**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Дополнительные главы теории случайных процессов.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
2. Преподаватель - проф. В.И. Оселедец
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов курс посвящен теории случайных процессов и динамических систем. Изучаются эргодическая и спектральная теория стационарных процессов и ассоциированных динамических систем, энтропийная теория случайных процессов и динамических систем . К- системы, теория косых произведений и специальных потоков в контексте теории случайных процессов, вариационные принципы для энтропии и давления, равновесные и гиббсовские меры.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Преобразования, сохраняющие меру и стационарные процессы. Эргодичность преобразований. Теорема о разложении на эргодические компоненты. Пример с гауссовским процессом. Диссипативные и консервативные преобразования.  Теорема Хопфа. |
| Тема 2 | Теорема Пуанкаре о возвращении. Теорема Каца о среднем времени возвращения. |
| Тема 3 | Перемешивание. Слабое перемешивание, кратное перемешивание. Дискретный спектр, непрерывный спектр. Критерий слабого перемешивания. Пример поворота окружности и алгебраического автоморфизма тора. |
| Тема 4 | Эргодическая теорема фон Неймана. Эргодическая теорема Биркгофа. Субаддитивная эргодическая теорема Кингмана. Мультипликативная эргодическая теорема. |
| Тема 5 | Точечные случайные поля. Обобщенные случайные процессы. Производящий функционал. Пуассоновский шум. Производящий функционал корреляционных функций(интенсивностей всех порядков). Нормальная экспонента Вика. Разложение по мономам Вика. Пуассоновская динамическая система. |
| Тема 6 | Энтропия стационарного процесса. Теорема Шеннона – Макмиллана – Бреймана. Пример вычисления энтропии полумарковского процесса с непрерывным временем. |
| Тема 7 | Энтропия динамической системы. Формула для вычисления энтропии стационарного процесса. Энтропия автоморфизма Бернулли. Энтропия автоморфизма Маркова любого порядка. Энтропия поворота окружности. Энтропия алгебраического автоморфизма тора. |
| Тема 8 | Образующее разбиение и энтропия. Теорема об образующем разбиении. |
| Тема 9 | К- автоморфизмы и К- разбиения. Теорема о совпадении К- свойства и свойства вполне положительности энтропии. Регулярные стационарные процессы и точные эндоморфизмы Рохлина. |
| Тема 10 | Разбиение Пинскера. Остаточные сигма - алгебры процесса и сигма - алгебра Пинскера. Сигма - алгебра Пинскера для автоморфизма Маркова. |
| Тема 11 | Гауссовские стационарные процессы. Гауссовские динамические системы. Производящий функционал. Обобщенные случайные процессы. Гауссовский белый шум. Нормальная экспонента Вика. Разложение по хаосам и по мономам Вика. |
| Тема 12 | Унитарный оператор динамической системы. Спектр функции и функция максимального спектрального типа. Функция кратности спектра. Спектральная теорема и абстрактная спектральная теорема. Спектр процесса и спектр динамической систем. Стационарный процесс как преобразование Фурье от случайной меры. по случайной мере. |
| Тема 13 | Теорема о счетнократном лебеговском спектре для К – систем. Спектр пуассоновской и гауссовской динамических систем. |
| Тема 14 | Специальные потоки и полупотоки. Интегральные преобразования и производные преобразования. Формулы Абрамова для энтропии. Связь с полумарковскими процессами и стационарными процессами восстановления |
| Тема 15 | Косые произведения. Смешанная энтропия слоев. Формула Абрамова – Рохлина для энтропии косого произведения. Связь со случайными динамическими системами. |
| Тема 16 | Топологическая энтропия. Мера Перри для топологической марковской цепи. Вариационный принцип для топологической энтропии. Функционал давления. Вариационный прицип для давления. Мера Перри нагруженного графа. |
| Тема 17\* | Равновесные и гиббсовские меры. Двусторонняя остаточная сигма – алгебра и гомоклиническое отнощение эквивалентности. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к устному зачету)*

1. Преобразования, сохраняющие меру и стационарные процессы. Эргодичность преобразований. Теорема о разложении на эргодические компоненты. Пример с гауссовским процессом. Диссипативные и консервативные преобразования. Теорема Хопфа. Теорема Пуанкаре о возвращении. Теорема Каца о среднем времени возвращения.

2. Перемешивание. Слабое перемешивание, кратное перемешивание. Дискретный спектр, непрерывный спектр. Критерий слабого перемешивания. Пример поворота окружности и алгебраического автоморфизма тора.

3. Эргодическая теорема фон Неймана. Эргодическая теорема Биркгофа. Субаддитивная эргодическая теорема Кингмана. Мультипликативная эргодическая теорема.

4. Точечные случайные поля. Обобщенные случайные процессы. Производящий функционал. Производящий функционал корреляционных функций(интенсивностей всех порядков). Пуассоновский шум. Нормальная экспонента Вика. Разложение по мономам Вика. Пуассоновская динамическая система

5. Энтропия стационарного процесса. Теорема Шеннона – Макмиллана – Бреймана. Пример вычисления энтропии марковского процесса, полумарковского процесса с непрерывным временем.

6. Энтропия динамической системы. Формула для вычисления энтропии стационарного процесса. Энтропия автоморфизма Бернулли. Энтропия автоморфизма Маркова любого порядка. Энтропия поворота окружности. Энтропия алгебраического автомофизма тора.

7. Образующее разбиение и энтропия. Теорема об образующем разбиении.

8. К- автоморфизмы и К- разбиения. Теорема о совпадении К- свойства и свойства вполне положительности энтропии.

9. Регулярные стационарные процессы и точные эндоморфизмы Рохлина..

10. Разбиение Пинскера. Остаточные сигма - алгебры процесса и сигма - алгебра Пинскера. Сигма - алгебра Пинскера для автоморфизма

11. Гауссовские стационарные процессы. Гауссовские динамические системы. Производящий функционал. Обобщенные случайные процессы. Гауссовский белый шум. Нормальная экспонента Вика. Разложение по хаосам и по мономам Вика.

12. Унитарный оператор динамической системы. Спектр функции и функция максимального спектрального типа .Функция кратности спектра. Спектральная теорема и абстрактная спектральная теорема. Спектр процесса и спектр динамической систем. Стационарный процесс как преобразование Фурье от случайной меры по случайной мере.

13. Теорема о счетнократном лебеговском спектре для К – систем. Спектр пуассоновской и гауссовской динамических систем.

14. Специальные потоки и полупотоки. Интегральные преобразования и производные преобразования. Формулы Абрамова для энтропии. Связь с полумарковскими процессами и стационарными процессами восстановления.

15. Косые произведения. Смешанная энтропия слоев. Формула Абрамова – Рохлина для энтропии косого произведения.

16. Связь со случайными динамическими системами.Топологическая энтропия. Мера Перри для топологической марковской цепи. Вариационный принцип для топологической энтропии. Функционал давления. Вариационный принцип для давления. Мера Перри нагруженного графа.Равновесные и гиббсовские меры. Двусторонняя остаточная сигма – алгебра и гомоклиническое отнощение

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (1 и 2) из указанного списка и одной задачи (3), примеры задач см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

1. Эргодическая теорема фон Неймана. Эргодическая теорема Биркгофа.

2. Кронекеровская гауссовская динамическая система. Спектр. Энтропия.

3. Пусть Tx={7x}-преобразование отрезка [0,1]. Доказать, что мера Лебега инвариантна и что T – перемешивание. Чему равна энтропия ?

Билет №2.

1. Энтропия и спектр.

2. Доказать, что автоморфизм тогда и только тогда К – автоморфизм, когда разбиение Пинскера тривиально.

3. Описать разложение на эргодические компоненты для гауссовской динамической системы для гауссовского процесса с дискретным спектром

Билет №3

1. Гауссовские стационарные процессы. Гауссовские динамические системы. Производящий функционал. Обобщенные случайные процессы. Гауссовский белый шум. Нормальная экспонента Вика. Разложение по хаосам и по мономам Вика. Спектр.

2. Доказать формулу Абрамова – Рохлина для энтропии косого произведения.

3. Пусть T – преобразование сдвига множества бесконечных двоичных слов, в которых не встречается подслов 111. Найти T –инвариантную меру с максимальной энтропией и вычисить эту энтропию.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература.

1) П. Биллингсли, Эргодическая теория и информация, Москва, Наука, 1988.

2) И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник,S. Jansen, Независимые и стационарно связанные случайные величины, Москва, ФМЛ, 1968.

3) И.В. Корнфельд, Я.Г. Синай. С.В. Фомин, Эргодическая теория, Москва, ФИЛ, 1980.

4) Н. Мартин, Дж. Ингленд, Математическая теория энтропии, Москва, Мир, 1988.

5) А.Б. Каток, Б. Хасселбблат, Введение в современную теорию динамических систем, Москва, Факториал,1999

6) В.А. Рохлин, Избранные работы, Москва, МЦНМО, ВКМ НМУ, 1999.

7) Малышев В.А., Минлос Р.А., Гиббсовские случайные поля, Москва, Наука, 1985.

Дополнительная литература.

8) Д. Рюэль, Термодинамический формализм, Москва - Ижевск, 2002.

9)Peter Walters, An introduction to ergodic theory, Springer, 1997.

10) Aaronson J., An introduction to infinite ergodic theory, 1994.

11) Steven Kalikow, Randall McCutcheon, An outline ergodic theory, Cambridge University Press, 2010

12) Mark Pollicott, Michiko Yuri, Dynamical systems and ergodic theory, Cambridge University Press, 1997

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html