**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 10 от 07 июня 2017 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Дополнительные главы стохастического анализа

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов, из которых 46 часов составляет контактная работа студента с преподавателем 36 часов занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 62 часа составляет самостоятельная работа студента.

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру, аналитическую геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теория случайных процессов (указываются дисциплины, необходимые для освоения данной и предшествующие ей)
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры, действительного анализа, комплексного анализа, функционального анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложение

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложение.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
2. Преподаватель - профессор В.Д. Конаков
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов 4-го - 6-го курса. Целью курса является обучение мощному методу стохастического анализа, известному как «исчисление Маллявэна», развить навыки, позволяющие применять этот метод, для анализа гладкости решений стохастических дифференциальных уравнений.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Необходимые сведения из теории вероятностей: неравенство Дуба, неравенство Буркхольдера-Дэвиса-Ганди |
| Тема 2 | Необходимые сведения из стохастического анализа: интеграл Стратоновича, теорема Гирсанова |
| Тема 3 | Необходимые сведения из функционального анализа: дифференциальное исчисление в банаховых пространствах. |
| Тема 4 | Первый подход, основанный на теореме Гирсанова. Формула интегрирования по частям |
| Тема 5 | Гладкие функционалы на пространстве C[0,1] |
| Тема 6 | Устойчивость решений СДУ при возмущении коэффициентов. |
| Тема 7 | Теорема о гладкости функционалов от решений СДУ. |
| Тема 8 | Ковариационная матрица Маллявэна и ее свойства. Достаточные условия существования гладкой плотности у случайного вектора. |
| Тема 9 | Критерий существования гладкой плотности решения СДУ в терминах ковариационной матрицы Маллявэна. |
| Тема 10 | Существование гладкой плотности решения СДУ. Случай равномерной эллиптичности. |
| Тема 11 | Векторные поля. Скобки Ли. Операторы типа «суммы квадратов». |
| Тема 12 | Условие Хёрмандера. Лемма Норриса. Теорема Хёрмандера. |
| Тема 13 | Альтернативный подход к доказательству теоремы Хёрмандера. |
| Тема 14 | Оператор Орнштейна-Уленбека и его свойства. |
| Тема 15 | Полиномы Эрмита и их свойства |
| Тема 16 | Оператор Орнштейна-Уленбека и разложение в винеровский хаос |
| Тема 17 | Второе доказательство теоремы Хёрмандера. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Неравенство Дуба, неравенство Буркхольдера-Дэвиса-Ганди. Интеграл Ито и его основные свойства.

2. Интеграл Стратоновича, связь с интегралом Ито. Теорема Гирсанова.

3. Дифференциальное исчисление в банаховых пространствах. Производная по Фреше. Основные правила дифференцирования.

4. Формула интегрирования по частям, основанная на теореме Гирсанова.

5. Гладкие функционалы на C[0,1]. Устойчивость решений СДУ относительно возмущений матрицы диффузии.

6. Гладкие функционалы от решений СДУ.

7. Достаточные условия существования плотности случайного вектора.

8. Ковариационная матрица Маллявэна и ее свойства.

9. Роль ковариационной матрицы Маллявэна в изучении гладкости решений СДУ. Теорема о существовании гладкой плотности у решения СДУ.

10. Векторные поля, скобки Ли, условие Хермандера.

11. Лемма Норриса, доказательство теоремы Хермандера.

12. Альтернативный подход, оператор Орнштейна-Уленбека. Вторая формула интегрирования по частям.

13. Второе доказательство теоремы Хермандера.

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

1. Теорема Гирсанова. Гладкие функционалы. Формула интегрирования по частям.
2. Векторные поля. Скобки Ли. Условие Хермандера. Теорема Хермандера.

Билет №2.

1. Ковариационная матрица Маллявэна и существование гладкой плотности. Оператор Орнштейна – Уленбека.
2. Критерии существования гладкой плотности.
3. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1. **H. Kuo. Introduction to Stochastic Integration. Springer. 2000.**
2. **Ю. Л. Далецкий, М.Г. Крейн Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., Наука, 1970.**
3. **R. Bass. Diffusions and Elliptic Operators, Springer, 1997.**

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

<http://www.hairer.org/papers/hormander.pdf>

**Приложение утверждено на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 10 от 07 июня 2017 г.**