**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Точность аппроксимации в предельных теоремах.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация:Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, теорию вероятностей, дополнительные главы теории вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, комплексного анализа, функционального анализа, теории вероятностей, дополнительных глав теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

очнаяформа обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *Зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Переченьресурсовинформационно-телекоммуникационнойсети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ТОЧНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ
2. Преподаватель - проф. В. В. Сенатов
3. Аннотация курса: в специальном курсе для студентов рассматриваются вопросы, связанные с оценками точности аппроксимаций в предельных теоремах теории вероятностей. Даётся ответ на вопрос о том, почему знаменитая теорема Берри – Эссеена не может правильно передать даже порядок точности аппроксимации в центральной предельной теореме. Предлагаются модификации постановки задачи о точности аппроксимации. Изучается вопрос о точности аппроксимаций для асимптотических разложений. Рассматриваются аппроксимации в других предельных теоремах.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Типы функций распределения: абсолютно непрерывные, сингулярные, дискретные, решетчатые. Суммы независимых случайных величин и свёртки распределений. Различные формы Центральной предельной теоремы (ЦПТ): интегральная и две локальные. |
| Тема 2 | Метод характеристических функций. Переходы из пространства распределений в пространство характеристических функций и обратно. Тейлоровские разложения характеристических функций и их модификации. Формулы обращения (для гладких функций распределения и для плотностей, для скачков решетчатых функций распределения). |
| Тема 3 | Теорема Берри – Эссеена и её уточнения. Постоянная Эссеена. |
| Тема 4 | Представление Г. Крамера для разности функций распределения в ЦПТ. |
| Тема 5 | Формулы обращения в интегральной форме ЦПТ для решетчатых распределений. |
| Тема 6 | Результаты Я. В. Успенского и их обобщения. |
| Тема 7 | Причины потери точности в интегральной форме ЦПТ в равномерной метрике. Природа постоянной Эссеена. Модификация постановок задач о точности аппроксимаций в ЦПТ. |
| Тема 8 | Неравномерные и квазинеравномерные оценки в ЦПТ. |
| Тема 9 | Многочлены и моменты Чебышева – Эрмита. Различные представления для разности характеристических функций в ЦПТ с использованием моментов Чебышева – Эрмита. |
| Тема 10 | Теорема Ибрагимова. Оценки скорости сходимости в ЦПТ для распределений с конечными моментами высоких порядков при ограничении на моменты младших порядков. |
| Тема 11 | Асимптотические разложения в ЦПТ как возможность обойти ограничения в теореме Ибрагимова на моменты младших порядков. |
| Тема 12 | Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений в локальных формах ЦПТ. |
| Тема 13 | Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений в интегральной форме ЦПТ при выполнении условия Крамера. |
| Тема 14 | Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений в ЦПТ для решетчатых функций распределения в серединах их интервалов постоянства. |
| Тема 15 | Вероятностные метрики как альтернатива характеристическим функциям. Специальные свойства вероятностных метрик (регулярность, полуаддитивность, однородность). Оценка точности аппроксимации в теореме Пуассона для расстояния полной вариации. Идеальные метрики. Оценки скорости сходимости в ЦПТ в метрике |
| Тема 16 | Оценки метрики Леви через идеальные метрики. Различие порядков оценок скорости сходимости в ЦПТ для метрики Леви в случаях, когда дисперсия фиксирована и не фиксирована. |
| Тема 17\* | Оценки идеальных метрик для сглаженных распределений. Оценки скорости сходимости в ЦПТ для средней метрики. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Программа экзамена (или вопросы к устному зачёту).

1. Типы функций распределения: абсолютно непрерывные, сингулярные, дискретные, решетчатые. Суммы независимых случайных величин и свёртки распределений. Различные формы центральной предельной теоремы (ЦПТ): интегральная и две локальные.
2. Метод характеристических функций. Переходы из пространства распределений в пространство характеристических функций и обратно. Тейлоровские разложения характеристических функций и их модификации. Формулы обращения (для гладких функций распределения и для плотностей, для скачков решетчатых функций распределения).
3. Теорема Берри – Эссеена и её уточнения. Постоянная Эссеена.
4. Представление Г. Крамера для разности функций распределения в ЦПТ при выполнении условия Крамера для распределений с конечным моментом четвёртого порядка.
5. Формулы обращения в интегральной форме ЦПТ для решетчатых распределений.
6. Результаты Я. В. Успенского и их обобщения для решетчатых распределений с конечным моментом четвёртого порядка.
7. Причины потери точности в интегральной форме ЦПТ в равномерной метрике. Природа постоянной Эссеена. Модификация постановок задач о точности аппроксимаций в ЦПТ.
8. Неравномерные и квазинеравномерные оценки в ЦПТ.
9. Многочлены и моменты Чебышева – Эрмита. Различные представления для разности характеристических функций в ЦПТ с использованием моментов Чебышева – Эрмита.
10. Теорема Ибрагимова. Оценки скорости сходимости в ЦПТ для распределений с конечными моментами высоких порядков при ограничении на моменты младших порядков.
11. Асимптотические разложения в ЦПТ как возможность обойти ограничения в теореме Ибрагимова на моменты младших порядков.
12. Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений в локальных формах ЦПТ (для плотностей и скачков решетчатых функций распределения).
13. Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений в интегральной форме ЦПТ при выполнении условия Крамера.
14. Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений в ЦПТ для решетчатых функций распределения в серединах их интервалов постоянства.
15. Вероятностные метрики как альтернатива характеристическим функциям. Специальные свойства вероятностных метрик (регулярность, полуаддитивность, однородность). Оценка точности аппроксимации в теореме Пуассона для расстояния полной вариации. Идеальные метрики. Оценки скорости сходимости в ЦПТ в метрике
16. Оценки метрики Леви через идеальные метрики. Различие порядков оценок скорости сходимости в ЦПТ для метрики Леви в случаях, когда дисперсия фиксирована и не фиксирована.
17. Оценки идеальных метрик для сглаженных распределений. Оценки скорости сходимости в ЦПТ для средней метрики.

*Билеты к экзамену или зачёту формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка).*

Образцы билетов.

Билет 1.

А. Метод характеристических функций. Переходы из пространства распределений в пространство характеристических функций и обратно. Тейлоровские разложения характеристических функций и их модификации. Формулы обращения (для гладких функций распределения и для плотностей, для скачков решетчатых функций распределения).

Б. Теорема Ибрагимова. Оценки скорости сходимости в ЦПТ для распределений с конечными моментами высоких порядков при ограничении на моменты младших порядков.

Билет 2.

А. Неравномерные и квазинеравномерные оценки в ЦПТ.

Б. Оценки метрики Леви через идеальные метрики. Различие порядков оценок скорости сходимости в ЦПТ для метрики Леви в случаях, когда дисперсия фиксирована и не фиксирована.

Билет 3.

А. Оценки точности аппроксимации для асимптотических разложений в ЦПТ для решетчатых функций распределения в серединах их интервалов постоянства.

Б. Оценки идеальных метрик для сглаженных распределений. Оценки скорости сходимости в ЦПТ для средней метрики.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы.

Основная литература.

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.

2. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

Дополнительная литература.

3. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения, М., 2009.

4. Сенатов В. В. О двух результатах Я. В. Успенского и одном результате К.-Г. Эссеена, Сборник работ, посвященный 80-летию кафедры теории вероятностей МГУ, М., 2015.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html