**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Мартингалы и стохастическое исчисление.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. МАРТИНГАЛЫ И СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
2. Преподаватель - проф. А.А. Гущин
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов посвящен изложению основ теории мартингалов и стохастического исчисления. Изучаются основы теории мартингалов с дискретным и непрерывным временем, элементы общей теории случайных процессов, основы теории стохастического интегрирования.
4. Тематическое содержание курса

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Теорема Радона-Никодима и разложение Лебега. |
| Тема 2 | Условное математическое ожидание и его свойства. |
| Тема 3 | Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. |
| Тема 4 | Стохастический базис (дискретное время). Моменты остановки и отвечающие им σ-алгебры. |
| Тема 5 | Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы (дискретное время). Определения и примеры. |
| Тема 6 | Три вида обобщений мартингалов с дискретным временем. Их эквивалентность. |
| Тема 7 | Неравенства для числа пересечений полосы субмартингалом и супермартингалом снизу вверх. Теорема Дуба о сходимости супермартингалов. |
| Тема 8 | Теорема Дуба о сходимости обращенных супермартингалов. Применения теорем Дуба о сходимости. |
| Тема 9 | Теорема П.Леви о сходимости мартингалов и ее применения. |
| Тема 10 | Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора. Тождества Вальда. |
| Тема 11 | Максимальные (о вероятности выхода за уровень) неравенства для субмартингалов и супермартингалов. Максимальные -и L log L- неравенства для субмартингалов. |
| Тема 12 | Неравенства Буркхольдера-Дэвиса-Ганди (дискретное время). |
| Тема 13 | Разложение Дуба. Квадратическая характеристика квадратично интегрируемого мартингала. |
| Тема 14 | Теоремы о множествах сходимости мартингалов и их применения. Неравенства Ленгляра. |
| Тема 15 | Процессы плотности и обобщенной плотности вероятностных мер на пространствах с фильтрацией. Основное тождество последовательного анализа. |
| Тема 16 | Критерий абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер на пространствах с фильтрацией с дискретным временем. |
| Тема 17 | О фундаментальных теоремах стохастической финансовой математики. |
| Тема 18 | Мартингальная характеризация отсутствия арбитража. |
| Тема 19 | Стохастический базис и случайные процессы с непрерывным временем. |
| Тема 20 | Моменты остановки и их свойства (непрерывное время). σ-алгебры, отвечающие моментам остановки. |
| Тема 21 | Измеримая, прогрессивно измеримая, опциональная σ-алгебры. Дебюты. |
| Тема 22 | Предсказуемая σ-алгебра и порождающие ее системы множеств и процессов. |
| Тема 23 | Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с непрерывным временем. Примеры. Процессы с независимыми приращениями. |
| Тема 24 | Теорема о существовании непрерывной справа модификации супермартингала. |
| Тема 25 | Основные теоремы теории мартингалов с непрерывным временем. |
| Тема 26 | Локальные мартингалы с непрерывным временем. Примеры неотрицательных локальных мартингалов, не являющихся мартингалами. |
| Тема 27 | Разложение Дуба-Мейера. Компенсаторы. Квадратично интегрируемые мартингалы. Квадратическая характеристика. |
| Тема 28 | Устойчивые подпространства квадратично интегрируемых мартингалов. |
| Тема 29 | Стохастический интеграл по квадратично интегрируемым мартингалам и его свойства. |
| Тема 30 | Формула Ито. Формула интегрирования по частям. |
| Тема 31 | Стохастическая экспонента и ее свойства. Геометрическое броуновское движение. |
| Тема 32 | Стохастические дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Теорема Радона-Никодима для мер с конечными значениями.
2. Теорема Радона-Никодима для мер с бесконечными значениями. Необходимые и достаточные условия конечности производной Радона-Никодима меры с бесконечными значениями, абсолютно непрерывной относительно меры с конечными значениями.
3. Разложение Лебега. Абсолютная непрерывность и сингулярность вероятностных мер. Обобщенная плотность (теорема существования и единственности).
4. Условное математическое ожидание и его свойства. Необходимые и достаточные условия конечности условного математического ожидания.
5. Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Основные теоремы о равномерной интегрируемости. Критерий Валле-Пуссена.
6. Стохастический базис (дискретное время). Моменты остановки и отвечающие им σ-алгебры: определения и основные свойства.
7. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы (дискретное время). Определения и примеры (суммы независимых случайных величин, выпуклые преобразования, процесс обобщенной плотности).
8. Три вида обобщений мартингалов с дискретным временем: локальные мартингалы, обобщенные мартингалы, мартингальные преобразования. Их эквивалентность.
9. Неравенства для числа пересечений полосы субмартингалом и супермартингалом снизу вверх.
10. Теорема Дуба о сходимости супермартингалов.
11. Теорема Дуба о сходимости обращенных супермартингалов.
12. Усиленный закон больших чисел как следствие теоремы Дуба о сходимости.
13. Теорема П.Леви о сходимости мартингалов. Предельное поведение процесса обобщенной плотности вероятностных мер.
14. Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора.
15. Тождества Вальда.
16. Максимальные (о вероятности выхода за уровень) неравенства для субмартингалов и супермартингалов.
17. Максимальные - и L log L-неравенства для субмартингалов.
18. Неравенства Буркхольдера-Дэвиса-Ганди (дискретное время).
19. Теорема существования и единственности разложения Дуба и его явный вид.
20. Квадратично интегрируемые мартингалы с дискретным временем. Квадратическая характеристика.
21. Теоремы о множествах сходимости мартингалов и их применения.
22. Неравенства Ленгляра.
23. Процессы плотности и обобщенной плотности вероятностных мер на пространствах с фильтрацией: основное тождество последовательного анализа.
24. Критерий абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер на пространствах с фильтрацией с дискретным временем.
25. (B,S)-рынок. Самофинансируемые портфели. Вторая фундаментальная теорема теории арбитража.
26. Мартингальная характеризация отсутствия арбитража (первая фундаментальная теорема теории арбитража).
27. Стохастический базис и случайные процессы с непрерывным временем. Расширение фильтрации, приводящее к обычным условиям. Неразличимые случайные процессы.
28. Моменты остановки и их свойства (непрерывное время). σ-алгебра событий, предшествующих моменту остановки.
29. Измеримая, прогрессивно измеримая, опциональная σ-алгебры: определения и основные свойства.
30. Теорема об измеримости дебюта прогрессивно измеримого множества (без доказательства). Частные случаи теоремы (с доказательствами).
31. Предсказуемая σ-алгебра и порождающие ее системы множеств и процессов.
32. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с непрерывным временем: определения и примеры (выпуклые преобразования, процесс обобщенной плотности).
33. Процессы с независимыми приращениями: два определения и их взаимосвязь.
34. Теорема о существовании непрерывной справа модификации супермартингала.
35. Основные теоремы теории мартингалов с непрерывным временем: теорема о преобразовании свободного выбора, максимальные неравенства (вероятности выхода за уровень) и максимальные -неравенства.
36. Локальные мартингалы с непрерывным временем. Теорема о том, что неотрицательный локальный мартингал является супермартингалом.
37. Примеры неотрицательных локальных мартингалов, не являющихся мартингалами (замена времени в геометрическом броуновском движении, процесс обратной величины к норме трехмерного броуновского движения, выходящего не из нуля).
38. Разложение Дуба-Мейера субмартингала класса (D) (без доказательства). Вывод в качестве следствия разложения Дуба-Мейера произвольного субмартингала.
39. Компенсаторы и оценки их моментов.
40. Квадратично интегрируемые мартингалы. Квадратическая характеристика.
41. Устойчивые подпространства квадратично интегрируемых мартингалов: определение и теорема об устойчивости ортогонального дополнения.
42. Примеры устойчивых подпространств квадратично интегрируемых мартингалов. Чисто разрывные квадратично интегрируемые мартингалы. Теорема об их структуре (без доказательства).
43. Стохастический интеграл по квадратично интегрируемым мартингалам от простых функций и его свойства.
44. Стохастический интеграл по квадратично интегрируемым мартингалам (общий случай) и его свойства.
45. Винеровский и пуассоновский процессы.
46. Формула Ито.
47. Формула интегрирования по частям.
48. Стохастическая экспонента и ее свойства. Теорема единственности.
49. Стохастическая экспонента и ее свойства. Теорема существования.
50. Геометрическое броуновское движение как стохастическая экспонента от броуновского движения со сносом.
51. Стохастические дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности.

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее*

Образцы билетов.

Билет № 1.

А. Теорема Радона-Никодима для мер с конечными значениями.

Б. Теорема об измеримости дебюта прогрессивно измеримого множества (без доказательства). Частные случаи теоремы (с доказательствами).

В. Найти компенсатор пуассоновского процесса.

Билет № 2.

А. Условное математическое ожидание и его свойства. Необходимые и достаточные условия конечности условного математического ожидания.

Б. Процессы с независимыми приращениями: два определения и их взаимосвязь.

В. Привести пример неотрицательного не равномерно интегрируемого мартингала.

Билет № 3.

А. Стохастический интеграл по квадратично интегрируемым мартингалам (общий случай) и его свойства.

Б. Неравенства Ленгляра.

В. Привести пример локального мартингала с дискретным временем, не являющегося мартингалом.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. *Теория случайных процессов*, М.: Физматлит, 2003.
2. Дуб Дж. *Вероятностные процессы*. М.: Физматгиз, 1953.
3. Ширяев А. Н. *Вероятность-1*, М.: Физматлит, 2004.
4. Ширяев А. Н. *Вероятность-2*, М.: Физматлит, 2004.
5. Эллиотт Р. *Стохастический анализ и его приложения*, М.: Мир, 1986.
6. Kallenberg O. *Foundations of Modern Probability,* New York: Springer, 2002.

Дополнительная литература:

1. Деллашери К. *Емкости и случайные процессы*, М.: Мир, 1976.
2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. *Теория мартингалов*, М.: Наука, 1986.
3. Ширяев А. Н. *Основы стохастической финансовой математики*, М.: ФАЗИС, 1998, 2004.
4. Beiglböck M., Siorpaes P *Pathwise versions of the Burkholder-Davis-Gundy inequality*. Bernoulli, , т. 23 №1, 2015, с. 360-373.
5. Gushchin A. A. *Stochastic Calculus for Quantitative Finance*. ISTE/Elsevier, 2015.
6. He S. W., Wang J. G., Yan J. A. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus,* Boca Raton: CRC Press, 1992.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html