**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории вероятностей.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. «Основы теории вероятностей»
2. Лектор – проф. А.В. Булинский
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов 2-го года обучения. Цель данного спецкурса помочь студентам заранее (до усвоения обязательного курса «Теория вероятностей») ознакомиться с основными идеями, лежащими в основе теории вероятностей, базирующейся на аксиоматике Колмогорова. Опыт показывает, что студентам, прослушавшим этот подготовительный курс, легче воспринимать всю программу вероятностного цикла обучения (включающую еще два семестровых курса «Математическая статистика» и «Теория случайных процессов»), чем тем, кто не имеет представлений о специфике данного предмета. При этом в спецкурсе удается изложить целый ряд результатов, на детальное обсуждение которых в обязательном курсе не хватает времени. На лекциях также предлагаются задачи, направленные на творческое освоение теории.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Модели случайных экспериментов. Примеры. Системы подмножеств непустого множества (алгебры, сигма-алгебры, пи- и лямбда-системы). Борелевская сигма-алгебра. Теорема о пи-лямбда-системах. |
| Тема 2 | Мера. Вероятностное пространство. Частотная интерпретация вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Биномиальное, пуассоновское и геометрическое распределения. Классическое определение вероятности. |
| Тема 3 | Свойства вероятности. Вероятность на алгебре подмножеств некоторого множества. Счетная аддитивность, конечная аддитивность и непрерывность в «нуле» (пустом множестве). Единственность продолжения вероятности с пи-системы на наименьшую сигма-алгебру, порожденную этой пи-системой. Пополнение вероятностного пространства. |
| Тема 4 | Функция распределения вероятности на прямой (снабженной борелевской сигма-алгеброй) и ее свойства.  Понятие плотности распределения (с использованием интеграла Римана для кусочно-непрерывных функций). Основные распределения (равномерное, экспоненциальное, нормальное, Коши). |
| Тема 5 | Теорема Каратеодори. |
| Тема 6 | Построение вероятности на прямой (снабженной борелевской сигма-алгеброй) по функции, обладающей свойствами функции распределения. Условная вероятность. Независимость событий (попарная и в совокупности). Независимость сигма-алгебр, порожденных независимыми пи-системами. Лемма о группировке. Вероятностное доказательство формулы Эйлера в теории чисел. |
| Тема 7 | Лемма Бореля -- Кантелли. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры. |
| Тема 8 | Случайные величины (элементы) и их распределения. Действия над случайными величинами. Независимые случайные величины. Независимость борелевских функций, берущихся от непересекающихся наборов системы независимых величин. |
| Тема 9 | Модель пуассоновского точечного пространственного процесса. Классическая теорема Пуассона и ее обобщение (оценка погрешности аппроксимации) для набора независимых бинарных величин, имеющих, вообще говоря, разные распределения. |
| Тема 10 | Интеграл Лебега (математическое ожидание) и его свойства. Теорема о монотонной сходимости. Переход к интегрированию по новой мере. |
| Тема 11 | Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенства Маркова и Чебышева. Пространство Lp. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса. Теорема Эрдеша-Реньи. |
| Тема 12 | Сходимость случайных величин (почти наверное, по вероятности, в пространстве Lp, по распределению). Связи между этими типами сходимости. Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. |
| Тема 13 | Закон больших чисел Бернулли и его обобщения. Усиленный закон больших чисел для попарно независимых величин, дисперсии которых ограничены некоторой константой. |
| Тема 14 | Усиленный закон больших чисел Этемади (для попарно независимых одинаково распределенных величин). Теорема Колмогорова. |
| Тема 15 | Теорема Фубини. Формула интегрирования по частям в интеграле Лебега-Стилтьеса. |
| Тема 16 | Характеристические функции (вероятностных мер на евклидовых пространствах) и их свойства. Формула обращения для характеристической функции. |
| Тема 17\* | Симметризация случайных величин. Неравенства для распределений сумм независимых симметричных слагаемых. Теорема Хинчина (критерий справедливости закона больших чисел для независимых одинаково распределенных слагаемых). |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к устному зачету)*

1.Модели случайных экспериментов. Примеры. Системы подмножеств непустого множества (алгебры, сигма-алгебры, пи- и лямбда-системы).

Борелевская сигма-алгебра. Теорема о пи-лямбда-системах.

2. Мера. Вероятностное пространство. Частотная интерпретация вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Биномиальное, пуассоновское и геометрическое распределения. Классическое определение вероятности.

3. Свойства вероятности. Вероятность на алгебре подмножеств некоторого множества. Счетная аддитивность, конечная аддитивность и непрерывность в «нуле» (пустом множестве).

4. Единственность продолжения вероятности с пи-системы на наименьшую сигма-алгебру, порожденную этой пи-системой. Пополнение вероятностного пространства.

5. Функция распределения вероятности на прямой (снабженной борелевской сигма-алгеброй) и ее свойства. Понятие плотности распределения (с использованием интеграла Римана для кусочно-непрерывных функций). Основные распределения (равномерное, экспоненциальное, нормальное, Коши).

6. Теорема Каратеодори.

7. Построение вероятности на на прямой (снабженной борелевской сигма-алгеброй) по функции, обладающей свойствами функции распределения.

8. Условная вероятность. Независимость событий (попарная и в совокупности). Независимость сигма-алгебр, порожденных независимыми пи-системами. Лемма о группировке.

9. Вероятностное доказательство формулы Эйлера в теории чисел.

10. Лемма Бореля -- Кантелли. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.

11. Случайные величины (элементы) и их распределения. Действия над случайными величинами. Независимые случайные величины. Независимость борелевских функций, берущихся от непересекающихся наборов системы независимых величин.

12. Модель пуассоновского точечного пространственного процесса.

13. Классическая теорема Пуассона и ее обобщение (оценка погрешности аппроксимации) для набора независимых бинарных величин, имеющих, вообще говоря, разные распределения.

14. Интеграл Лебега (математическое ожидание) и его свойства. Теорема о монотонной сходимости. Переход к интегрированию по новой мере.

15. Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенства Маркова и Чебышева. Пространство L^p.

16. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса.

17. Теорема Эрдеша-Реньи.

18. Сходимость случайных величин (почти наверное, по вероятности, в пространстве L^p, по распределению). Связи между этими типами сходимости.

19. Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

20. Закон больших чисел Бернулли и его обобщения. Усиленный закон больших чисел для попарно независимых величин, дисперсии которых ограничены некоторой константой.

21. Усиленный закон больших чисел Этемади (для попарно независимых одинаково распределенных величин). Теорема Колмогорова.

22. Теорема Фубини.

23. Формула интегрирования по частям в интеграле Лебега-Стилтьеса.

24. Характеристические функции (вероятностных мер на евклидовых пространствах) и их свойства.

25. Формула обращения для характеристической функции.

26. Симметризация случайных величин. Неравенства для распределений сумм независимых симметричных слагаемых.

27. Теорема Хинчина (критерий справедливости закона больших чисел для независимых одинаково распределенных слагаемых).

*Экзаменационные билеты формируются в виде двух вопросов из указанного списка и одной задачи*

**Образцы билетов**

**Билет №1**

1.Модели случайных экспериментов. Примеры. Системы подмножеств непустого множества (алгебры, сигма-алгебры, пи- и лямбда-системы).

Борелевская сигма-алгебра. Теорема о пи-лямбда-системах.

2. Закон больших чисел Бернулли и его обобщения. Усиленный закон больших чисел для попарно независимых величин, дисперсии которых ограничены некоторой константой.

**Задача.** Построить n зависимых случайных величин таких, что любое подмножество этого семейства мощности k, где 1<k<n, состоит из независимых величин.

**Билет №2**

1.Мера. Вероятностное пространство. Частотная интерпретация вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Биномиальное, пуассоновское и геометрическое распределения. Классическое определение вероятности.

2. Классическая теорема Пуассона и ее обобщение (оценка погрешности аппроксимации) для набора независимых бинарных величин, имеющих, вообще говоря, разные распределения.

**Задача.** Найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин, одна из которых имеет равномерное распределение на отрезке [-2,4], а другая принимает значения -4 и 1 соответственно с вероятностями ¾ и ¼.

**Билет №3**

1.Свойства вероятности. Вероятность на алгебре подмножеств некоторого множества. Счетная аддитивность, конечная аддитивность и непрерывность в «нуле» (пустом множестве).

2. Теорема Хинчина (критерий справедливости закона больших чисел для независимых одинаково распределенных слагаемых).

**Задача.** Найти распределение суммы n независимых случайных величин, каждая их которых имеет распределение Пуассона (со своим параметром).

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсовинформационно-телекоммуникационнойсети «Интернет»:

**Основная литература:**

[1] В.Феллер. Введение в теорию вероятностей, т. 1,2. Мир, 1984.

[2] А.Н.Ширяев. Вероятность, т.1,2. МЦНМО, 2007.

[3] J.Jacod, Ph.Protter. Probability Essentials. Springer, 2000.

[4] O.Kallenberg. Foundations of Modern Probability. Springer, 2002.

**Дополнительная литература:**

[5] А.А.Боровков. Теория вероятностей. УРСС, 2009.

[6] Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей. УРСС, 2006.

[7] Л.Б.Коралов, Я.Г.Синай. Теория вероятностей и случайные процессы. МЦНМО, 2013.

[8] А.Н.Ширяев. Задачи по теории вероятностей. МЦНМО, 2006.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html