**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Статистический анализ многомерных линейных моделей.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ
2. Преподаватель – асс. Е.М. Ряднова
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов посвящён классической теории многомерных линейных гауссовских моделей и корреляционной теории. Изложение основано на новом понятии таблицы наблюдений и новой алгебраической структуре (модуль таблиц над кольцом квадратных матриц, наделённый матричнозначным скалярным произведением). Эти средства позволяют изложить теорию многомерных наблюдений на геометрическом языке, по аналогии с классическим одномерным статистическим линейным анализом.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Многомерное нормальное распределение. |
| Тема 2 | Модули над кольцами матриц. |
| Тема 3 | Подмодули и ортогональные проекции. Матричный и скалярный метод наименьших квадратов. |
| Тема 4 | Линейные модели и линейные гипотезы. Теорема об ортогональном разложении. Распределение Уишарата. |
| Тема 5 | Оптимальные оценки в линейных моделях. |
| Тема 6 | Общий подход к проверке линейных гипотез. |
| Тема 7 | Нормальная выборка. Оптимальные оценки. Сравнение с оценками наибольшего правдоподобия. |
| Тема 8 | Нормальная выборка: проверка гипотез. Статистика Хотеллинга. |
| Тема 9 | Метод Роя и метод отношения правдоподобий в модели одной нормальной выборки. |
| Тема 10 | Распределение статистики Хотеллинга. |
| Тема 11 | Приближённые гипотезы и их проверка. |
| Тема 12 | Доверительные выводы. Множественные сравнения (по Шеффе). |
| Тема 13 | Несколько нормальных выборок. Однофакторный дисперсионный анализ. Общий вид статистических критериев. |
| Тема 14 | Несколько нормальных выборок. Применение метода Роя и метода отношений правдоподобий. |
| Тема 15 | Многомерная линейная регрессия. Оптимальные оценки параметров модели. Линейные гипотезы в модели многомерной линейной регрессии. |
| Тема 16 | Матричная корреляция. Связь с каноническими корреляциями и каноническими величинами. |
| Тема 17\* | Проверка независимости многомерных гауссовских признаков. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена.*

1. Многомерное нормальное распределение.

Определение, моменты, характеристическая функция. Плотность распределения. Условные распределения, линейная регрессия. Датчик нормальных чисел.

2. Модули нал кольцами квадратных матриц.

Таблицы, алгебраические операции, скалярные произведения. Таблица со случайными элементами, моменты. Таблицы и представляющие их матрицы. Порождающие базисы. Подмодули и линейные подпространства. Размерность. Проекции на подмодули (матричный метод наименьших квадратов). Вычисление проекций.

3. Линейные модели и линейные гипотезы.

Примеры: однофакторный дисперсионный анализ, многомерная линейная регрессия. Теорема об ортогональном разложении для гауссовской линейной модели. Распределения Уишарта. Достаточные статистики, наилучшие несмещённые оценки. Линейные гипотезы и их проверка.

4. Нормальная выборка, оценивание параметров.

Наилучшие несмещённые оценки и их свойства (из общей теории). Оценки наибольшего правдоподобия.

5. Нормальная выборка, проверка гипотез.

Статистика Хотеллинга, вывод методом Роя. Статистика Хотеллинга как критерий отношения правдоподобий. Лемма об определителях блочных матриц. Доверительные эллипсоиды, доверительные интервалы. Одновременные доверительные интервалы, по Шеффе.

1. Распределения статистики Хотеллинга.
2. Приближённые статистические гипотезы и их проверка

8. Несколько нормальных выборок

Проверка нулевой гипотезы: общая теория. Проверка нулевой гипотезы: вывод критической статистики методом Роя; Проверка нулевой гипотезы: критерий отношения правдоподобий. Инвариантность при аффинных преобразованиях наблюдений. Теорема о распределении произведения характеристических корней.

9. Многомерная линейная регрессия

Оценивание. Проверка линейных гипотез.

10. Матричная корреляция.

Определение и свойства. Канонические корреляции и канонические величины. Выборочные матричные корреляции. Проверка независимости двух многомерных случайных величин

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде одного вопроса из указанного списка и одной задачи (см. примеры задач ниже).*

*Примеры задач.*

1. Для гауссовского случайного вектора Х найти условное распределение Х при условии, что сумма всех компонент вектора равна 0.

2. Дана выборка из многомерного гауссовского распределения с известным средним *а* и неизвестной ковариационной матрицей Q. Найти оценку наибольшего правдоподобия для Q.

3. Дана выборка из многомерного гауссовского распределения с неизвестным средним а и известной ковариационной матрицей Q. Применить метод Роя (метод отношения правдоподобий) для нахождения критической статистики для проверки гипотезы о равенстве среднего а заданной константе. Найти распределение этой статистики.

4. Рассмотрим задачу многомерной линейной регрессии , где — заданный план эксперимента, — неизвестная матрица, — многомерные отклики, — независимые одинаково распределенные гауссовские векторы ошибок с нулевым средним; варьируется от 1 до n. Пусть B — такая неслучайная заданная матрица, что произведение АВ существует.

a) Показать, что гипотеза H: AB=0 (о матрице А) линейна.

б) В предположении, что АВ=0, дайте оценку А.

в) Предложите статистики для проверки гипотезы H: AB=0.

5. Найти математическое ожидание обратной Уишартовской матрицы.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

*Основная литература:*

1. Ю.Н.Тюрин. Многомерный статистический анализ. Записки лекций, 2010.г.
2. Ю.Тюрин. Многомерная статистика: линейные гауссовские модели. М.: Изд-во МГУ, 2011 г.
3. Е.Суханова. Матричная корреляция. ТВП, 2009, том 54, выпуск 2.

*Дополнительная литература:*

1. Т.Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. Перевод с английского. М.: Физматлит, 1963г., 500с.
2. Х.Аренс, Ю.Лёйтер. Многомерный дисперсионный анализ. Перевод с немецкого. М.: «Финансы м статистика», 1985г., 230с.
3. M. Bilodeau, D.Brenner. Theory of Multivariate Statistics. Springer-Verlag, 1999, 288p.

*Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:*

1. Сайт кафедры теории вероятностей: <http://www.math.msu.su/department/probab>
2. Научный форум: [http://dxdy.ru](http://dxdy.ru/)
3. Программная реализация некоторых функций многомерной статистики: http://www.dms.umontreal.ca/~bilodeau