**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей**

**Протокол № 6 от 18 ноября 2015 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Избранные главы теории вероятностей.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру и геометрию, действительный анализ, теорию вероятностей.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры и геометрии, действительного анализа, теории вероятностей и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. «Элементы стохастического исчисления: дополнительные главы»
2. Преподаватель – проф. А.А. Гущин
3. Аннотация курса: специальный курс для студентов посвящен теории стохастического интегрирования по семимартингалам. Излагаются необходимые реквизиты для определения стохастического интеграла по семимартингалам от предсказуемых интегрантов из максимально широкого класса. В частности, рассматриваются стохастические интегралы по локальным мартингалам, формула Ито, стохастическая экспонента. В завершение курса вводятся σ-мартингалы и доказывается теорема Анселя-Стрикера.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Разложение Дуба-Мейера: необходимые условия существования и единственность. |
| Тема 2 | Разложение Дуба-Мейера: достаточные условия существования. |
| Тема 3 | Квадратично интегрируемые мартингалы. |
| Тема 4 | Устойчивые подпространства. |
| Тема 5 | Чисто разрывные локальные мартингалы. |
| Тема 6 | Характеризация процесса скачков локального мартингала. |
| Тема 7 | Стохастический интеграл по квадратично интегрируемым мартингалам. |
| Тема 8 | Стохастический интеграл по локальным мартингалам. |
| Тема 9 | Семимартингалы. |
| Тема 10 | Стохастический интеграл по семимартингалам (локально ограниченный случай). |
| Тема 11 | Формула Ито. |
| Тема 12 | Формулы интегрирования по частям. |
| Тема 13 | Стохастическая экспонента. |
| Тема 14 | Стохастический интеграл по семимартингалам (общий случай). Простейшие свойства. |
| Тема 15 | Стохастический интеграл по семимартингалам (общий случай). Специальные свойства. |
| Тема 16 | σ-мартингалы. |
| Тема 17\* | Теорема Анселя-Стрикера. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

*Программа экзамена (или вопросы к зачету)*

1. Разложение Дуба-Мейера: необходимое условие существования разложения в сумму мартингала и возрастающего процесса; достаточные условия разложения в сумму равномерно интегрируемого мартингала и предсказуемого интегрируемого возрастающего процесса.
2. Разложение Дуба-Мейера: достаточные условия разложения в сумму мартингала и предсказуемого возрастающего процесса. Разложение в сумму локального мартингала и предсказуемого возрастающего процесса. Единственность разложений.
3. Определение квадратично интегрируемого мартингала. Квадратическая характеристика и взаимная квадратическая характеристика. Слабая и сильная ортогональность. Преобразование взаимной квадратической характеристики при остановке одного из мартингалов.
4. Устойчивые подпространства квадратично интегрируемых мартингалов. Теорема об устойчивости ортогонального дополнения.
5. Основные примеры устойчивых подпространств (непрерывные квадратично интегрируемые мартингалы, чисто разрывные квадратично интегрируемые мартингалы, чисто разрывные квадратично интегрируемые мартингалы со скачком в фиксированный момент остановки).
6. Определение чисто разрывного локального мартингала. Связь с чисто разрывными квадратично интегрируемыми мартингалами и с мартингалами ограниченной вариации. Разложение локального мартингала в сумму непрерывного и чисто разрывного локальных мартингалов. Квадратическая вариация локального мартингала.
7. Неравенство Буркхольдера-Дэвиса-Ганди (без доказательства). Характеризация процесса скачков локального мартингала.
8. Определение стохастического интеграла по квадратично интегрируемому мартингалу. Характеризация стохастического интеграла. Свойства стохастического интеграла (линейность, разложение на непрерывную и чисто разрывную компоненты, ассоциативность, связь с интегралом Лебега-Стилтьеса).
9. Устойчивые подпространства, порожденные одним квадратично интегрируемым мартингалом. Пример, когда сумма двух таких устойчивых подпространств не является замкнутым подпространством.
10. Определение стохастического интеграла по локальному мартингалу. Свойства стохастического интеграла (линейность, разложение на непрерывную и чисто разрывную компоненты, ассоциативность). Теорема о связи с интегралом Лебега-Стилтьеса и контрпримеры.
11. Семимартингалы и специальные семимартингалы. Достаточное условие для того, чтобы семимартингал был специальным. Непрерывная мартингальная компонента семимартингала. Квадратическая вариация и квадратическая ковариация семимартингала.
12. Стохастический интеграл по семимартингалу от локального ограниченного предсказуемого процесса. Свойства стохастического интеграла (линейность, непрерывная мартингальная компонента, квадратическая вариация). Теорема о предельном переходе под знаком стохастического интеграла.
13. Формула Ито для дважды непрерывно дифференцируемой функции от векторного семимартингала. Случай функции, определенной на полупрямой.
14. Формула интегрирования по частям, включая специальные случаи, когда один из процессов имеет ограниченную вариацию, или, дополнительно, является предсказуемым.
15. Определение стохастической экспоненты. Теорема о существовании и единственности соответствующего стохастического дифференциального уравнения. Свойства стохастической экспоненты (сохранение свойства мартингальности и предсказуемости, неотрицательность решения, формула Йора). Стохастический логарифм.
16. Стохастический интеграл по семимартингалам для предсказуемых интегрантов, не обязательно обладающих свойством локальной ограниченности. Свойства стохастического интеграла (линейность по интегратору, квадратическая вариация). Необходимое и достаточное условие для того, чтобы интеграл по специальному семимартингалу был специальным семимартингалом.
17. Стохастический интеграл по семимартингалам для предсказуемых интегрантов, не обязательно обладающих свойством локальной ограниченности: линейность по интегранту и ассоциативность стохастического интеграла; связь с интегралами по процессам ограниченной вариации и по локальным мартингалам.
18. Эквивалентные определения σ-мартингала. Пример σ-мартингала, не являющегося локальным мартингалом. Теорема о замкнутости класса σ-мартингалов при стохастическом интегрировании.
19. Достаточное условие для того, чтобы σ-мартингал был локальным мартингалом. Теорема Анселя-Стрикера.

*Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде одного вопроса (А) из указанного списка и одной задачи (Б), примеры задач см. далее.*

Образцы билетов.

Билет №1.

А. Определение квадратично интегрируемого мартингала. Квадратическая характеристика и взаимная квадратическая характеристика. Слабая и сильная ортогональность. Преобразование взаимной квадратической характеристики при остановке одного из мартингалов.

Б. Докажите, что непрерывный семимартингал с нулевой непрерывной мартингальной составляющей неразличим с процессом ограниченной вариации.

Билет №2.

А. Формула Ито для дважды непрерывно дифференцируемой функции от векторного семимартингала. Случай функции, определенной на полупрямой.

Б. Найти разложение Дуба-Мейера субмартингала с независимыми приращеиями.

Билет №3

А. Эквивалентные определения σ-мартингала. Пример σ-мартингала, не являющегося локальным мартингалом. Теорема о замкнутости класса σ-мартингалов при стохастическом интегрировании.

Б. Привести пример чисто разрывного локального мартингала, выходящего из 0, но не являющегося процессом ограниченной вариации.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Основная литература:

1) Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Москва, Физматлит, 2003.

2) Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Москва, Физматлит, 1994.

3) Ширяев А.Н., Черный А.С. Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража. Труды МИАН, том 237, 2002, с. 12-56.

4) Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения, Москва, Мир, 1986.

5) Gushchin A. A. Stochastic Calculus for Quantitative Finance. London/Kidlington: ISTE/Elsevier, 2015.

Дополнительная литература:

1) Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1976.

2) Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

3) Cohen S. N., Elliott R. J. Stochastic Calculus and Applications. New York: Springer, 2015.

4) He S. W., Wang J. G., Yan J. A. Semimartingale Theory and Stochastic Calculus. Boca Raton: CRC Press, 1992.

5) Medvegyev P. Stochastic Integration Theory. Oxford: Oxford University Press, 2007.

6) Protter P. E. Stochastic Integration and Differential Equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

http://lib.mexmat.ru/

<http://elibrary.ru/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.sciencedirect.com/>

<http://www.ams.org/mathscinet/>

http://new.math.msu.su/department/probab/index-k.html