**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории случайных процессов.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. «Теория стохастических дифференциальных уравнений».
2. Преподаватель - проф. А.Ю. Веретенников.
3. Аннотация курса: курс посвящен теории стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Рассматриваются основные результаты о сильных и слабых решениях СДУ и о сильной и слабой единственности. Рассмотрены неравенство Крылова, метод Скорохода, позволяющий строить (слабые) решения СДУ предельным переходом на некотором едином вероятностном пространстве, подробно рассмотрена связи между решениями СДУ и уравнениями в частных производных.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Краткая ревизия основных сведений из теории меры и интегрирования. Теорема Колмогорова о непрерывности процесса и поля. |
| Тема 2 | Винеровский процесс (ВП), его основные свойства: непрерывность, непрерывность по Гельдеру. |
| Тема 3 | Свойство недифференцируемости траекторий ВП. |
| Тема 4 | Ревизия: квадратическая вариация ВП, стохастический интеграл, формула Ито. |
| Тема 5 | Понятие стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Сильные и слабые решения. Теорема Ито о сильных решениях. |
| Тема 6 | Экспоненты Гирсанова и теорема Гирсанова о замене меры |
| Тема 7 | Слабые решения СДУ как следствие теоремы Гирсанова. Единственность решения по распределению. |
| Тема 8 | Теорема Бенеша о слабых решениях. Её обобщения. Единственность по распределению. |
| Тема 9 | Теорема Скорохода о слабой сходимости и едином вероятностном пространстве. |
| Тема 10 | Теорема Скорохода о существовании слабого решения. |
| Тема 11 | Неравенство Крылова; сильные и слабые решения СДУ |
| Тема 12 | Теорема Крылова о слабых решениях. |
| Тема 13 | Принцип Ямада — Ватанабе; теоремы Ямада — Ватанабе, другие теоремы о сильных решениях. |
| Тема 14 | Марковское свойство решений СДУ. |
| Тема 15 | Связь винеровского процесса с оператором Лапласа и тепловым уравнением. |
| Тема 16 | Связь решений СДУ с эллиптическими и параболическими уравнениями второго порядка. |
| Тема 17\* | Неравенство Харнака для недивергентных эллиптических операторов второго порядка, его интерпретация в терминах СДУ |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к устному зачету):*

1. Стохастический интеграл Ито.

2. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), теорема Ито о сильных решениях.

3. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), слабые решения СДУ как следствие теоремы Гирсанова о замене меры.

4. Теорема Гирсанова о замене меры.

5. Теорема Скорохода о слабых решениях СДУ.

6. Теорема Крылова о слабых решениях СДУ.

7. Теорема Ямада-Ватанабе о сильной единственности.

8. Теорема Звонкина о сильном решении СДУ.

9. Марковское свойство решений СДУ (по лекциям Крылова).

10. Представление решения уравнения Лапласа с помощью винеровского процесса.

11. Представление решения уравнения теплопроводности с помощью винеровского процесса.

12. Представление решения эллиптических уравнений с помощью СДУ.

13. Представление решения параболических уравнений с помощью СДУ.

*Примеры задач*

1. С помощью неравенства Крылова обоснуйте применимость формулы Ито к функции с двумя соболевскими производными.

2. Пусть известно, что для эллиптического оператора справедливо (эллиптическое) неравенство Харнака. Объясните, что это означает для выходных мер решения СДУ с различными начальными условиями из шара.

3. Пусть два случайных (согласованных с потоком сигма-алгебр) процесса совпадают на некотором множестве. Покажите, что стохастические интегралы от этих двух процессов по винеровскому процессу совпадают на этом же множестве почти наверное.

*Примеры тем для самостоятельной работы обучающихся*

1. Теорема Бенеша о слабых решениях СДУ.

2. Неравенство Крылова.

3. Теорема Скорохода о едином вероятностном пространстве.

4. Принцип Ямада-Ватанабе.

5. Теорема Накао о сильной единственности.

6. Марковское свойство решений СДУ: подход Гирсанова.

7. Случайная замена времени.

8. Как применить формулу Ито к функции |x|? Понятие локального времени.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов.* Москва, Физматлит, 2003.

2. Жакод Ж., Ширяев А.Н. *Предельные теоремы для случайных процессов*. Москва, Физматлит, 1994.

3. Вентцель А.Д., *Курс теории случайных процессов*, Москва, Наука, 1996.

4. Крылов Н.В., *Введение в теорию случайных процессов*, части 1, 2, Москва, МГУ, 1986-1987.

5. Watanabe S., Ikeda N. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1989.

6. Крылов Н.В., *Управляемые процессы диффузионного типа*, Москва, Наука, 1977.

7. Эллиотт Р. *Стохастический анализ и его приложения*, Москва, Мир, 1986.

8. Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*. Москва, Мир, АСТ, 2003.

Дополнительная литература:

1. С. В. Анулова, А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов, и др. Стохастическое исчисление. ВИНИТИ, Москва, сер. Фундаментальные исследования, 1989, т.35. (Engl. Transl. S. V. Anulova, A. Yu. Veretennikov, N. V. Krylov, R. Sh. Liptser, A. N. Shiryaev, “Stochastic calculus”, Probability Theory III: Stochastic Calculus, 1998, Springer Paperback – Dec. 2010)

2. N. V. Krylov, Introduction to the Theory of Random Processes, AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

3. S. Watanabe, N. Ikeda, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1989.

4. S. N. Ethier, T. G. Kurtz, Markov processes: Characterization and Convergence, 2nd ed., Wiley, New York, 2005.

5. D. Stroock, S. R. S. Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes, 2006 ed., Springer, Berlin, Paperback 2014.

6. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, Киев: Наукова думка, 1982.

7. R. F. Bass, Diffusions And Elliptic Operators, Springer, New York, 1997.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html