**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории вероятностей.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.«Стохастическая теория экстремумов»
2. Преподаватель – доцент А.В. Лебедев
3. Аннотация курса: Специальный курс для студентов посвящен стохастической теории экстремумов, занимающейся изучением максимумов и минимумов (а также других порядковых статистик) систем случайных величин. Теория излагается в широком спектре ее задач и достижений, от классических результатов до самых современных, в том числе полученных автором курса.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Теорема об экстремальных типах |
| Тема 2 | Критерии принадлежности к областям притяжения экстремальных типов |
| Тема 3 | Превышения и k-ые максимумы |
| Тема 4 | Максимум-полуустойчивые распределения |
| Тема 5 | Распределения с тяжелыми хвостами |
| Тема 6 | Субэкспоненциальные распределения |
| Тема 7 | Законы больших чисел для максимумов |
| Тема 8 | Условия перемешивания |
| Тема 9 | Экстремумы гауссовских стационарных последовательностей |
| Тема 10 | Экстремальный индекс стационарной случайной последовательности |
| Тема 11 | Линейные стохастические рекуррентные последовательности |
| Тема 12 | Броуновские смеси |
| Тема 13 | Экстремумы гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем |
| Тема 14 | Копулы многомерных распределений |
| Тема 15 | Экстремальные индексы в схеме серий |
| Тема 16 | Экстремальные индексы систем зависимых признаков частиц в ветвящихся процессах |
| Тема 17\* | Экстремальные индексы в моделях с копулами и пороговых моделях |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Базовые понятия. Максимум-устойчивые распределения и типы. Теорема об экстремальных типах.

2. Сходимость вероятностей **P**(Mn≤un). Условие Б.В.Гнеденко. Критерии принадлежности к областям притяжения экстремальных типов. Примеры. Метод функционального преобразования. Случай дискретных распределений. Примеры непрерывных распределений, не принадлежащих области притяжения какого-либо экстремального типа.

3. Превышения и k-ые максимумы. Сходимость к пуассоновскому процессу. Возрастающие, центральные и промежуточные ранги. Модель прочности пучка волокон.

4. Максимум-полуустойчивые распределения и их свойства. Примеры. Обобщения и приложения к независимым признакам частиц в ветвящихся процессах.

5. Распределения с тяжелыми (степенными и правильно меняющимися хвостами) и их свойства. Связь с устойчивыми распределениями. Приложения. Статистические оценки хвостового индекса, хвоста и квантилей.

6. Субэкспоненциальные распределения и их свойства. Примеры. Достаточные условия субэкспоненциальности.

7. Законы больших чисел для максимумов, аддитивные и мультипликативные. Случай дискретных распределений. Усиленные законы больших чисел. Примеры.

8. Условия перемешивания D, D(un), D'(un). Случай m-зависимости. Пример.

9. Экстремумы гауссовских стационарных последовательностей.

10. Экстремальный индекс стационарной случайной последовательности, его свойства и интерпретации. Кластеризация превышений высокого уровня. Примеры. Статистические оценки экстремального индекса.

11. Экстремальный индекс стационарного случайного поля на целочисленной решетке. Примеры.

12. Линейные стохастические рекуррентные последовательности. Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры. Приложение к процессам ARCH и GARCH. Случай обобщенного лапласовского распределения. Свойства сравнения. Теорема непрерывности.

13. Броуновские смеси. Примеры. Использование процессов с непрерывным временем. Свойства экстремального индекса в случае броуновских смесей.

14. Экстремумы гауссовских стационарных процессов с непрерывным временем.

15. Копулы многомерных распределений и их свойства. Теорема Скляра. Примеры. Архимедовы копулы. Коэффициенты корреляции Кендалла и Спирмена. Коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости.

16. Многомерные распределения экстремумов. Копулы экстремальных значений.

17. Экстремальные индексы в схеме серий (два определения) и их свойства.

18. Экстремальные индексы систем зависимых признаков частиц в ветвящихся процессах.

19. Экстремальные индексы в моделях с копулами.

20. Экстремальные индексы в пороговых моделях.

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее*

Билет № 1

А. Сходимость вероятностей **P**(Mn≤un). Условие Б.В.Гнеденко. Критерии принадлежности к областям притяжения экстремальных типов. Примеры. Метод функционального преобразования. Случай дискретных распределений. Примеры непрерывных распределений, не принадлежащих области притяжения какого-либо экстремального типа.

Б. Броуновские смеси. Примеры. Использование процессов с непрерывным временем. Свойства экстремального индекса в случае броуновских смесей.

В. Задача на копулы и предельные распределения максимумов (типа 14, 16).

Билет № 2

А. Экстремальный индекс стационарной случайной последовательности, его свойства и интерпретации. Кластеризация превышений высокого уровня. Примеры. Статистические оценки экстремального индекса. Экстремальный индекс стационарного случайного поля на целочисленной решетке. Примеры.

Б. Копулы многомерных распределений и их свойства. Теорема Скляра. Примеры. Архимедовы копулы. Коэффициенты корреляции Кендалла и Спирмена. Коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости.

В. Задача на максимумы независимых случайных величин (типа 1, 2, 3, 6).

Билет № 3

А. Законы больших чисел для максимумов, аддитивные и мультипликативные. Случай дискретных распределений. Усиленные законы больших чисел. Примеры.

Б. Экстремальные индексы в схеме серий (два определения) и их свойства.

В. Задача на экстремальный индекс случайной последовательности или поля (типа 7-12).

*Задачи к курсу*

1. Найти предельный закон и линейную нормировку для максимумов при , .

2. Стандартная нормальная случайная величина подвергается преобразованию . Выразить новые нормирующие константы для максимумов через старые и .

3. Прочность волокна имеет функцию распределения , . Найти параметры асимптотического распределения прочности пучка волокон.

4. Установить, при каких и функция задает максимум-полуустойчивое распределение с показателем .

5. Доказать субэкспоненциальность распределения в случае .

6. Доказать все имеющие место законы больших чисел в случае .

7. Пусть - н.о.р.с.в. с , и . Вычислить экстремальный индекс последовательности.

8. Пусть - н.о.р.с.в. с , и . Вычислить экстремальный индекс последовательности.

9. Пусть - н.о.р.с.в. с , . Вычислить экстремальный индекс случайного поля.

10. В последовательности , где и независимы, , . Вычислить экстремальный индекс.

11. В модели с обобщенным лапласовским распределением с найти хвостовой и экстремальный индексы.

12. В модели с броуновской смесью найти границы для экстремального индекса в случае.

13. Ковариационная функция стационарного гауссовского процесса . Найти предельный закон и линейную

нормировку. Вычислить среднее число локальных максимумов в единицу времени.

14. Двумерный случайный вектор имеет функцию распределения . Найти коэффициент

корреляции Кендалла, коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости, копулу предельного распределения для максимумов.

15. Найти экстремальный индекс признаков частиц в случае критического ветвящегося процесса, максимум-авторегрессии с показателем и хвостового индекса .

16. Привести пример модели с копулой, в которой по обоим определениям.

17. В двухточечной пороговой модели с для экстремальной функции найти точку начала роста, точку излома и значение в точке 1/2.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература

1) *Галамбош Я.И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

2) *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

3) *Голдаева А.А.* Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей.

Дисс. к.ф.-м.н. МГУ, 2014.

4) *Лебедев А.В.* Неклассические задачи стохастической теории экстремумов. Дисс. д.ф.-м.н. МГУ, 2015.

Дополнительная литература

5) *Питербарг В.И.* Двадцать лекций о гауссовских процессах. М. МЦНМО, 2015.

6) *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

7) *Харрис T.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.

8) *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosh T.* Modelling extremal events for insurance and finance. Springer, 2003.

9) *McNeil A., Frey R., Embrechts P.* Quantitative risk management. Princeton Univ. Press, 2005.

10) *Nelsen R.* An introduction to copulas. Springer, 2006.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ <http://lib.mexmat.ru>

Материалы диссертационных советов механико-математического факультета МГУ <http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi>

Cтраница А.В.Лебедева на сайте кафедры теории вероятностей <http://www.math.msu.su/department/probab/staff/alebedev.html>