**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории случайных процессов.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию случайных процессов, комплексный анализ, функциональный анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, комплексного анализа, функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. «Случайные графы: дополнительные главы»
2. Преподаватель – доц. Д.А. Шабанов
3. Аннотация курса: курс посвящен современной теории случайных графов. Изучаются вопросы о наличии больших структур в случайном графе (больших путей, паросочетаний и циклов), асимптотическое поведение числа независимости и хроматического числа случайного графа, теория квазислучайных графов, эволюция случайного подграфа случайного графа, законы нуля или единицы для случайных графов.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Совершенные паросочетания в случайном графе |
| Тема 2 | Теорема о наличии больших путей в случайном графе |
| Тема 3 | Гамильтоновы циклы в случайном графе |
| Тема 4 | Неравенства для концентрации вероятностных мер |
| Тема 5 | Независимые множества в случайном графе, поведение числа независимости в плотном случайном графе |
| Тема 6 | Число независимости в динамической модели случайного графа |
| Тема 7 | Хроматическое число случайного графа |
| Тема 8 | Концентрация значения хроматического числа случайного графа в нескольких значениях |
| Тема 9 | Метод интерполяции, поведение числа независимости в разреженном случайном графе |
| Тема 10 | Квазислучайные графы, теорема об эквивалентных определениях |
| Тема 11 | Фазовый переход в случайном подграфе квазислучайного графа |
| Тема 12 | Свойства первого порядка в случайных графах, законы нуля или единицы в плотных случайных графах |
| Тема 13 | Теорема Эренфойхта, критерий справедливости закона нуля или единицы |
| Тема 14 | Законы нуля или единицы в случайном разреженном графе, расширения в случайных графах |
| Тема 15 | Теорема Спенсера и Шелаха |
| Тема 16 | Мартингальный подход к анализу размера наибольшей компоненты в случайном разреженном графе |
| Тема 17\* | Центральная предельная теорема для размера гигантской компоненты в случайном графе |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена*

1. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе G(n,p) совершенного паросочетания.
2. Пути и маршруты в графах. Теорема о длине максимального пути в случайном графе G(n,p). Понятие случайного двухцветного мультиграфа G(n,r,r), алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
3. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства для малых подмножеств U в случайном графе G(n,p). Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа G(n,p) при условии , где .
4. Неравенства концентрации в теории вероятностей. FKG-неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы-Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.
5. Независимые множества в случайном графе. Число независимости и его асимптотическое поведение при p=const. Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа .
6. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа G(n,p) с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа для случая p=const. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа G(n,p) в общем случае (б/д).
7. Независимые множества G(n,p) в случае p=c/n. Метод интерполяции и закон больших чисел для .
8. Квазислучайные графы. Матрица смежности графа и ее собственные значения. Оценки числа ребер между двумя подмножествами вершин с помощью спектрального радиуса в регулярных графах. Теорема Грэма-Чанг-Уилсона об эквивалентных определениях квазислучайной последовательности графов.
9. Случайные подграфы неполных графов. Теорема о фазовом переходе в случайном подграфе (n,d,λ)-графа.
10. Свойства первого порядка в случайных графах. Законы нуля или единицы при . Теорема Эренфойхта, критерий справедливости закона нуля или единицы.
11. Законы нуля или единицы в случайном графе при . Расширения в случайных графах. Теорема Спенсера-Шелаха.
12. Центральная предельная теорема для размера гигантской компоненты в случайном графе G(n,p) при p=c/n, c>1.

*Экзаменационные билеты формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

А. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства для малых подмножеств U в случайном графе G(n,p). Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа G(n,p) при условии , где .

Б. Случайные подграфы неполных графов. Теорема о фазовом переходе в случайном подграфе (n,d,λ)-графа.

В. Пусть , *c* - фиксировано. С помощью неравенства Янсона докажите, что тогда с вероятностью 1-o(1/ln n) случайный граф содержит цикл длины .

Билет №2.

А. Неравенства концентрации в теории вероятностей. FKG-неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы-Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.

Б. Независимые множества G(n,p) в случае p=c/n. Метод интерполяции и закон больших чисел для .

В. Докажите, что в графовом случайном процессе с вероятностью, стремящейся к 1, моменты исчезновения последней изолированной вершины и появления совершенного паросочетания совпадают.

Билет №3

А. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе G(n,p) совершенного паросочетания.

Б. Свойства первого порядка в случайных графах. Законы нуля или единицы при . Теорема Эренфойхта, критерий справедливости закона нуля или единицы.

В. Докажите, что свойство двудольности случайного графа не имеет точной пороговой вероятности.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

1) B. Bollobas, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

2) S. Jansen, T. Luczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

3) Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

4) T. Luczak, B. Pittel, J. Wierman, *The structure of a random graph at the point of phase transition*, Transactions of the American Mathematical Society, т. 341 №2, 1994, с. 721-748.

5) A. Frieze, M. Krivelevich, R. Martin, *The emergence of a giant component in random subgraphs of pseudo-random graphs*, Random Structures and Algorithms, т. 24 №1, 2004, с. 42-50.

6) M. Bayati, D. Gamarnik, P. Tetali, *Combinatorial approach to the interpolation method and scaling limits in sparse random graphs*, Annals of Probability, т.41 №6, 2013, с. 4080-4115.

7) B. Bollobas, O. Riordan, *Asymptotic normality of the size of the giant component via a random walk*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, т.102 №1, 2012, с. 53-61.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html