завышать процентные ставки, чтобы компенсировать невозврат за счет тех, кто возвращает заем, и еще получить некоторый доход. Еще можно продавать ценные или якобы ценные бумаги (например, паи в паевых фондах или билеты МММ).

К сожалению, все способы перекачки денег из карманов в сейфы чреваты социальными конфликтами. Возникают обманутые вкладчики, дольщики, страхователи... Наиболее знаменитым из этой категории людей является не кто иной, как И. Ньютон. Весной 1720 года в Англии образовалась "Компания южных морей", цены акций которой стремительно росли. Сначала Ньютон сказал: "Я могу рассчитать пути небесных светил, но я не могу предсказать пути людского безумия" - и с этими словами вышел из рынка, получив доход 7000 фунтов. (Интересно, помещались ли эти деньги в карманах?) Но затем он вновь вошел в рынок, потеряв к осени 20000 фунтов.

Когда Древний Рим отстраивался после нашествия галлов, многие волей-неволей влезли в долги. И вот возникала такая картина, когда по жалобе ростовщика на невозврат римский суд приказывал бить батогами и продать в рабство покрытого ранами центуриона, недавнего героя сопротивления галлам. Народ винил ростовщика за непомерно высокий процент, а ростовщик не мог поступить иначе, потому что понимал, что риск невозврата высок.

Нечестная страховая компания может захватить страховой рынок, предлагая заниженные страховые ставки, а когда дело дойдет до выплаты возмещений - объявить себя банкротом. Появятся обманутые страхователи.

Со всеми этими социальными конфликтами некому разбираться, кроме как государству. Обманутые тем или иным способом граждане обращаются за защитой к власти. А у любого государства нет иных методов управления, кроме бюрократических. Ведь сначала надо издать законы, запрещающие те или иные злоупотребления (а как их сформулировать?), назначить чиновников, следящих за их исполнением и т. д. Лишь потом можно будет кого-то привлечь за нарушение законов. (Если, конечно, чиновники окажутся более порядочными, чем римские консулы, которые бессовестно грабили мелкие греческие государства, теоретически считавшиеся союзниками Рима).

**Основная мысль:** существенные приложения актуарно-финансовой математики лежат в бюрократической области, т.е. в области взаимодействия государства с финансовыми и страховыми институтами. В рамках же отдельных таких институтов некоторые приложения возможны, но они гораздо менее существенны для нормальной жизни общества.

Например, учебники актуарной математики (см., скажем, [1]) полны расчетами вероятностей разорения страховых компаний, но почему-то не содержат сопоставления этих расчетов с реальными фактами разорения. На основании некоторых косвенных данных можно высказать следующую гипотезу о причинах такого невнимания к реальности. По-видимому, по крайней мере в западных странах, чисто страховая деятельность вообще убыточна. Конкурентная борьба между страховыми компаниями привела к тому, что страховые ставки являются чрезмерно низкими. Но все-таки страховые компании сначала получают деньги с клиентов, а страховые возмещения платят (если придется) позже. За это время компании могут спекулировать на финансовых рынках, используя полученные деньги. Разорение или процветание той или иной страховой компании связано с исходом этих спекуляций, а вовсе не с теми моделями разорения, которые рассматриваются в учебниках актуарной математики. Тем не менее, эти учебники имеют существенное практическое значение, потому что переписку с Росстрахнадзором компания может вести только в тех терминах, которые есть в учебниках. Иначе её не поймут.

Дело в том, что любая человеческая деятельность требует сначала создания некоторого идеального образа той части мира, в которой мы собираемся действовать., так сказать, наделения тех или иных реальных явлений своеобразной идеальной "душой". Например, при изучении в математической статистике основных приемов обработки наблюдений бывает нужно дать определение выборки. Учебник, ориентированный на математиков, может сказать так: *выборка - это совокупность нескольких независимых одинаково распределенных случайных величин.* Но это не будет правдой, потому что элементы выборки даны нам в виде чисел, а не в виде измеримых функций на некотором пространстве элементарных событий. Правильно будет сказать так: *выборка - это совокупность нескольких чисел, душой которых являются* (как мы предполагаем) *независимые одинаково распределенные случайные величины.* Ну а дальше начинается некоторая пикантность, состоящая в том, что элементы выборки (как числа) обозначаются но ровно так же обозначаются и случайные величины как составные части души (и так же обозначаются переменные интегрирования, если речь идет о плотности вероятности). Вот и страховую деятельность (в частности, в аспекте ее взаимодействия с государственным надзором) приходится наделять душой, которая изготавливается в учебниках актуарной математики.

Обратимся теперь к финансовой математике, точнее - к стохастической финансовой математике, которая основана на предположении, что колебания курсов ценных бумаг могут рассматриваться как случайные величины. Модели этих случайных величин таковы, что выгодная спекуляция на курсах бумаг в финансовой математике теоретически вообще невозможна. (Но почему-то студенты, которым предлагается придумать выигрышную стратегию спекуляций, обычно с этим справляются и проводят в имитации спекуляций успешные эксперименты.) Есть, правда, в стохастической финансовой математике научно интересная теория о хеджировании финансовых обязательств с помощью самофинансируемого портфеля. Но во многих случаях возможно тривиальное хеджирование. Например, при хеджировании опциона-колл эмитент опциона может в момент его продажи купить целиком ту акцию, которую, возможно, придется в будущем поставить покупателю опциона по заранее оговоренной цене, и держать её у себя до момента исполнения опциона. (Такая стратегия хеджирования называется "прикрытый опцион"). Есть частичные данные, показывающие, что этот тривиальный способ хеджирования может оказаться в среднем выгоднее, чем хеджирование по Блэку-Шоулсу. Но в сколько-нибудь широком объеме этот вопрос не изучен.

Однако, благодаря трудам Базельского комитета по банковскому надзору, представление о случайности колебаний биржевых курсов нашло важное практическое применение в области бюрократических установлений о формировании банковских резервов. Таким образом, Базельский комитет обеспечил рабочими местами в банках специалистов в области теории вероятностей, повышая при этом (как предполагается) устойчивость банковской системы в целом. Мы видели в 1998 году, когда большинство банков вообще прекратило платежи, а Сбербанк хоть и платил, но с огромными очередями, что развал банковской системы гораздо сильнее нарушает жизнь всех граждан, чем отдельные случаи финансового мошенничества, хотя бы и в крупных размерах. Таким образом, Базельский комитет непосредственно заботится о банках и о специалистах по теории вероятностей, но опосредованно - и о всем населении. Конкретные детали этой заботы см. ниже.

**2. Величина риска и банковские резервы**

Речь идет о так называемом рыночном риске. (Базельский комитет заботится также с помощью вероятностных представлений и о кредитном риске для банка, но здесь это не рассматривается.) Кроме важнейшей задачи по перекачке денег из карманов в сейфы, финансовый рынок занимается ещё выработкой цен различных активов (в частности, акций, обменных курсов валют и т.д.) Рассмотрим для определенности цену какой-нибудь акции в момент *t* (под ней понимается цена сделки, т.е. покупки/продажи этих акций в ближайший момент, предшествующий моменту *t*). Мало пользы в том, чтобы объявить реализацией случайного процесса на каком-то широком промежутке значений *t*, поскольку другую реализацию на том же промежутке мы получить не можем, а вероятностные понятия относятся к объектам, которые можно воспроизводить в опыте много раз. Но классическое колмогоровское понятие процесса со стационарными приращениями вполне применимо: надо только рассматривать либо *логарифмические приращения*, т.е. величины

 ,

либо относительные приращения (в финансах называемые *возвратами*), т.е. величины

 

При небольших *h* (порядка одних суток) логарифмические приращения и возвраты численно близки между собой, поскольку те и другие составляют величины порядка единиц процентов, а следовательно,

 

Однако при *h* порядка десятка суток и более между логарифмическими приращениями и возвратами могут быть заметные отличия.

Обработка реальных данных о биржевых ценах активов показывает, что в грубом приближении логарифмические приращения и возвраты за непересекающиеся промежутки времени похожи на независимые одинаково распределенные случайные величины (в том смысле, в каком реальные числа могут быть схожи со своей предполагаемой душой). В частности, возникает понятие их теоретического закона распределения. Понятие величины риска (Value at Risk, VaR) определяется в терминах этого теоретического закона.

Собственно говоря, есть два понятия VaR - относительная и абсолютная величина риска. Проще всего определить относительную величину, сказав, например, что (-VaRh(t)) для логарифмических приращений - это квантиль уровня α для распределения вероятностей этих приращений; иными словами,

 ,

где α - некоторое малое число (ранее рекомендовалось значение 0.05, а в настоящее время - значение 0.01). Таким образом, лишь с малой вероятностью α логарифм курса актива может уменьшиться на величину VaRh(t) или более за счет лишь рыночных колебаний цены актива. В этом случае абсолютные потери капитала на одной единице актива составят не менее, чем Если в собственности имеется много единиц актива, то абсолютные потери пропорциональны числу этих единиц, т.е. капиталу, вложенному в актив.

В теории рассуждения ведутся в терминах относительных потерь, в то время как банковские резервы, естественно, вычисляются в абсолютных величинах. Пока что мы выяснили связь между относительными и абсолютными значениями величины риска для того частного (и практически невозможного) случая, когда портфель ценных бумаг какого-то банка состоит ровно из одного актива.

Базельская концепция формирования резервов представляет собой некий бюрократический шедевр (в хорошем смысле слова). Согласно этой концепции, каждый банк вычисляет величину риска, как он умеет – в том смысле, что надзорный орган страны не вдается в теорию и технику этих вычислений в каждом отдельном банке (это-то и создает рабочие места в банках для специалистов по теории вероятностей). Но банк обязан предъявить надзорному органу определенный тест качества этих вычислений. Например, пусть в конце каждого дня *t* банк вычисляет величину VaR1(t), т.е. определяет, ниже чего не должна (с вероятностью 0,99) опуститься цена актива к концу дня *t+*1. Когда этот день *t+*1 пройдет, становится известным, случился ли **выход**  цены актива ниже указанного в день *t* значения. Количество выходов за длительный промежуток времени должно соответствовать теоретической вероятности выхода 0.01. Конкретно, в каждый день *t* банк подсчитывает, сколько именно выходов произошло за год, кончающийся в день *t*, и в зависимости от согласия фактического числа выходов с математическим ожиданием подсчитывает тот резерв, который ему надо сформировать в начале дня *t+*1. В стохастической финансовой математике нерабочие дни просто выбрасываются, так что в календарном году примерно 250 дней, т.е. математическое ожидание числа выходов составляет 2.5. Если число выходов не превосходит четырех, то это называется «зеленой зоной», если оно от 5 до 9 – «желтой зоной», ну а если 10 или более, то «красной зоной». В первом случае резерв наименьший, во втором – побольше, в третьем – еще больше, согласно точно сформулированным правилам, которые описываются ниже.

Итак, вычисление величины риска – это внутреннее дело каждого отдельного банка (надо предъявить только результат теста). Вычисление же резервов по известным значениям VaR единообразно кодифицируется. Именно, для резерва *Rt* (который надо сформировать то ли в конце дня *t,* то ли в начале дня *t+*1) выписывается следующая формула:

 

Здесь, по определению, *М*=3, а число *m* принимает одно из трех значений 0; 0.5; 1 в зависимости от того, в какой зоне – зеленой, желтой или красной – оказался данный банк по результатам теста на день *t.* Следует также определить шаг по времени *h.* В отношении последнего имеется некоторое недоумение, которое вытекает из следующего **примера.**

Пусть, как и выше, портфель состоит из одного актива. В грубом приближении логарифмические приращения  имеют нормальное распределение с нулевым средним и со стандартным отклонением вида . Типичное значение последнего при *h*= 1 сутки составляет 0.02. Поскольку 1% -ная квантиль стандартного нормального закона равна (-2.326), типичное значение VaR при *h* = 1 сутки равно примерно 0,046. После умножения на число *M+m,* лежащее между 3 и 4, получаем значение *Rt(h)* примерно в интервале от 0,14 до 0.18. Конечно, это относительное значение резервов, которое еще надо пересчитать в абсолютное. Логично было бы (поскольку мы отправлялись от логарифмических приращений цен) этот пересчет вести по формуле . Но, по-видимому, имеется в виду более простой пересчет вида В таком случае резерв составляет от 14 до 18 процентов капитала, вложенного в ценную бумагу, и это при расчете VaR на один день вперед. Между тем, в учебнике [2] неоднократно утверждается, что, по замыслу Базельского комитета, величина риска должна рассчитываться на 10 дней вперед. В грубом приближении VaR и, соответственно, резервы должны в таком случае возрасти в  раз, т.е. составить примерно половину капитала, вкладываемого в рыночные спекуляции. Такое вряд ли приемлемо для банков. (К тому же известно, что расчет с помощью нормального распределения существенно преуменьшает величину риска.)

В дальнейшем мы рассматриваем расчет VaR на одни сутки вперед (предполагая линейный пересчет относительных резервов в абсолютные).

**3. Цели бюрократических игр с риском и резервами**

Экономическая деятельность отдельных субъектов может быть не только общественно желательной, но и в каких-то отношениях вредной. Например, в многоэтажных жилых домах жильцы некоторых квартир разрушают систему вентиляции с целью увеличения площади кухни, после чего вентиляция оказывается неработоспособной на всех этажах. Что может сделать с этим государство? Оно, конечно, может издать закон, обязывающий получать разрешение на подобные «перепланировки» квартир, но в России, как известно, суровость законов смягчается необязательностью их исполнения. Однако, если чиновники будут систематически (скажем, раз в полгода) взимать хорошую мзду за неисполнение закона в указанном выше случае, то (по крайней мере некоторые) владельцы квартир такого не выдержат и восстановят вентиляцию.

В случае создания банковских резервов формально нет речи о передаче средств банка кому-либо. Средства банка, переводимые в резерв, могут, например, помещаться на такой счет в том же банке, с которого их нельзя взять ни для спекуляций на рынке ценных бумаг, ни для предоставления кредитов, но можно для выплаты по обязательствам банка. Таким образом, опасность возникновения кризиса банковской системы, при котором все всем должны и ни у кого денег нет, снижается. Какое-либо количественное измерение этой опасности и ее снижения невозможно, хотя бы потому, что экономическая неустойчивость, если она возникнет, всегда будет комбинироваться с неустойчивостью политической. Поэтому величина резервов, в частности, выбор множителей М и m, а также уровня α, на котором вычисляется VaR, научного обоснования иметь не могут. Это дело волевого бюрократического решения.

Но сколь тяжко это решение для владельца банка! Банк ведь только затем и создается, чтобы путем манипуляций с активами увеличивать капитал, составляемый из этих активов. А с банковскими резервами многие манипуляции невозможны. Поэтому всякий банкир стремится к тому, чтобы формальные требования о создании резервов были соблюдены, но при этом в резерв был выведен по возможности меньший капитал. В частности, если величины VaRh(t) рассчитывать так, чтобы они оказались поменьше, то это приведет к увеличению числа выходов ниже рассчитанных границ, но штраф, который положил за это Базельский комитет (в виде увеличения числа m от 0 до 0,5 и 1) не так уж велик в сравнении со значением М=3. Конечно, было бы неприлично, если бы банк все время оказывался в красной зоне (по числу выходов за предшествующий год). Но если находиться большую часть времени в желтой зоне, иногда попадая в зеленую или красную, то это было бы приемлемо.

Таким образом, задачей специалиста по теории вероятностей, который получает зарплату в банке, является не минимизация (либо доведение до расчетного) числа выходов, а минимизация среднего (по времени) значения банковского резерва (его относительной величины).

Остановимся еще на двух аспектах расчета резервов.

1. Портфель ценных бумаг банка не может состоять из одного актива. Предлагается, тем не менее, свести задачу к случаю одного актива следующим образом. К концу дня *t* у банка образовался некий портфель бумаг

 

в котором  - число единиц *i*-го актива, каждая из которых в момент *t* стоит *Si(t).* Проследим предшествующую рыночную историю этого актива как одной ценной бумаги в моменты *t-h, t-2h,…,* не меняя величин, но вместо цен *Si(t)* подставляя цены этих активов в предыдущие моменты времени. На основании этой рыночной истории вычислим VaR для этой ценной бумаги, никак не вдаваясь в многомерное совместное распределение вероятностей для приращений цен отдельных бумаг, образующих портфель.

2. Но такой подход к оценке величины риска уместен в том случае, если в течение дня *t+*1 количество любой ценной бумаги в портфеле не меняется. Однако Базельский комитет дает понять, что хотел бы иметь оценку возможных потерь и в том случае, когда в течение дня *t+*1 банк продолжает операции с бумагами, т.е. может менять состав портфеля. Для прояснения этого вопроса необходимо иметь фактические данные об операциях с ценными бумагами, которых банки не предоставляют. Но даже если бы такие данные были, оставалось бы непонятно, как вычленить из них данные о рыночном риске. Капитал портфеля может, скажем, уменьшиться по той причине, что банк дал своему дилеру задание продать часть ценных бумаг, чтобы получить деньги для уплаты по обязательству банка. Такое уменьшение капитала не имеет отношения к рыночному риску. Ну а если дилер продал в начале дня *t+*1 именно те бумаги, которые к концу этого дня упали в цене, и тем отчасти компенсировал рыночный риск?

 Похоже, что единственной приемлемой позицией для понимания рыночного риска портфеля ценных бумаг является понимание этого риска при неизменном (в течение следующих суток, если речь идет о шаге времени в одни сутки) составе портфеля. При таком понимании рыночного риска делается ясным, как следует формировать относительный резерв. В этом случае вопрос теоретически сводится к одной ценной бумаге, но весьма желательно было бы проверить в экспериментах эффективность такого сведения. Однако для таких экспериментов необходимо иметь данные о динамике состава портфелей тех или иных банков, чем академическая наука не располагает. Потенциально существует, правда, некоторая возможность экономического шпионажа благодаря тому, что довольно многие студенты старших курсов работают в банках, но при этом должны также представлять курсовые и дипломные работы. Однако реальное осуществление подобных способов получения информации достаточно затруднительно.

**4. Тривиальный способ оценки VaR и задача исследования**

У А.П. Чехова есть рассказ следующего содержания. Гимназист последнего класса репетирует сына купца по арифметике. Надо решить задачу с двумя неизвестными, но гимназист может составить только одно уравнение и потому начинает лихорадочно вспоминать, как его учили решать задачи на неопределенные уравнения, и ничего у него не выходит. А купец, который сидит тут же, пощелкал две минуты на счетах и получил правильный ответ. Целесообразно и нам ввести такое действующее лицо в задаче расчета VaR.

Нужно понять, насколько низко может (в одном случае из ста) опуститься в сравнении с его сегодняшним значениемВозьмем сто прошлых значений этой разности, упорядочим их (на этот раз не с помощью счетов, а с помощью пакета Excel: ведь купец современный, с ноутбуком) и возьмем крайнее слева значение. Или возьмем тысячу прошлых значений, но тогда в качестве VaR возьмем десятое слева значение. Вот так будет рассуждать купец, вовсе не знающий теории вероятностей. Понятно, что алгоритм для вычисления VaR автоматически порождает расчет величины (относительных) резервов.

Спрашивается, нужна ли купцу вся вероятностная премудрость, изложенная, например, в книге [2]? Ответ: она нужна не в том случае, когда с помощью нее удается получить фактическое число выходов, более близкое к теоретическому математическому ожиданию (в среднем 2.5 выхода в год). Купец будет уважать ее в том случае, когда с ее помощью удается сократить средний резерв (ну хотя бы на 10% в сравнении с тем резервом, который получается у купца). Между тем, авторы книги [2] даже не догадываются поставить этот вопрос.

Задача о вычислении VaR привлекательна еще тем, что никогда не будет решена до конца: за ее неокончательное, но чем-то улучшенное решение всегда можно будет получать зарплату. Дело в том, что она поставлена в вероятностных терминах: найти 1%-ную квантиль некоего распределения вероятностей. Но этого распределения вероятностей в точном смысле в природе не существует: логарифмические приращения курсов ценных бумаг колеблются то больше, то меньше, не обладая статистической однородностью во времени. Следовательно, в такие периоды времени, когда эти колебания больше, должны быть больше и значенияVaR, а с ними и резервы капитала. Когда же эти колебания меньше, можно уменьшить резервы. Если же купец ориентируется на тысячу прошлых значений для логарифмических приращений (это четыре календарных года), беря десятое слева значение в качестве VaR, то он фактически ориентируется на наиболее сильные колебания курсов в течение четырех лет. Стало быть, если специалист по теории вероятностей укажет способ оперативной оценки величины колебаний курсов (использующий лишь недавние во времени логарифмические приращения цен), то он, в принципе, может сократить среднюю величину резервов. Источник информации для подобной оперативной оценки почти очевиден: нужно использовать не только цены закрытия торгов (как это делается, например, в учебнике [2]), но и колебания цен актива в течение одной или нескольких торговых сессий.

Конкретно в данной работе исследование проходило следующим образом. Нужно в конце дня *t* оценить распределение вероятностей величины$ ∆\_{1}lnS\_{t}=ln⁡(\frac{S\_{t+1}}{S\_{t}})$. С этой целью используем данные о ценах актива в течение одной биржевой сессии (в течение дня *t*) с шагом по времени *h=*10 минут (логарифмических приращений с таким шагом можно составить 40), оцениваем по этим сорока наблюдениям среднее значение квадрата логарифмического приращения за 10 минут, умножаем эту оценку на 40 и из полученного результата извлекаем квадратный корень, который обозначаем $σ\_{t}.$ Составляем нормированную величину

$$adj\left(t\right)=∆\_{1}lnS\_{t}/σ\_{t.}$$

(Обозначение *adj* от английского *adjusted.*)

Эксперимент показывает, что нормированные такой оценкой дисперсии логарифмические приращения цен за одни сутки обладают следующими свойствами. Для любого рассмотренного здесь актива их распределение не очень сильно отличается от стандартного нормального распределения N(0,1). (В этом смысле подтверждается правота первоначального мнения Л.Башелье, что ежедневные приращения цен распределены нормально с нулевым средним, но только, в отличие от Башелье, следует признать, что с *переменной во времени дисперсией;* для ежедневных приращений безразлично, о чем говорить – о приращениях самих цен или их логарифмов.) Но, конечно, эта близость не такова, чтобы сделать несущественными отклонения от нормального распределения в области вероятностей порядка 0.01. Дальнейшее содержание работы посвящено сравнению различных способов трактовки этих вероятностей с ориентацией на минимизацию резервов капитала.

Таким образом, предлагаемое для пользы купца применение теории вероятностей состоит лишь в том, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий (независимыми величинами считаются десятиминутные приращения, которые, суммируясь в количестве 40 штук, дают приращение за сутки).

**5. Результаты работы**

Для экспериментов были взяты данные о динамике цен акций 11 американских компаний за период с 1 сентября 2010 года по 1 сентября 2012 г. Список компаний следующий;

1. 3M co. - диверсифицированная компания, работающая во многих индустриях
2. Exxon Mobil co. - крупнейшая нефтяная компания в мире
3. Walt Disney co. - развлекательная компания
4. JPMorgan Chase co. - финансовый конгломерат
5. First Solar inc. - инновационная компания, производящая фотоэлементы, солнечные электростанции
6. Hewlett-Packard – компания, производящая технику
7. CaterpillarInc.–крупнейший производитель тяжелой техники
8. Johnson & Johnson–фармацевтическая компания
9. Coca-ColaCompany–крупнейший производитель напитков
10. CiscoInc.–компания, производящая сетевое оборудование
11. Verizon Communications – крупнейший сотовый оператор

Данные за первый год (сентябрь 2010 – сентябрь 2011) были использованы для изучения статистических свойств ежедневных логарифмических приращений цен (нормированных оценкой стандартного отклонения по 10-минутным приращениям), а данные за второй год (сентябрь 2011 – сентябрь 2012) для оценки средней величины относительных резервов капитала в зависимости от того или иного способа расчета VaR (а также числа выходов за границу (–VaR)).

Например, для первой по списку компании 3Мсо получилась следующая эмпирическая функция в обычном масштабе:

График $adj$ эмпирического распределения статистических данных и $N(0;1):$ компания 3Мсо

В обычном масштабе видна лишь еле заметная разница между эмпирической функцией распределения и ожидаемым в идеале нормальным распределением N(0,1). (В данном случае Л.Башелье должен считаться провидцем.) Однако область вероятностей порядка 0.01 нужно рассматривать не в обычном, а в нормальном масштабе. Для последующего сглаживания данных оказалось удобным поменять местами оси абсцисс и ординат для рисунков в нормальном масштабе. Для компании 3Мсо соответствующий рисунок следующий:

График $adj$ эмпирического распределения статистических данных и $N(0;1)$ в нормальном масштабе: компания 3Мсо

(по оси абсцисс величины Φ-1(р), по оси ординат выборочные значения)

 $Место для формулы.$

Наличие тяжелого левого хвоста на этом рисунке видно хорошо. По поводу гладкой кривой (черного цвета) на этом рисунке нужно сказать следующее. Эмпирические функции финансовых данных в нормальном масштабе сильно отличаются от прямых линий, но всегда имеют несложную форму, так что хорошо сглаживаются, например, школьной параболой второго порядка. Это и есть черная кривая на рисунке. Правило для вычисления VaR, вытекающее из этого рисунка следующее. Нужно взять ординату на параболе, соответствующую абсциссе, равной (-2,326),и поменять ее знак: это будет 3,69. Тогда VaRt=3,69σt, т.е. оценку стандартного отклонения приращения цены за сутки по 10-минутным приращениям в день t нужно умножить на 3,69. Этот способ оценки VaR в дальнейшем называется *adjParab.*

Другой способ получается, если постулировать нормальное распределение N(0,1) для нормированных логарифмических приращений. В этом случае вместо находимых по эмпирическим данным множителей (3,69 для компании 3Мсо) всегда берется один и тот же множитель 2, 326, отвечающий нормальному закону. Этот способ в дальнейшем называется *adjnorm.*

Наконец, третий способ соответствует купцу: в качестве VaR берется наихудшее из 100 предыдущих логарифмических приращений. Этот способ называется *adjloss.*

Суммарно результаты применения этих трех разных способов расчета VaR приведены в следующих таблицах.

А) По числу выходов за VaR в течение года (сентябрь 2011 – сентябрь 2012)

Количество выходов:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название акций |  Выходов при norm | При Loss | При Parab |
| 3M co. | 6 | 2 | 3 |
| Exxon Mobil | 4 | 2 | 1 |
| JPMorgan | 8 | 1 | 3 |
| Walt Disney | 6 | 1 | 1 |
| First Solar | 13 | 3 | 4 |
| Hewlett-Packard | 8 | 3 | 4 |
| Caterpillar Inc. | 11 | 5 | 7 |
| Johnson & Johnson | 4 | 4 | 1 |
| Coca-Cola Company | 6 | 2 | 2 |
| Cisco Inc. | 12 | 1 | 8 |
| Verizon Communications | 6 | 2 | 5 |

В целом количество выходов при расчете по нормальному закону явно избыточное, а два других способа дают приемлемое число выходов. Оно сходно с тем, которое дается в книге [2], но в этой книге и спользуются несравненно более сложные модели динамики цен.

Б) По среднему (по времени) размеру относительного резерва (также указывается среднеквадратический разброс значений резерва в разные дни)

Значения резервов по способам AdjNorm, AdjLoss, AdjParab:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Название акций | $$Mean(Adj Norm)/Mean(Adj Loss)/Mean(Adj Parab)$$ | $$σ(Adj Norm)/σ(Adj Loss)/σ(Adj Parab)$$ |
| 3M co. | $$0.11/0.159/0.150$$ | $$0.038/0.049/0.052$$ |
| Exxon Mobil | $$0.0891/0.163/0.117$$ | $$0.027/0.065/0.036$$ |
| JPMorgan | $$0.183/0.284/0.2$$ | $$0.047/0.059/0.051$$ |
| Walt Disney | $$0.122/0.193/0.154$$ | $$0.037/0.057/0.047$$ |
| First Solar | $$0.398/0.598/0.504$$ | $$0.038/0.228/0.048$$ |
| Hewlett-Packard | $$0.19/0.37/0.21$$ | $$0.07/0.158/0.0758$$ |
| Caterpillar Inc. | $$0.19/0.21/0.21$$ | $$0.068/0.11/0.067$$ |
| Johnson & Johnson | $$0.07/0.06/0.08$$ | $$0.017/0.011/0.021$$ |
| Coca-Cola Company | $$0.09/0.08/0.13$$ | $$0.0269/0.0149/0.03$$ |
| Cisco Inc. | $$0.155/0.39/0.18$$ | $$0.04/0.124/0.043$$ |
| Verizon Communications | $$0.11/0.13/0.12$$ | $$0.037/0.041/0.04$$ |

Из этой таблицы видно, что неблагополучный по числу выходов (и осуждаемый во всех учебниках) способ расчета *Adjnorm* дает в целом наилучший результат в смысле среднего размера резервов. Штраф, который назначил Базельский комитет за превышение числа выходов, явно недостаточен.

Наконец, для справки приводится третья таблица с указанием уравнений парабол, приближающих левые хвосты эмпирических функций распределения, а также коэффициентов *Р*(2.326), используемых для способа *adjparab.*

Коэффициенты приближающей параболы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Название акций | $$P(x)=ax^{2}+bx+c$$ | $$P(2.326)$$ |
| 3M co. | $$P\left(x\right)=-0.57x^{2}+0.26x$$ | $$P\left(2.326\right)=3.69$$ |
| Exxon Mobil | $$P\left(x\right)=-0.21x^{2}+0.93x+0.25$$ | $$P\left(2.326\right)=3.05$$ |
| JPMorgan | $$P\left(x\right)=-0.23x^{2}+0.69x-0.12$$ | $$P\left(2.326\right)=2.96$$ |
| Walt Disney | $$P\left(x\right)=-0.52x^{2}+0.19x-0.16$$ | $$P\left(2.326\right)=3.42$$ |
| First Solar | $$P\left(x\right)=-0.58x^{2}+0.28x-0.12$$ | $$P\left(2.326\right)=3.88$$ |
| Hewlett-Packard | $$P\left(x\right)=-0.78x^{2}+0.12x$$ | $$P\left(2.326\right)=3.19$$ |
| Caterpillar Inc. | $$P\left(x\right)=-0.53x^{2}+0.26x$$ | $$P\left(2.326\right)=2.69$$ |
| Johnson & Johnson | $$P\left(x\right)=-0.18x^{2}+0.76x$$ | $$P\left(2.326\right)=2.95$$ |
| Coca-Cola Company | $$P\left(x\right)=-0.54x^{2}+0.43x$$ | $$P\left(2.326\right)=3.3$$ |
| Cisco Inc. | $$P\left(x\right)=-0.58x^{2}+0.28x$$ | $$P\left(2.326\right)=2.98$$ |
| Verizon Communications | $$P\left(x\right)=-0.27x^{2}+0.52x$$ | $$P\left(2.326\right)=2.95$$ |

Из этой таблицы видно, что все подученные коэффициенты *Р*(2,326) больше, чем коэффициент 2,326, отвечающий нормальному закону, причем вряд ли можно пользоваться одинаковым для всех компаний коэффициентом.

**Литература**

1.Н. Бауерс, Х. Гербер, Д. Джонс, С. Несбитт, Дж. Хикман. Актуарная математика. Пер. с англ. под ред. В.К. Малиновского. М., "Янус-К", 2001.

2.A.J. McNeil, R.Frey, P.Embrechts. Quantitative Risk Management. Concepts,Techniques and Tools. Princeton Univ. Press, 2005.

 3. http://www.finam.ru