**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории случайных процессов.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**.** «Стохастические многокомпонентные системы»
2. Преподаватель – доц. А.Д. Манита
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов посвящен избранным вопросам теории многокомпонентных систем. Изучаются марковские случайные процессы, теория Перрона-Фробениуса и другие разделы, которые необходимы для анализа вероятностных моделей с взаимодействующими компонентами, в том числе многокомпонентных систем с синхронизацией.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Основные вероятностные модели многокомпонентных систем. Примеры: процессы с запретами, процессы контактов, модель Изинга и др. |
| Тема 2 | Понятие о стохастических моделях синхронизации. Свободные динамики компонент и взаимодействие. Мотивировка и математическая формализация. |
| Тема 3 | Прототипы вероятностных моделей синхронизации в смежных областях науки. |
| Тема 4 | Модель синхронизации Митра-Митрани. |
| Тема 5 | Цепи Маркова с конечным и счетным пространствами состояний. Стохастические матрицы. |
| Тема 6 | Цепи Маркова с непрерывным временем. Вложенные цепи Маркова. Инфинитезимальные матрицы. |
| Тема 7 | Классификация состояний цепей Маркова. Классификация поведения цепей Маркова на больших временах. Поглощения. Стационарное распределение. |
| Тема 8 | Неотрицательные и положительные матрицы. Проблема их возведения в высокую степень. |
| Тема 9 | Теорема Перрона для положительных матриц. |
| Тема 10 | Лемма о сравнении положительных матриц. Примитивные матрицы. |
| Тема 11 | Асимптотическое поведение степеней положительных матриц. |
| Тема 12 | Случайное блуждание на дискретной окружности. Явное решение спектральной задачи. |
| Тема 13 | Понятие об общей стохастической многокомпонентной модели с синхронизацией. Свободная динамика, последовательность времен взаимодействия. |
| Тема 14 | Примеры марковских многокомпонентных систем с синхронизацией, основанных на системе броуновских частиц и на системе взаимодействующих диффузий. Вероятностные модели сенсорных сетей. |
| Тема 15 | Понятие о глобальной стохастической синхронизации. |
| Тема 16 | Последовательные временные фазы в поведении основных марковских систем с синхронизацией. |
| Тема 17\* | Симметричные и несимметричные многокомпонентные системы с синхронизацией. Немарковские модели синхронизации. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Основные вероятностные модели многокомпонентных систем. Примеры: процессы с запретами, процессы контактов, модель голосования, модель Изинга и др. Краткий обзор основных направлений в исследовании этих систем.
2. Понятие о стохастических моделях синхронизации. Свободные динамики компонент и взаимодействие. Мотивировка и математическая формализация.
3. Прототипы вероятностных моделей синхронизации в смежных областях науки.
4. Модель синхронизации Митра-Митрани. Постановка задачи и смысл результата.
5. Цепи Маркова с конечным и счетным пространствами состояний. Марковское свойство. Матрица переходов и граф переходов. Стохастические матрицы.
6. Цепи Маркова с непрерывным временем. Вложенные цепи Маркова. Инфинитезимальные матрицы.
7. Классификация состояний цепей Маркова. Каноническая форма переходной матрицы. Связь с теорией графов.
8. Эволюция (одномерного) распределения . Классификация поведения цепей Маркова на больших временах. Стационарное распределение.
9. Цепи Маркова с поглощением. Табу-вероятности.
10. Неотрицательные и положительные матрицы. Проблема их возведения в высокую степень.
11. Теорема Перрона для положительных матриц. Этапы ее доказательства.
12. Лемма о сравнении положительных матриц. Примитивные матрицы.
13. Асимптотическое поведение степеней положительных матриц.
14. Случайное блуждание на дискретной окружности. Явное решение спектральной задачи.
15. Дискретное преобразование Фурье. Формула обращения
16. Понятие об общей стохастической модели с синхронизацией компонент. Свободная динамика, последовательность времен взаимодействия.
17. Примеры многокомпонентных систем с синхронизацией, основанных на системе броуновских частиц и на системе взаимодействующих диффузий.
18. Вероятностные модели синхронизации времен в беспроводных сенсорных сетях.
19. Понятие о глобальной стохастической синхронизации.
20. Последовательные временные фазы в поведении броуновской системы с синхронизацией.
21. Последовательные временные фазы в поведении системы взаимодействующих диффузий с синхронизацией.
22. Последовательные временные фазы в модели беспроводной сенсорной сети.
23. Симметричные и несимметричные многокомпонентные системы с синхронизацией
24. Немарковские модели синхронизации. Рассогласование между компонентами и его вероятностный анализ.

*Образцы билетов.*

Билет №1.

А. Классический процесс контактов. Его поглощающие состояния.

Б. Доказательство геометрической простоты перроновского собственного значения положительной матрицы.

В. Задача: можно ли указать различные наборы параметров, при которых система взаимодействующих диффузий с синхронизацией обладает качественно различными наборами временных фаз? Обоснуйте свой ответ.

Билет №2.

А. Модель Изинга. Термодинамический предел. Понятие о фазовых переходах.

Б. Предельное распределение стохастических многокомпонентных систем с синхронизацией.

В. Задача: приведите пример конкретного случайного блуждания на окружности, чья матрица переходов имеет несколько собственных значений на окружности спектрального радиуса. Опишите поведение этого блуждания на больших временах.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

*Основная литература.*

1. Лиггетт Т.М. Марковские процессы с локальным взаимодействием. Пер. с англ. — Москва: Мир, 1989. — 550 с.
2. Карлин С. Основы теории случайных процессов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
3. Manita A. Clock synchronization in symmetric stochastic networks // Queueing Systems. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 149–180

*Дополнительная литература.*

1. D. Mitra, I. Mitrani, Analysis and Optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. Performance Evaluation 7 (1987), 111-124
2. Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В. Теория вероятностей - Киев: Высшая школа, 1990.
3. Kolmogorov A.N. On The Theory of Markov Chains. In Selected Works of A. N. Kolmogorov (ed. A.N. Shiryaev), pp 182-187, Springer 1992. (‘Zur Theorie der Markoffschen Ketten’, Math. Ann. 112 (1936), 155-160.)
4. Kijima M. Markov Processes for Stochastic Modeling, Springer US (1997)
5. Norris J.R. Markov Chains, Cambridge University Press (1997)
6. Fayolle G., Malyshev V.A., Menshikov M.V. Topics in constructive theory of countable Markov chains, Cambridge University, 1995
7. Малышев В.А., Минлос Р.А. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. - М: Наука, 1985
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах, 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
10. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
11. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц, 5-е изд. М.: Физматлит, 2004.
12. Minc, H. Nonnegative Matrices. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, New York, NY, USA, 1988.
13. Seneta, E. Non-Negative Matrices and Markov Chains, revised ed. Springer series in statistics. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 2006.
14. Tijms, H.C. A\_First\_Course\_in\_Stochastic\_Models, (2003)
15. Манита А.Д. Коллективное поведение в многомерных вероятностных моделях cинхронизации. Обозрение прикладной и промышленной математики, том 14, № 6, с. 1001-1021 (2007)
16. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов: Строгие результаты. Москва: Издательство «Наука», 1980

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

<http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html>,

<http://istina.msu.ru/profile/manita/>

ArXiv e-prints, № 1303.0031 [math.PR]

ArXiv e-prints, № 1409.2919, с. 1-50

www.mathnet.ru