Задачи к экзамену по курсу «Теория случайных процессов»

осень 2012

1. Найдите производящую функцию числа частиц в n-м поколении, если производящая функция числа потомков одной частицы равна

   а) $pz + 1 - p$, б) $(1-p)/(1-pz)$, в) $1 - p(1-z)^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

2. Пусть ξ — число потомков частицы в ветвящемся процессе Гальтона-Ватсона $(X_n, n \geq 0)$. Обозначим $\mathsf{E}\xi = \mu$, $\mathsf{D}\xi = \sigma^2$. Найдите $\mathsf{E}X_n$ и $\mathsf{D}X_n$.

3. Пусть T — бесконечное множество, а $N(T)$ — множество всех счетных подмножеств T. Докажите, что тогда цилиндрическая σ-алгебра $\mathcal{B}_T$ удовлетворяет равенству

$$\mathcal{B}_T = \bigcup_{U \in N(T)} \mathcal{B}_U,$$

   где $\mathcal{B}_U = \otimes_{t \in U} \mathcal{B}_t$ — цилиндрическая σ-алгебра на U.

4. Пусть $T = [0,1]$ и для любого $t \in T$ $(S_t, \mathcal{B}_t) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Тогда пространство траекторий $S = \times_{t \in T} S_t$ есть пространство функций на $[0,1]$. Докажите, что множество непрерывных функций $C[0,1]$ не является элементом цилиндрической σ-алгебры $\mathcal{B}_T$.

5. Задан процесс $\{Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j,\ t \geq 0\}$, где $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие также от пуассоновского процесса $N = \{N_t, t \geq 0\}$ интенсивности λ. Докажите, что процесс Y_t имеет независимые приращения.

6. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите предел п.н. N_t/t при $t \to +\infty$.

7. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ — пуассоновский процесс с ведущей мерой m, причем траектории N_t непрерывны справа. Известно, что $m(\{t\}) = 0$ для любого $t \geq 0$. Докажите, что с вероятностью 1 процесс N_t имеет скачки только единичного размера.

8. Пусть последовательность гауссовских векторов $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ размерности m сходится к вектору ξ в L^2, $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$. Докажите, что ξ — тоже гауссовский вектор.

9. Гауссовский процесс $(X_t, t \geq 0)$ имеет нулевую функцию среднего и ковариационную функцию $R(s,t) = e^{-\max(s,t)} - e^{-(s+t)}$. Докажите, что такой процесс существует. Докажите, что процесс $Y_t = (t+1) X_{\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)}\, I\{t > 0\}$ является винеровским.

10. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что следующие процессы тоже винеровские

    а) $X_t = t\ W_{1/t} I\{t > 0\}$, б) $X_t = \sqrt{c}\ W_{t/c}$, $c > 0$, в) $X_t = W_{t+a} - W_a$, $a > 0$, г) $X_t = W_t\, I\{t < T\} + (2W_T - W_t) I\{t \geq T\}$.

11. Докажите, что винеровский процесс $(W_t, t \geq 0)$ с вероятностью 1 является функцией неограниченной вариации на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$.

12. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau_y = \min\{t : \ W_t = y\}$ для $y > 0$. С помощью теоремы Башелье найдите плотность случайной величины τ_y, а также $\mathsf{E}\tau_y$.

13. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Вычислите $\mathsf{D}(\max\limits_{t\in[1,3]} W_t)$.

14. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, а $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Докажите, что
$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k, \quad \max_{k=1,\ldots,m} \tau_k, \quad \min_{k=1,\ldots,m} \tau_k$$
тоже являются марковскими моментами относительно $\mathbb{F}$.

15. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — случайный процесс с непрерывными справа траекториями. Пусть $I = [a, b]$, где $0 < a < b$. Введем обозначения: $\tau = \inf\{t : \ X_t \in I\}$, $\tau = \sup\{t : \ X_t \in I\}$. Являются ли τ и σ марковскими моментами относительно $\mathbb{F}^X$ — естественной фильтрации процесса X_t, если а) X_t — винеровский процесс, б) X_t — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$?

16. Дана фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ и марковские моменты τ и σ относительно нее. Для τ определим сигма-алгебру $\mathcal{F}_\tau$: $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \ \forall\, t \geq 0 \quad \{\tau \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t\}$. Докажите, что если $\tau \leq \sigma$, то $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.

17. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с конечным математическим ожиданием. Найдите $\mathsf{E}(X_1 | \sum_{i=1}^{n} X_i)$.

18. Пусть (X, Y) — гауссовский вектор, $(X, Y) \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$. Найдите $\mathsf{E}(e^X | Y)$ и $\mathsf{E}(X | X + Y)$.

19. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$. Найдите $\mathsf{E}(X_1 | X_{(1)})$ и $\mathsf{E}(X_1 | X_{(n)})$, где $X_{(1)} = \min\limits_i X_i$ и $X_{(n)} = \max\limits_i X_i$.

20. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, что процесс
$$X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\}, \ t \geq 0$$
является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

21. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^3 - 3tW_t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

22. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, построенный по случайной величине ξ. Известно, что $\mathsf{E}\xi = \mu$. Докажите, что процесс $Y_n = X_n/(\mu)^n$ является мартингалом относительно своей естественной фильтрации.

23. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $\tau_x = \min\{t : \ W_t = x\}$ для $x \geq 0$. Докажите, что процесс $\tau = (\tau_x, x \geq 0)$ является марковским.

24. Пусть $(X_t, t \in T)$ — действительный марковский процесс, $T \subset \mathbb{R}_+$. Пусть для любого $t \in T$ задана борелевская функция h_t. Рассматривается случайный процесс $Y_t = (h_t(X_t), t \in T)$. Докажите, что если h_t — биекция для любого $t \in T$ (считаем, что в этом случае h_t^{-1} — тоже борелевская), то Y_t — тоже марковский процесс.

    Приведите пример марковского процесса X_t и функций h_t, при которых процесс Y_t не является марковским.

25. Докажите, что пуассоновский процесс $(N_t, t \geq 0)$ интенсивности λ является однородной марковской цепью. Найдите его переходные вероятности и инфинитезимальную матрицу.

26. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Процесс $(X_t, t \geq 0)$ задан следующим образом: $X_t = N_t \mod 2$. Является ли процесс X_t однородной марковской цепью? Если да, то найдите его инфинитезимальную матрицу и стационарное распределение.

27. Пусть $n \times n$ матрица $Q = (q_{ij})$ такова, что $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что тогда матрицы $P(t) = \exp\{tQ\}$ образуют стохастическую полугруппу.

28. Переходные вероятности марковской цепи с фазовым пространством $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ имеют вид:

    $p_{11}(h) = 1 - \lambda h + o(h)$, $p_{12}(h) = \lambda h + o(h)$, $p_{13}(h) = o(h)$ при $h \to 0+$;

    $p_{21}(h) = o(h)$, $p_{22}(h) = 1 - \mu h + o(h)$, $p_{23}(h) = \mu h + o(h)$ при $h \to 0+$;

    $p_{31}(h) = \nu h + o(h)$, $p_{32}(h) = o(h)$, $p_{33}(h) = 1 - \nu h + o(h)$ при $h \to 0+$.

    Докажите, что такая цепь удовлетворяет условию эргодической теоремы. Найдите ее инфинитезимальную матрицу и стационарное распределение.

29. Являются ли пуассоновский процесс $(N_t, t \geq 0)$ и винеровский процесс $(W_t, t \geq 0)$ дифференцируемыми а) по вероятности, б) в среднем квадратичном?

30. Пусть W_t — винеровский процесс. Найдите распределение случайной величины $X_t = \int_0^t W_s ds$. Докажите, что процесс $(X_t, t \geq 0)$ является гауссовским.

31. Задан случайный процесс $X_t = \frac{d}{dt}\left(e^{N_t}\right)$, где N_t — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Найдите $\mathsf{E}X_t$ и ковариационную функцию процесса X_t.

32. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, а случайная величина η не зависит от N, причем $\mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = 1/2$. Является ли процесс $X_t = \eta(-1)^{N_t}$ стационарным, и в каком смысле?

33. Пусть f — периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом $T > 0$. Случайная величина ξ равномерно распределена на $[0, T]$. Случайный вектор (ζ, η) не зависит от ξ. Докажите, что процесс $X_t = \zeta f(\eta t + \xi)$ стационарен в узком смысле.

34. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R})$ — непрерывный в среднем квадратичном, стационарный в широком смысле, центрированный процесс. Является ли стационарным в широком смысле процесс
$$Y_t = X_{t+1} - 2\int_t^{t+1} X_s\, ds?$$

35. Пусть X_t — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s,t) = a\, e^{-b|s-t|}$, $a, b > 0$. Докажите, что такой процесс существует и найдите его спектральную плотность.

36. Пусть Λ — множество, $\mathcal{A}$ — алгебра его подмножеств, а μ — мера на $\mathcal{A}$. Пусть отображение $Z : \mathcal{A} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ удовлетворяет равенству
$$\mathsf{E}Z(B)Z(C) = \mu(B \cap C) \text{ для любых } B, C \in \mathcal{A}.$$
Докажите, что Z есть ортогональная мера на $\mathcal{A}$.

37. Пусть $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — белый шум. Положим

$$X_n = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{4}\,\varepsilon_{n-2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Вычислите спектральную плотность процесса X_n.

38. Случайный процесс $(X_t, t \in \mathbb{R})$ является центрированным и стационарным в широком смысле. Его спектральная плотность равна $f(\lambda) = |\lambda|^3\, I_{[-1,1]}(\lambda)$. Используя спектральное представление, найдите спектральную плотность процесса Y_t, удовлетворяющего уравнению $\frac{d^4}{dt^4} Y_t - 3Y_t = X_t$. Вычислите $\mathsf{D}Y_4$.

39. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Положим $Y_t = \int_1^t (W_{\sqrt{s}}) dW_s$. Вычислите ковариационную функцию процесса Y_t.

40. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Положим $Y_t = \int_0^t (W_s)^2\, dW_s$. Вычислите $cov(Y_{2t}, W_t)$.