**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № от 2017 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории вероятностей.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения и аспирантов, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа, научно-исследовательская работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Получить знания в современной области теории вероятностей, имеющей разнообразные приложения. Научиться применять изложенную теорию для решения теоретических и прикладных задач.

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные результаты изученных разделов математики и основные идеи доказательств этих результатов.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных и более сложных задач.

Владеть: основными понятиями, результатами и методами из упомянутых разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17 | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. «Построение и анализ стохастических моделей»
2. Преподаватель – проф. А.В.Булинский
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов 3-6 курсов и аспирантов. Курс посвящен изучению различных классов стохастических моделей, которые описываются с помощью разнообразных систем случайных величин (независимых и зависимых). Вводятся и исследуются классы случайных полей такие, как гиббсовские, марковские, гауссовские и другие. Даются примеры решения задач, в которых рассматриваемые модели используются.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Семейства независимых случайных элементов. Процессы восстановления |
| Тема 2 | Марковские цепи (основные понятия и результаты для цепей с дискретным временем и конечным пространством состояний) |
| Тема 3 | Гиббсовские случайные поля, заданные на конечном графе и принимающие конечное число значений |
| Тема 4 | Марковские случайные поля, заданные на конечном графе и принимающие конечное число значений |
| Тема 5 | Теорема Аверинцева – Клиффорда – Хаммерсли |
| Тема 6 | Модель Изинга. Перколяция |
| Тема 7 | Гауссовские случайные поля |
| Тема 8 | Пространственный пуассоновский случайный процесс. Точечные случайные процессы |
| Тема 9 | Фунционал Лапласа. Теорема о функционале Лапласа пространственного пуассоновского процесса |
| Тема 11 | Теоремы Питта, Йоаг-Дева и Прошана. Примеры положительно и отрицательно ассоциированных величин. |
| Тема 12 | Неравенство ФКЖ для мер на решетках |
| Тема 13 | Квазиассоциировавнность. Неравенство Ньюмена для характеристических функций случайных векторов |
| Тема 14 | Стремление множеств к бесконечности по Ван Хову. Регулярно растущие подмножества многомерной целочисленной решетки |
| Тема 15 | Асимптотическое поведение дисперсий сумм случайных величин, образующих стационарное в широком смысле случайное поле, когда эти суммы берутся по регулярно растущим множествам целочисленной решетки. |
| Тема 16 | Центральная предельная теорема для случайных полей. Гипотеза Ньюмена |
| Тема 17 | Экскурсионные множества случайных полей |
| Тема 18 | Случайные графы. Модель Эрдеша – Реньи. Свойства связности графа |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Случайные элементы и их распределения. Независимость сигма-алгебр. Независимость семейств случайных величин. Теорема Ломницкого – Улама (формулировка). Теорема Колмогорова о согласованных распределениях (формулировка). Процессы восстановления.
2. Марковские цепи (основные понятия: начальное распределение, переходные вероятности, однородные и неоднородные цепи, конечномерные распределения, стационарное распределение, предельное поведение переходных вероятностей).
3. Энергия и потенциал. Канонический потенциал. Формула Мебиуса. Существование канонического потенциала. Гиббсовские случайные поля, заданные на конечном графе и принимающие конечное число значений. Клики и потенциал ближайших соседей.
4. Марковские случайные поля, заданные на конечном графе и принимающие конечное число значений. Лемма об условной независимости трех случайных элементов.
5. Теорема Аверинцева – Клиффорда – Хаммерсли (об эквивалентности описания гиббсовских и марковских случайных полей на конечном графе).
6. Оценка радиуса окрестности взаимодействия для марковского случайного поля.
7. Модель Изинга. Граничное условие Добрушина. Метод Пайерлса.
8. Гауссовские случайные поля. Свойства многомерных гауссовских распределений. Условные плотности. Свойства условной независимости компонент гауссовского вектора и элементов матрицы, обратной к ковариационной матрице. Локальное, попарное и глобальное свойства марковости гауссовского случайного поля (формулировка).
9. Пуассоновский случайный процесс постоянной интенсивности. Явная конструкция, использующая независимые экспоненциальные случайные величины. Свойства пуассоновского процесса.
10. Пространственный пуассоновский случайный процесс. Построение такого процесса, имеющего заданную конечную меру интенсивности.
11. Лемма о сумме ряда из независимых пуассоновских случайных величин. Построение пространственного пуассоновского случайного процесса с заданной сигма-конечной мерой интенсивности.
12. Точечные пространственные процессы. Пространственный пуассоновский процесс как точечный процесс. Фунционал Лапласа. Теорема о функционале Лапласа пространственного пуассоновского процесса.
13. Маркированный пуассоновский процесс. Применение к системе массового обслуживания M|G|∞. Построение пуассоновского пространственного процесса с помощью предельного перехода от модели точек, равномерно распределенных в растущих кубах.
14. Неравенство Чебышева (для ковариации неубывающих функций, берущихся от действительной случайной величины). Семейства ассоциированных величин. Положительная и отрицательная ассоциированность. Доказательство ассоциированности любого семейства независимых действительных случайных величин.
15. Теоремы Питта, Йоаг-Дева и Прошана. Примеры положительно и отрицательно ассоциированных величин.
16. Неравенство ФКЖ для мер на решетках.
17. Неравенство Булинского – Шабанович. Неравенство Ньюмена для характеристических функций случайных векторов.
18. Стремление множеств к бесконечности по Ван Хову. Регулярно растущие подмножества многомерной целочисленной решетки. Связь двух упомянутых понятий роста множеств.
19. Асимптотическое поведение дисперсий сумм случайных величин, образующих стационарное в широком смысле случайное поле, когда эти суммы берутся по регулярно растущим множествам целочисленной решетки.
20. Центральная предельная теорема для случайных полей. Гипотеза Ньюмена.
21. Экскурсионные множества случайных полей.
22. Случайные графы. Модель Эрдеша – Реньи. Свойства связности графа.

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

А. Энергия и потенциал. Канонический потенциал. Формула Мебиуса.

Б. Лемма о сумме ряда из независимых пуассоновских случайных величин. Построение пространственного пуассоновского случайного процесса с заданной сигма-конечной мерой интенсивности.

В. Найти предельное распределение числа клиентов в модели массового обслуживания M|G|\infty при неограниченном росте времени.

Билет №2.

А. Теорема Аверинцева – Клиффорда – Хаммерсли

Б. Стремление множеств к бесконечности по Ван Хову. Регулярно растущие подмножества многомерной целочисленной решетки. Связь двух упомянутых понятий роста множеств.

В. Для пуассоновского процесса постоянной интенсивности, принимающего значения в пространстве R^3, найти плотность распределения расстояния от фиксированной точки пространства до ближайшей (случайной) точки этого процесса.

Билет №3

А. Центральная предельная теорема для случайных полей. Гипотеза Ньюмена.

Б. Модель Изинга. Граничное условие Добрушина. Метод Пайерлса.

В. Доказать квазиассоциированность гауссовских систем.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1. А.В.Булинский, А.П.Шашкин. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. P.Bremaud. Discrete Probability Models and Methods. Springer, Cham, 2017.
3. A.Bulinski, E.Spodarev. Introduction to random fields. Lecture Notes in Mathematics, v. 2068, p. 277-335, Springer, Berlin, 2013.

Дополнительная литература:

4) А.В.Булинский. Оценка радиуса окрестности взаимодействия для марковского случайного поля. Теория вероятностей и ее применения. 2015, т. 60, №2, с. 377-383.

5) A.Frieze, M.Karonski. Introduction to Random Graphs. Cambridge University Press, 2016.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html