

Вопросы к экзаменам
Случайные процессы 2009/2010гг.

лектор — профессор Булинская Е.В.

Обязательный курс для студентов 3 курса механико-математического факультета,
6 семестр, экзамен

1. Понятие случайного элемента со значениями в измеримом пространстве. Распределение случайного элемента.
2. σ -алгебра \mathcal{B}^T . Два определения случайного процесса, их эквивалентность.
3. Конечномерные распределения, условия симметрии и согласованности. Траектории (выборочные функции) случайного процесса. Семейство конечномерных распределений однозначно определяет меру любого борелевского множества выборочного пространства R^T .
4. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданным семейством конечномерных распределений.
5. Гауссовские случайные процессы. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданными средним и ковариационной функцией.
6. Процессы с независимыми приращениями. Эквивалентность двух определений винеровского процесса.
7. Пуассоновский процесс. Конструкция пуассоновского процесса по семейству независимых показательно распределенных случайных величин с параметром λ .
8. Стационарность в узком и широком смысле, связь между ними.
9. Эквивалентность случайных процессов.
10. Различные понятия непрерывности случайных процессов, связь между ними.
11. Необходимые и достаточные условия существования эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.
12. Теорема Колмогорова (достаточное условие существования непрерывной модификации). Условие для гауссовского процесса.
13. Конструкция винеровского процесса в виде суммы ряда из гауссовских случайных величин.
14. Понятие сепарабельности. Теорема о существовании эквивалентного процесса с неубывающими траекториями (без доказательства).
15. Поток σ -алгебр. Эквивалентные определения марковского процесса. Семейства линейных операторов, связанных с переходной функцией.
16. Феллеровские марковские семейства. Теорема существования.
17. Диффузионные процессы. Обратное уравнение Колмогорова.
18. Диффузионные процессы. Прямое уравнение Колмогорова.

19. Необходимое и достаточное условие того, что функция $R(t, s)$ является корреляционной. Необходимые и достаточные условия сходимости в среднем квадратичном.
20. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости процессов в среднем квадратичном.
21. Случайные меры. Связь ортогональных случайных мер и процессов с ортогональными приращениями, непрерывными в среднем квадратичном. Структурная мера.
22. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере и его свойства.
23. Теорема Бохнера-Хинчина.
24. Теорема Карунена. Теорема о спектральном разложении стационарного в широком смысле процесса.
25. Линейные преобразования стационарного в широком смысле процесса. Импульсная переходная функция и частотная характеристика. Допустимый фильтр, физически осуществимый фильтр.
26. Марковское и строго марковское свойство винеровского процесса.
27. Разложение Вольда.
28. Принцип отражения для винеровского процесса. Недифференцируемость траекторий.
29. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Преобразования, сохраняющие субмартингальность. Теорема Дуба-Мейера (дискретное время)
30. Неравенства Дуба для субмартингалов.
31. Мартингалы и субмартингалы с непрерывным временем. Отсутствие разрывов второго рода у сепарабельных субмартингалов. Условие конечности $\sup_{t \in T} X_t$.
32. Стохастический интеграл Ито и его свойства.
33. Формула замены переменных Ито.
34. Стохастические дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности сильного решения.
35. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения. Решение стохастического дифференциального уравнения – диффузионный процесс. (без доказательства)