**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Вероятностно-статистические методы.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. «Гауссовские случайные процессы»
2. Преподаватель – г.н.с. В.И. Питербарг.
3. Аннотация курса: специальный курс посвящен гауссовским распределениям в конечномерных и бесконечномерных пространствах и асимптотическим методам их исследования. Рассматриваются теоремы сравнения для гауссовских распределений, вопросы принадлежности гауссовских векторов различным функциональным подпространствам, общие оценки хвостов распределения норм гауссовских векторов в банаховых пространствах. Рассмотрены основные методы исследования точных асимптотик хвоста распределения максимума гауссовского процесса. Изучены свойства множеств типа пересечений для гауссовских случайных процессов. Доказаны пуассоновские предельные теоремы для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности и процесса, скорости сходимости в них. Доказана предельная теорема для максимума
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Гауссовские конечномерные распределения. Существование и свойства плотности. |
| Тема 2 | Условные гауссовские распределения. Свойства условных дисперсии и среднего. |
| Тема 3 | Тождество сравнения гауссовских конечномерных распределений. |
| Тема 4 | Лемма сравнения Слепяна. |
| Тема 5 | Лемма сравнения Бермана. |
| Тема 6 | Теорема сравнения Судакова-Ферника. |
| Тема 7 | Характеризация гауссовских распределений в линейных пространствах.  Альтернативное определение. |
| Тема 8 | Гильбертово пространство, порожденное гауссовской случайной функцией. Свойства. |
| Тема 9 | Сильная интегрируемость гауссовских векторов. |
| Тема 10 | Законы нуля или единицы для гауссовских абстрактных векторов. |
| Тема 11 | Нормы, свойства хвостов гауссовских распределений. |
| Тема 12 | Осцилляции гауссовских функций. |
| Тема 13 | Свойства множеств точек разрыва гауссовских случайных функций. |
| Тема 14 | Альтернативы Беляева и Добрушина. |
| Тема 15 | Энтропийный интеграл Дадли. Его свойства и применения. |
| Тема 16 | Энтропийное неравенство Дмитровского. |
| Тема 17 | Свойства хвостов гауссовских конечномерных распределений. |
| Тема 18 | Лемма Пикандса об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса на бесконечно малом интервале. |
| Тема 19 | Лемма об оценивании вероятности двойного события: применение неравенства Дмитровского. |
| Тема 20 | Теорема Пикандса об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса. |
| Тема 21 | Свойства констант Пикандса. |
| Тема 22 | Лемма об асимптотике хвоста распределения максимума гауссовского нестационарного процесса на бесконечно малом интервале. |
| Тема 23 | Теорема об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского нестационарного процесса. |
| Тема 24 | Свойства множеств пересечения кривых траекториями гауссовских случайных процессов. |
| Тема 25 | Теорема об отсутствии касаний кривой траекториями гауссовского процесса. |
| Тема 26 | Свойства множеств пересечений уровня негауссовскими процессами. Теорема Булинской. |
| Тема 27 | Вывод формул для моментов числа пересечений. |
| Тема 28 | Метод моментов исследования асимптотического поведения вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов с гладкими траекториями. Формула Райса. |
| Тема 29 | Точечные случайные процессы на прямой. Основные определения. |
| Тема 30 | Пуассоновская предельная теорема для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности. |
| Тема 31 | Пуассоновская предельная теорема для больших выбросов гауссовского стационарного процесса с непрерывным временем. |
| Тема 32 | Предельная теорема для максимума. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. Вопросы для оценки результатов обучения.
2. Гауссовские конечномерные распределения. Характеристическая функция.
3. Условные гауссовские распределения. Свойства условных дисперсии и среднего.
4. Тождество сравнения гауссовских конечномерных распределений.
5. Лемма сравнения Слепяна.
6. Лемма сравнения Судакова-Ферника.
7. Лемма сравнения Бермана.
8. Характеризация гауссовских распределений в линейных пространствах. Альтернативное определение.
9. Нормы, свойства хвостов, законы нуля и единицы для гауссовских распределений.
10. Осцилляции гауссовских функций.
11. Энтропийный интеграл Дадли.
12. Неравенство Дмитровского.
13. Свойства хвостов гауссовских конечномерных распределений.
14. Свойства эргодичности гауссовских стационарных последовательностей.
15. Сильная интегрируемость гауссовских векторов. Закон 0 или 1. Гильбертово пространство, порожденное гауссовской случайной функцией.
16. Сепарабельность и измеримость гауссовских случайных функций. Осцилляции.
17. Энтропийная оценка для хвоста распределения максимума гауссовской случайной функции.
18. Основные методы исследования точных асимптотик хвоста распределения максимума гауссовского процесса. Примеры. Обобщения.
19. Свойства множеств типа пересечений для гауссовских случайных процессов.
20. Пуассоновские предельные теоремы для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности и процесса. Скорость сходимости. Предельная теорема для максимума.

Примеры задач и контрольных вопросов.

* Определение и свойства энтропийного интеграла Дадли.
* Близость распределений максимумов гауссовских векторов. Лемма Бермана.
* Докажите, что траектории гауссовской случайной функции на квадрате либо с вероятностью 1 непрерывны, либо с вероятностью 1 разрывны. Опишите множество точек разрыва, если эта функция однородна (однородное гауссовское поле) и имеет разрывы.
* Характеризация гауссовских распределений в линейных пространствах. Альтернативное определение.
* Лемма сравнения Судакова-Ферника. Ее значение в исследовании локальных свойств гауссовских функций.
* Пусть – корреляционная функция гауссовского стационарного процесса такая, что , . Сходится ли интеграл Дадли для  ? А в случае ?
* Осцилляции гауссовских функций. Альтернатива Беляева.
* Условные гауссовские распределения. Свойства условных дисперсии и среднего.
* Пусть X и Y – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Оцените хвост распределения их произведения
* Определение и свойства энтропийного интеграла Дадли. Неравенство для максимума.
* Пуассоновская предельная теорема для числа высоких выбросов гауссовской стационарной последовательности.
* Пусть *W(t)* - стандартный винеровский процесс. Определим процесс . Найти его среднее и ковариационную функцию. Вычислить среднее число пересечений уровня *1* траекториями этого процесса на отрезке *[0,1].*.
* Характеризация гауссовских распределений в линейных пространствах. Альтернативное определение.
* Лемма Пикандса об асимптотике вероятности высокого выброса гауссовского стационарного процесса на бесконечно малом интервале
* Пусть *W(t)* - стандартный винеровский процесс. Найти точную асимптотику хвоста распределения максимума процесса *W(t+1)-W(t)* на конечном интервале.
* Метод моментов исследования асимптотического поведения вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов с гладкими траекториями. Формула Райса.
* Асимптотики хвостов гауссовских конечномерных распределений.
* Пусть X и Y – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Найдите точную асимптотику хвоста распределения их произведения

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Литература:

1) Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. - 366 с

2) Fernique,~X.~Regularite des trajectories des fonctions aleatoires gaussiennes, Lecture Notes in Mathematics, 1975, vol. 480

3) Lifshtz M. A. Gaussian Random Functions. Springer, 1995

4) Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. American Mathematical Soc., 1996

5) Питербарг В. И. Двадцать лекций о гауссовских процессах. МЦНМО. М. 2015.

6) Vladimir I. Piterbarg, Twenty Lectures About Gaussian Processes. Atlantic Financial Press, London, 2015 .

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html