**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Вероятностно-статистические методы.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Вероятностно-статистические методы. «Многомерные случайные процессы с синхронизацией»
2. Преподаватель – доц. А.Д. Манита
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов посвящен теоретическим основам построения вероятностных многомерных моделей, динамика которых содержит синхронизирующие скачки. Изучаются марковские случайные процессы, устойчивые распределения, процессы Леви, процессы восстановления, метод Лапласа, пространственно-временные скейлинги и др.вопросы.
4. Тематическое содержание курса

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Понятие об общей стохастической многокомпонентной модели с синхронизацией. Свободная динамика, последовательность времен взаимодействия, синхронизирующие скачки. |
| Тема 2 | Прототипы вероятностных моделей синхронизации в смежных областях науки. |
| Тема 3 | Процессы Леви. Примеры: винеровский и пуассоновский процессы, составной пуассоновский процесс, диффузия со скачками. |
| Тема 4 | Характеристические функции. Многомерный гауссовский закон. Безграничная делимость случайных векторов. Безграничная делимость процессов Леви. |
| Тема 5 | Формула Леви-Хинчина. Нахождение меры Леви для основных примеров. |
| Тема 6 | Разложение Леви-Ито. Активность процесса Леви. Свойства траекторий и условия существования моментов в терминах меры Леви. |
| Тема 7 | Субординаторы и случайная замена времени в процессах Леви. |
| Тема 8 | Устойчивые распределения. Теорема о представлении симметричных устойчивых законов. Одномерный и многомерный случай. |
| Тема 9 | Области притяжения. Классические результаты о притяжении. Многомерные примеры. |
| Тема 10 | Устойчивые процессы Леви. Самоподобность. |
| Тема 11 | Симметризованные синхронизирующие скачки как отображения конфигурационного пространства. Основная лемма «о сжатии». |
| Тема 12 | Марковская модель синхронизации на примере системы броуновских частиц с попарным взаимодействием. |
| Тема 13 | Понятие о глобальной стохастической синхронизации. |
| Тема 14 | Последовательные временн*ы*е фазы в поведении марковской системы броуновских частиц с синхронизацией. |
| Тема 15 | Марковская модель синхронизации локальных времен в беспроводных сенсорных сетях (БСС). |
| Тема 16 | Количество различных временн*ы*х шкал в засисимости от параметров модели БСС. |
| Тема 17 | Процессы восстановления. Основные классы и примеры. Функция восстановления и её свойства. |
| Тема 18 | Уравнение восстановления. Узловая теорема восстановления. Времена недоскока и перескока, их предельные распределения. |
| Тема 19 | Производящие функции. Преобразование Лапласа. Их свойства. Представление производящей функции числа восстановлений. |
| Тема 20 | Вероятностные распределения с рациональным преобразованием Лапласа. Подклассы матрично-экспоненциальных распределений, распределений Кокса, общих распределений Эрланга. |
| Тема 21 | Суперпозиция процессов восстановления. |
| Тема 22 | Общая немарковская модель многокомпонентной системы с синхронизацией. |
| Тема 23 | Анализ поведения на больших временах симметрической немарковской модели синхронизации. |
| Тема 24 | Теорема о характеристической функции попарных рассогласований компонент синхронизованной симметричной N-компонентной системы. Марковский и немарковский случай. |
| Тема 25 | Теорема о естественной пространственной шкале для синхронизованной марковской N-компонентной системы в случае Леви-устойчивой свободной динамики. |
| Тема 26 | Теорема о естественной пространственной шкале в немарковском случае. Случай свободных динамик, притягивающихся к многомерным устойчивым законам. |
| Тема 27 | Примеры случайных блужданий из областей притяжения устойчивых законов. |
| Тема 28 | Класс предельных распределений, возникающих в системах с большим числом компонент. Геометрически устойчивые распределения. Распределение Линника и его свойства. |
| Тема 29 | Понятие об операторно-устойчивых распределениях. Обобщение теоремы об естественных пространственных шкалах. Координаты Юрека. |
| Тема 30 | Представление для характеристической функции разностей в немарковской модели при конечных временах. Предел по времени при фиксированном числе компонент. |
| Тема 31 | Асимптотические разложения для предельной характеристической функции при росте числа компонент к бесконечности. Переход к преобразованию Лапласа. Выделение главных членов асимптотического разложения и оценивание остаточных членов. |
| Тема 32 | Несимметрическая марковская модель синхронизации. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Понятие об общей стохастической многокомпонентной модели с синхронизацией. Свободная динамика, последовательность времен взаимодействия, синхронизирующие скачки.
2. Прототипы вероятностных моделей синхронизации в смежных областях науки.
3. Процессы Леви. Примеры: винеровский и пуассоновский процессы, составной пуассоновский процесс, диффузия со скачками.
4. Характеристические функции. Многомерный гауссовский закон. Безграничная делимость случайных векторов. Безграничная делимость процессов Леви.
5. Формула Леви-Хинчина. Нахождение меры Леви для основных примеров.
6. Разложение Леви-Ито. Активность процесса Леви. Свойства траекторий и условия существования моментов в терминах меры Леви.
7. Субординаторы и случайная замена времени в процессах Леви.
8. Устойчивые распределения. Теорема о представлении симметричных устойчивых законов. Одномерный и многомерный случай.
9. Области притяжения. Классические результаты о притяжении. Многомерные примеры.
10. Устойчивые процессы Леви. Самоподобность.
11. Симметризованные синхронизирующие скачки как отображения конфигурационного пространства. Основная лемма "о сжатии".
12. Марковская модель синхронизации на примере системы броуновских частиц с попарным взаимодействием.
13. Понятие о глобальной стохастической синхронизации.
14. Последовательные временные фазы в поведении марковской системы броуновских частиц с синхронизацией.
15. Марковская модель синхронизации локальных времен в беспроводных сенсорных сетях (БСС).
16. Количество различных временных шкал в засисимости от параметров модели БСС.
17. Процессы восстановления. Основные классы и примеры. Функция восстановления и её свойства.
18. Уравнение восстановления. Узловая теорема восстановления. Времена недоскока и перескока, их предельные распределения.
19. Производящие функции. Преобразование Лапласа. Их свойства. Представление производящей функции числа восстановлений.
20. Вероятностные распределения с рациональным преобразованием Лапласа. Подклассы матрично-экспоненциальных распределений, распределений Кокса, общих распределений Эрланга.
21. Суперпозиция процессов восстановления.
22. Общая немарковская модель многокомпонентной системы с синхронизацией.
23. Анализ поведения на больших временах симметрической немарковской модели синхронизации.
24. Теорема о характеристической функции попарных рассогласований компонент синхронизованной симметричной N-компонентной системы. Марковский и немарковский случай.
25. Теорема о естественной пространственной шкале для синхронизованной марковской N-компонентной системы в случае Леви-устойчивой свободной динамики.
26. Теорема о естественной пространственной шкале в немарковском случае. Случай свободных динамик, притягивающихся к многомерным устойчивым законам.
27. Примеры случайных блужданий из областей притяжения устойчивых законов.
28. Класс предельных распределений, возникающих в системах с большим числом компонент. Геометрически устойчивые распределения. Распределение Линника и его свойства.
29. Понятие об операторно-устойчивых распределениях. Обобщение теоремы об естественных пространственных шкалах. Координаты Юрека.
30. Представление для характеристической функции разностей в немарковской модели при конечных временах. Предел по времени при фиксированном числе компонент.
31. Асимптотические разложения для предельной характеристической функции при росте числа компонент к бесконечности. Переход к преобразованию Лапласа. Выделение главных членов асимптотического разложения и оценивание остаточных членов.
32. Несимметрическая марковская модель синхронизации.

*Образцы билетов.*

Билет №1.

А. Глобальная стохастическая синхронизация.

Б. Вид характеристической функции многомерных симметричных устойчивых законов.

В. Задача: Найдите в явном виде (одномерное) распределение разности состояний компонент в симметричной марковской модели синхронизации броуновских частиц.

Билет №2.

А. Марковская модель синхронизации локальных времен в беспроводных сенсорных сетях.

Б. Классы вероятностных распределений с рациональным преобразованием Лапласа.

В. Задача: Для негауссовских одномерных и многомерных устойчивых законов укажите примеры случайных блужданий, входящих в их области притяжения, и обоснуйте свой ответ.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

*Основная литература.*

1. Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, 1949.
2. D. Applebaum, Lévy Processes and Stochastic Calculus, Cambridge University Press (2009)

*Дополнительная литература.*

1. Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами, М.: Изд-во МГУ, 1980
2. Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания. Москва: Издательство "Наука", 1987.
3. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления, "Советское радио", Москва - 1967 г.
4. Лукач Е. Характеристические функции, Москва, Наука, 1979 г., 424 стр.
5. А. Д. Манита, Стохастическая синхронизация в большой системе однотипных частиц, ТВП, 53:1 (2008), 162 - 167
6. Manita A., Brownian particles interacting via synchronizations. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2011, v. 40, N. 19-20, p. 3440 - 3451.
7. Manita, A., Clock synchronization in symmetric stochastic networks, Queueing Syst. 76 , no. 2 (2014): 149-180.
8. Manita, A., Intrinsic Space Scales for Multidimensional Stochastic Synchronization Models, Book on New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis, 2014
9. Manita, A., Intrinsic scales for high-dimensional Lévy-driven models with non-Markovian synchronizing updates. arXiv:1409.2919, 1 - 50 (2014).
10. G. Samorodnitsky, M. Taqqu, Stable Non-Gaussian Random Processes, CRC Press, 1994
11. K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press (1999)
12. V.V. Uchaikin, V.M. Zolotarev, Chance and stability. Stable Distributions and their Applications, VSP, 1999 Дополнительная литература
13. O. Simeone, U. Spagnolini, Y. Bar-Ness, S. Strogatz. Distributed synchronization in wireless networks. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, V. 25, N. 5, pp. 81 - 97.
14. D.P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis. Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods, Belmont, Athena Scientific, 1997.
15. Sundararaman B., Buy U., Kshemkalyani, Clock Synchronization for Wireless Sensor Networks: a Survey, Ad Hoc Networks, Volume 3, Issue 3, 2005, pp. 281-323.
16. Л. Б. Клебанов, Г. М. Мания, И. А. Меламед, Одна задача В. М. Золотарева и аналоги безгранично делимых и устойчивых распределений в схеме суммирования случайного числа случайных величин, ТВП, 29:4 (1984), 757 - 760
17. В. А. Малышев, А. Д. Манита, Фазовые переходы в модели синхронизации времени, ТВП, 50:1 (2005), 150 - 158
18. Сакович Г.Н. О многомерных устойчивых распределениях. Теор. вер. и ее прим. - 1960. - т. 5, вып. 2. - С. 254.
19. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах, 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
20. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М: Фазис, 1998.
21. Asmussen, S., Bladt, M., 1996. Renewal theory and queueing algorithms for matrix-exponential distributions. In: Alfa, A.S., Chakravarty, S. (Eds.), Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models. New York, pp. 313 - 341.
22. Grigelionis, B.I. Accuracy of approximation of a superposition of renewal processes by a Poisson process, Litovskil Matematicheskil Sbornik, II (2), 1962, pp. 135-143.
23. M.B. Erdogan, I.V. Ostrovskii, Analytic and asymptotic properties of generalized Linnik probability densities, J. Math. Anal. Appl., 217 (1998), pp. 555 - 578
24. Z. Jurek and J. Mason, Operator-Limit Distributions in Probability Theory, Wiley - New York, 1993.
25. S. Kotz, T.J. Kozubowski and K. Podgorski, The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance, Birkhauser, Boston (2001).
26. Kozubowski, T. ; Meerschaert, M. ; Panorska, A. ; Scheffer, H.-P., Operator geometric stable laws, Journal of Multivariate Analysis; 92, 2; 298-323 (2002)
27. A. Manita and V. Shcherbakov. Asymptotic analysis of a particle system with mean-field interaction, Markov Processes Relat. Fields 11, 489 - 518, 2005.
28. D. Mitra and I. Mitrani. Analysis and optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. Performance Evaluation 7, 111 - 124, 1987.
29. Rvacheva E., 1962. On domains of attraction of multidimensional distributions. In: Select. Transl. Math. Stat. Prob., Vol. 2. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 183 - 205.
30. C. Y. Teresa Lam and John P. Lehoczky, Superposition of Renewal Processes, Advances in Applied Probability, Vol. 23, No. 1 (Mar., 1991), pp. 64-85

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

<http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html>,

<http://istina.msu.ru/profile/manita/>

ArXiv e-prints, № 1303.0031 [math.PR]

ArXiv e-prints, № 1409.2919, с. 1-50

www.mathnet.ru