**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Дополнительные главы теории вероятностей

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, аналитическую геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *Экзамен* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсовинформационно-телекоммуникационнойсети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
2. Преподаватель - проф. В.В. Сенатов
3. Аннотация курса: спецкурс посвящен классической теории суммирования независимых случайных величин. Рассматриваются оценки точности аппроксимации в предельных теоремах, асимптотические разложения в центральной предельной теореме, предельные теоремы в схеме серий, предельные теоремы с устойчивыми предельными законами. Рассматриваются также вопросы, связанные с различными видами сходимости распределений.
4. Тематическое содержание курса

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Суммы независимых случайных величин и свёртки распределений. Центральная предельная теорема (ЦПТ). Метод характеристических функций. |
| Тема 2 | Переходы из пространства распределений в пространство характеристических функций и обратно. Формулы обращения. Связь между моментами распределений и производными характеристических функций. Разложение характеристической функции в отрезок ряда Тейлора. Связь между гладкостью распределений и поведением характеристических функций на бесконечности. |
| Тема 3 | Неравенство Берри – Эссеена (оценка близости распределений по близости характеристических функций). |
| Тема 4 | Оценка близости характеристических функций в ЦПТ. Теорема Берри – Эссеена. |
| Тема 5 | Оценка скорости сходимости в ЦПТ для распределений с конечным моментом порядка |
| Тема 6 | Оценка скорости сходимости в ЦПТ для гладких распределений при совпадении нескольких моментов с моментами нормального закона. |
| Тема 7 | Решетчатые распределения, свойства их характеристических функций, формула обращения. |
| Тема 8 | Локальные формы ЦПТ для гладких и для решетчатых распределений. |
| Тема 9 | Оценки скорости сходимости в локальных формах ЦПТ. |
| Тема 10 | Неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ. |
| Тема 11 | Асимптотические разложения в ЦПТ. Многочлены и моменты Чебышева – Эрмита. Разложение функции в отрезок ряда Тейлора. |
| Тема 12 | Моменты Чебышева – Эрмита распределений нормированных сумм, скорости их стремления к нулю при росте |
| Тема 13 | Построение асимптотических разложений в ЦПТ для плотностей с использованием сопровождающих зарядов. |
| Тема 14 | Построение асимптотических разложений в ЦПТ для плотностей без использования сопровождающих зарядов. |
| Тема 15 | Общий вид разложений Эджворта – Крамера и Грама – Шарлье для плотностей. |
| Тема 16 | Асимптотические разложения в интегральной форме ЦПТ и в локальной форме ЦПТ для решетчатых распределений. |
| Тема 17 | Числовые характеристики распределений, используемые в оценках точности аппроксимации для асимптотических разложений. |
| Тема 18 | Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений. |
| Тема 19 | Сходимость в основном и слабая сходимость |
| Тема 20 | Метризуемость слабой сходимости Метрика Леви. Критерий слабой относительной компактности. |
| Тема 21 | Сходимость Эквивалентность сходимостей и Непрерывность соответствия между распределениями и характеристическими функциями. |
| Тема 22 | Связь между слабой и равномерной сходимостями. Связь между слабой сходимостью и сходимостью в среднем. Связь между сходимостью по вероятности случайных величин и слабой сходимостью их распределений. |
| Тема 23 | Специальные свойства вероятностных метрик: регулярность, полуаддитивность, однородность. Идеальные метрики. Доказательство ЦПТ для метрики Оценки метрики Леви через идеальные метрики. |
| Тема 24 | Оценки скорости сходимости в ЦПТ с использованием псевдомоментов. |
| Тема 25 | Оценка расстояния через Оценка скорости сходимости в ЦПТ для средней метрики. |
| Тема 26 | Безгранично делимые распределения; элементарные свойства. Безграничная делимость в терминах распределений и в терминах случайных величин. |
| Тема 27 | Безгранично делимые распределения; формула Леви – Хинчина. |
| Тема 28 | Другие представления безгранично делимых распределений. |
| Тема 29 | Схема серий и безгранично делимые законы. Теорема Пуассона. Точность аппроксимации в теореме Пуассона. |
| Тема 30 | Определение устойчивых законов. Устойчивые законы как предельные в схеме суммирования независимых одинаково распределённых случайных величин. |
| Тема 31 | Устойчивые законы; представление Леви, явный вид характеристических функций. |
| Тема 32 | Вид нормирующих постоянных при сходимости к устойчивым законам. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к устному зачету)*.

1. Суммы независимых случайных величин и свёртки распределений. Вычисление свёртки двух равномерных распределений и многократных свёрток экспоненциального распределения. Необходимость центрирования и нормирования. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин. Метод характеристических функций как обходной путь для изучения свёрток многих распределений.
2. Переходы из пространства распределений в пространство характеристических функций и обратно. Формулы обращения. Связь между моментами распределений и производными характеристических функций. Разложение характеристической функции в отрезок ряда Тейлора. Связь между гладкостью распределений и поведением характеристических функций на бесконечности.
3. Неравенство Берри – Эссеена (оценка близости распределений по близости характеристических функций). Пример, показывающий существенность предположения о гладкости одной из функций распределения.
4. Оценка близости характеристических функций в ЦПТ при конечности третьего момента исходных случайных величин. Теорема Берри – Эссеена как следствие этой оценки и неравенства Берри – Эссеена.
5. Оценка скорости сходимости в ЦПТ для распределений с конечным моментом порядка Метод урезания. Неулучшаемость полученной оценки.
6. Теорема Ибрагимова. Оценка скорости сходимости в ЦПТ для гладких распределений при совпадении нескольких моментов в моментами нормального закона.
7. Решетчатые распределения, свойства их характеристических функций, формула обращения.
8. Локальные формы ЦПТ для гладких и для решетчатых распределений.
9. Оценки скорости сходимости в локальных формах ЦПТ для распределений с конечным третьим моментом.
10. Неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ для распределений с конечным третьим моментом.
11. Асимптотические разложения в ЦПТ как способ обойти моментные ограничения в теореме Ибрагимова. Многочлены и моменты Чебышева – Эрмита. Разложение функции в отрезок ряда Тейлора, в этом разложении моменты Чебышева – Эрмита играют ту же роль, что моменты в разложении функции
12. Моменты Чебышева – Эрмита распределений нормированных сумм, скорости их стремления к нулю при росте эти моменты суть
13. Построение асимптотических разложений в ЦПТ для плотностей с использованием сопровождающих зарядов.
14. Построение асимптотических разложений в ЦПТ для плотностей без использования сопровождающих зарядов.
15. Общий вид разложений Эджворта – Крамера и Грама – Шарлье для плотностей.
16. Асимптотические разложения в интегральной форме ЦПТ и в локальной форме ЦПТ для решетчатых распределений.
17. Числовые характеристики распределений, используемые в оценках точности аппроксимации для асимптотических разложений.
18. Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений.
19. Сходимость в основном и слабая сходимость
20. Метризуемость слабой сходимости Метрика Леви. Критерий слабой относительной компактности.
21. Сходимость Эквивалентность сходимостей и Непрерывность соответствия между распределениями и характеристическими функциями.
22. Связь между слабой и равномерной сходимостями. Связь между слабой сходимостью и сходимостью в среднем. Связь между сходимостью по вероятности случайных величин и слабой сходимостью их распределений.
23. Специальные свойства вероятностных метрик: регулярность, полуаддитивность, однородность. Идеальные метрики. Доказательство ЦПТ для метрики Оценки метрики Леви через идеальные метрики.
24. Оценки скорости сходимости в ЦПТ с использованием псевдомоментов.
25. Оценка расстояния через Оценка скорости сходимости в ЦПТ для средней метрики.
26. Безгранично делимые распределения; элементарные свойства. Безграничная делимость в терминах распределений и в терминах случайных величин.
27. Безгранично делимые распределения; формула Леви – Хинчина.
28. Другие представления безгранично делимых распределений, формула Леви и формула Колмогорова для безгранично делимых законов с конечными дисперсиями.
29. Схема серий и безгранично делимые законы. Теорема Пуассона. Точность аппроксимации в теореме Пуассона.
30. Определение устойчивых законов. Устойчивые законы как предельные в схеме суммирования независимых одинаково распределённых случайных величин.
31. Устойчивые законы; представление Леви, явный вид характеристических функций.
32. Вид нормирующих постоянных при сходимости к устойчивым законам.

*Экзаменационные билеты формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка.*

Образцы билетов.

Билет 1.

А. Неравенство Берри – Эссеена (оценка близости распределений по близости характеристических функций).

Б. Оценка расстояния через Оценка скорости сходимости в ЦПТ для средней метрики.

Билет 2.

А. Оценки скорости сходимости в локальных формах ЦПТ для распределений с конечным третьим моментом.

Б. Безгранично делимые распределения; формула Леви – Хинчина.

Билет 3.

А. Оценка скорости сходимости в ЦПТ для распределений с конечным моментом порядка Метод урезания. Неулучшаемость полученной оценки.

Б. Связь между слабой и равномерной сходимостями. Связь между слабой сходимостью и сходимостью в среднем. Связь между сходимостью по вероятности случайных величин и слабой сходимостью их распределений.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л, 1949.
2. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.

Дополнительная литература:

1. Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.
2. Сенатов В. В., Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения, М., 2009.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html