Дисконтирование активов в современной экономике
Discounting in The New World

Владимир Питербарг

Barclays

1 Уравнение Блэка-Шоулза (в докризисной экономике)

- Безрисковый денежный счёт с безрисковой ставкой r
- Модель рыночной цены акции

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW.$$

- Опцион $V(S_t, t)$
- Лемма Ито для опционов

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS$$

- Репликация на интервале $[t, t + dt]$ с использованием акции и денежной позиции. Портфель

$$\Pi = \Delta S + \beta$$

  - Позиция по акции: $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
  - Позиция по деньгам: самофинансируемая

$$dV = d\Pi = \Delta dS + r\beta dt$$

- Таким образом, денежная позиция равна

$$\beta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)$$

2 Уравнение Блэка-Шоулза

- Формирование реплицирующего портфеля на финальную дату,

$$V\left(S_T, T\right) = \Pi_T$$

- Из условия самофинансируемости следует, что

$$\begin{aligned} V\left(S_t, t\right) &= \Pi_t = \Delta S + \beta \\ &= S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) \end{aligned}$$

- Перегруппировывая, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV.$$

- Можно получить, если начать со стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} dS &= rS\,dt + \sigma S\,dW^Q, \\ V\left(S_t, t\right) &= \mathrm{E}^Q\left(e^{-\int_t^T r\,ds} V\left(S_T, T\right) \Big|\, t, S_t\right). \end{aligned}$$

  Здесь Q – *риск-нейтральная* вероятность.

- Нет необходимости знать μ

3 Что ошибочно в Блэке-Шоулзе

- Где этот безрисковый счёт на кредитном рынке?
  - Дать деньги другому банку?
  - Государственные облигации?
- В современной экономике нет аналога классическому безрисковому счёту
- Как построить теорию ценообразования без безрисковой ставки?
- Теория ценобразования на активы обычно начинается с активов, по которым не выплачиваются дивиденды и выплатой в момент погашения. Соответствует ли это тому, как выглядят активы в современной экономике?

4 Снижение кредитного риска в трейдинге на внебиржевом рынке

- Внебиржевой (двусторонний) трейдинг регулируется юридическими документами, основной из которых – Генеральное соглашение Международной ассоциации свопов и деривативов (ISDA)
- Его часть – Договор об уплате маржевых сумм (Credit Support Annex, CSA) – определяет методы снижения кредитного риска (credit risk mitigation) в форме предоставления обеспечения
- В общих чертах, CSA устанавливает, что если сторона A обещает выплаты в будущем стороне B, то она должна предоставить обеспечение на эту сумму сейчас
- Т.е., если A объявляет дефолт, B может забрать это обеспечение
- Также CSA устанавливает другое важное средство сокращения кредитного риска, как взаимное погашение обязательств (неттинг). Если A даёт в долг B по одному контракту, а B даёт в долг A по какому-нибудь другому контракту, то они могут быть снеттированы в случае дефолта (отличным от традиционного законодательства по банкротству способом, но это уже другой вопрос)
- Будучи двусторонними соглашениями, CSA отличаются друг от друга, и CSA устанавливает:

– допустимое обеспечение (наличность в разных валютах, облигации);
– процентную ставку (обычно сторона, которой передается обеспечение, платит определенный процент «владельцу» обеспечения);
– частоту предоставления обеспечения (например, ежедневно);
– пороговые значения.

5 Залоговые активы

- Рассмотрим механику торговли с обеспечением.
- Сторона А продает опцион call стороне В.
- Сторона В платит $V(0)$ долларов стороне А.
- А обязуется выплатить стороне В предусмотренное опционом вознаграждение в момент истечения срока действия.
- Всякое обязательство должно быть обеспечено. Стороне А необходимо внести обеспечение. В каком размере?
- В размере стоимости опциона, т.е. $V(0)$ долларов! Они возвращаются обратно стороне В.
- Стоимость опциона меняется во времени. В зависимости от её движения сторона А обязана довнести обеспечение или сократить его
- Сторона В заплатит стороне А согласованную ставку overnight по внесенному обеспечению.
- В любой момент времени t суммарный объем обеспечения, внесенный стороной А, составит $V(t)$, что равно стоимости опциона в указанный день

6 Залоговые активы

- Отметим, что в любой момент времени опцион может быть расторгнут, а обеспечение сохранено – обеспечение полностью покрывает стоимость опциона опциона.
- В частности, в дату экспирации опциона сторона B просто сохранит внесенное обеспечение, а стороне A не потребуется больше ничего вносить.
- Значительное отличие от классической ситуации.
- См. подробнее [Pit12].

7 Инструменты хеджирования

- Торговля «денежными» хеджирующими инструментами (акциями, облигациями) подходит под ту же схему.
- Где банк возьмет деньги, когда нам необходимо купить акцию?
- Занимая их и используя в качестве обеспечения только что приобретенные акции!
- Это называется операцией РЕПО.
- Ставка такого займа называется ставкой РЕПО.
- Занять деньги, купить акции.
- Акции выступают в роли обеспечения по займу.
- Получить залог обратно на следующий день.
- Вернуть сумму по кредиту с процентами (по ставке РЕПО).
- Повторить указанные действия в течение стольких дней, сколько необходимо держать акции.
- Оплата по ставке РЕПО эффективнее беззалогового кредита – процентная ставка ниже, т.к. кредитный риск отсуствует.

8 Zero-Price Dividend-Paying Assets

- Традиционная APT (Arbitrage Pricing Theory):
  - начинается с бездивидендных активов и денежного счета;
  - активы с выплатой дивидендов включены с помощью реинвестирования дивидендов в сам актив;
  - некоторые активы с выплатой дивидендов имеют нулевую цену, например, фьючерсы;
  - Подход с реинвестированием не срабатывает для фьючерсов, но они также покрываются APT за счет наличия денежного счета.
- Обеспеченные активы (и хеджирующие инструменты) – это *zero-price dividend-paying assets* (ZPDP)
  - Вход и выход возможен без затрат;
  - Дивиденды выплачиваются непрерывно (в размере ставки по обеспечению).
- Единственные активы с нулевым кредитным риском в современной экономике – это активы ZPDP
  - Нет никакого денежного счета!

  - Ни один из активов не может служить в качестве актива, через который выражается стоимость других активов (нулевая цена)

- Требуется построить APT из указанных активов

9 Активы ZPDP и отсутствие арбитража

- Актив ZPDP:
  - может быть «приобретен» бесплатно в любой момент;
  - дает его владельцу право на дивидендный поток до момента продажи актива;
  - может быть «продан» бесплатно в любой момент.
- Экономика моделируется с помощью p–мерного *процесса накопленных дивидендов* $G(t) = (G_1(t),\dots,G_p(t))^\top$ активов ZPDP.
  - $G_i(t)$ – суммарная дивидендная выплата по активу i за период времени $[0, t]$.
- Торговая стратегия – предсказуемый процесс $\phi(t) = (\phi_1(t),\dots,\phi_p(t))^\top$, где ϕ_i –количество i-го актива в момент времени t.
  - Для определенности рассматриваются лишь торговые стратегии, которые в точности равны нулю после некоторого момента времени, т.е. найдется T такое, что $\phi(t) \equiv 0$ для $t \geq T$

10 Активы ZPDP и отсутствие арбитража

- Суммарный доход стратегии H^ϕ задается формулой

$$H^\phi = \int_0^\infty \phi(t)^\top \, dG(t)$$

- Поскольку вход и выход в позицию осуществляется по нулевой цене, арбитражная возможность в данной экономике определяется как существование такой стратегии ϕ, что

$$H^\phi \geq 0 \text{ a.s., и } \mathrm{P}\left(H^\phi > 0\right) > 0.$$

- Основной результат (см. [AP16]): если экономика не допускает арбитража, то существует эквивалентная мартингальная мера Q такая, что G – это Q-мартингал.
  - Вероятно результат может быть получен как следствие Фундаментальной теоремы теории ценнообразования активов, однако представляется интересным детально рассмотреть данный специальный случай.

11 Доказательство основного результата

- Пусть G задано, по мере P, как

$$dG(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)$$

  - $W(t)$ – d-мерное Броуновское движение
  - $\mu(t) = \mu(t,\omega)$ – p-мерный вектор, а $\sigma(t) = \sigma(t,\omega)$ имеет размерность $p \times d$

- Суммарный доход стратегии ϕ определяется как

$$H^{\phi} = \int_0^{\infty} \phi(t)^{\top}\mu(t)\,dt + \int_0^{\infty} \phi(t)^{\top}\sigma(t)\,dW(t)$$

- Сначала в более простом случае, когда $\sigma(t)$ имеет ранг p ($d \geq p$). Мы можем найти d-мерный вектор $\theta(t)$ такой, что

$$\mu(t) = \sigma(t)\theta(t),$$

  таким образом,

$$dG(t) = \sigma(t)\theta(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t) = \sigma(t)\,\left(dW(t) + \theta(t)\,dt\right)$$

- Тогда мера Q задается теоремой Гирсанова – это мера, при которой $dW(t) + \theta(t)\,dt$ – винеровский процесс без тренда.

12 Доказательство основного результата

- В более интересном случае, когда $\sigma(t)$ имеет ранг строго меньший p. Тогда найдется p-мерный вектор $\overline{\phi} \neq 0$ такой, что

$$\overline{\phi}^\top \sigma(t) \equiv 0 \text{ п.н..} \tag{1}$$

- Торговая стратегия:

$$\phi(s) = 1_{\{t \leq s \leq t+dt\}} \left(\overline{\phi} 1_{\left\{\overline{\phi}^\top \mu(t) > 0\right\}} - \overline{\phi} 1_{\left\{\overline{\phi}^\top \mu(t) \leq 0\right\}} \right)$$

- Доходность этой стратегии:

$$\begin{aligned} H^\phi &= \int_0^\infty \phi(s)^\top \mu(s)\, dt + \int_0^\infty \phi(s)^\top \sigma(s)\, dW(s) \\ &= \overline{\phi}^\top \mu(t) \left(1_{\left\{\overline{\phi}^\top \mu(t) > 0\right\}} - 1_{\left\{\overline{\phi}^\top \mu(t) < 0\right\}} \right) dt + 0 \\ &= \left| \overline{\phi}^\top \mu(t) \right| dt \end{aligned}$$

- Условие отсутствия арбитража:

$$\overline{\phi}^\top \mu(t) = 0 \text{ a.s.} \tag{2}$$

13 Доказательство основного результата

- До сих пор мы показали, что для любого вектора $\overline{\phi}$, из $\overline{\phi}^\top \sigma(t) = 0$ следует, что $\overline{\phi}^\top \mu(t) = 0$.
- Следовательно, $\mu(t)$ is in the range of $\sigma(t)$ и существует d-мерный вектор $\theta(t)$ такой, что
$$\mu(t) = \sigma(t)\theta(t)$$
- Наконец, в случае ранга p, имеем
$$dG(t) = \sigma(t)\theta(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t) = \sigma(t)\ (dW(t) + \theta(t)\,dt)$$
- Мера Q не связана с никаким активом который выбран дисконтирующим процессом (numeraire), в отличии от традиционной APT
- Это не представляет никакой проблемы, т.к. они работают так же как и в «традиционном» случае

14 Анализ денежных потоков

Обозначения

- – $V(t)$ – цена обеспеченного актива между сторонами A и B. Если $V(t) > 0$ для A, то сторона B должна внести $V(t)$ стороне A.

  – $c(t)$ – указанная в договоре ставка обеспечения $c(t)$ на $V(t)$. Если $V(t) > 0$, то сторона A заплатит указанный размер стороне B.

Предположим, что А «покупает» некоторое количество обеспеченного актива у В.

1. Покупка актива. Величина $V(t)$ платится стороной А стороне В.
2. Обеспечение в момент времени t. Поскольку стоимость актива составляет $V(t)$, то обеспечение в размере $V(t)$ вносится стороной В стороне А.
3. Возврат обеспечения. В момент времени $t + dt$ сторона А возвращает обеспечение $V(t)$ стороне В.
4. Процентные платежи. В момент времени $t+dt$, сторона А также платит причитающиеся проценты в размере $V(t)c(t)\,dt$ стороне В.
5. Новое обеспечение. Новое переоцененное по рынку значение составляет $V(t + dt)$. Сторона В платит $V(t + dt)$ в качестве обеспечения стороне А.

Отметим, что фактически в момент времени t не происходит обмена платежами. В момент времени $t + dt$, чистый денежный поток стороне А имеет вид

$$V(t + dt) - V(t)(1 + c(t)\,dt) = dV(t) - c(t)V(t)\,dt.$$

Анализ денежных потоков

Как уже отмечалось, в момент времени $t + dt$ суммарная стоимость переоцененного актива и обеспечения для каждой стороны равна нулю, что означает, что стороны могут бесплатно расторгнуть договор (и сохранить обеспечение)

- *Обеспеченный актив – это ZPDP актив*

16 Формула ценообразования

- Экономика при p обеспеченных производных инструментов, которые могут быть как акциями, так и облигациями, с описанными договорами РЕПО
- Процессы ценообразования активов $V_1(t), \ldots, V_p(t)$, ставки обеспечения $c_1(t), \ldots, c_p(t)$, процессы с накопленными дивидендными выплатами $G_i(t)$, $i = 1, \ldots, p$
- Из предыдущего слайда следует, что

$$dG_i(t) = dV_i(t) - c_i(t)V_i(t)\,dt,\; i = 1, \ldots, p$$

- Выразим V_i через G_i:

$$\begin{aligned} d\left(e^{-\int_0^t c_i(s)\,ds}V_i(t)\right) &= -c_i(t)e^{-\int_0^t c_i(s)\,ds}V_i(t)\,dt + e^{-\int_0^t c_i(s)\,ds}dV_i(t) \\ &= -c_i(t)e^{\int_0^t c_i(s)\,ds}V_i(t)\,dt + e^{-\int_0^t c_i(s)\,ds}\left(dG_i(t) + c_i(t)V_i(t)\,dt\right) \\ &= e^{-\int_0^t c_i(s)\,ds}dG_i(t) \end{aligned}$$

и, для любого $t \leq T$,

$$e^{-\int_0^T c_i(s)\,ds}V_i(T) - e^{-\int_0^t c_i(s)\,ds}V_i(t) = \int_t^T e^{-\int_0^u c_i(s)\,ds}dG_i(u) \tag{3}$$

17 Формула ценообразования

- В силу основного результата существует риск-нейтральная мера Q, в которой все $G_i(t)$, $i = 1, \ldots, p$, – мартингалы.
- Применяя $\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}$ к (3):

$$e^{-\int_0^T c_i(s)\,ds} V_i(T) - e^{-\int_0^t c_i(s)\,ds} V_i(t) = \int_t^T e^{-\int_0^u c_i(s)\,ds} dG_i(u)$$

  и используя мартингальное свойство, приходим к основной формуле ценообразования обеспеченных деривативов:

$$V_i(t) = \mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}} \left(e^{-\int_t^T c_i(s)\,ds} V_i(T) \right), \; i = 1, \ldots, p \tag{4}$$

- Стоимость обеспеченного деривативa в момент времени t равна математицческому ожиданию его значения в будущий момент времени $T \geq t$, дисконтированному на процентную ставку по обеспечению

18 Пример: два обеспеченных актива

- Простой пример общего результата: два обеспеченных актива со ставками $c_1(t)$ и $c_2(t)$.
- В естественной мере, цены активов задаются процессом
$$dV_i(t) = \mu_i(t)V_i(t)\,dt + \sigma_i(t)V_i(t)\,dW(t), \quad i = 1, 2. \tag{5}$$
- Отметим, что в формуле используется один и тот же винеровский процесс. Это случай акции (т.е. операции РЕПО с акцией) и опциона на акцию.
- В момент времени t составим портфель для хеджирования эффекта случайности $dW(t)$ на денежный поток в момент времени $t + dt$ (в момент времени t нет выплат между сторонами).
- Занимаем длинную позицию в активе 1 в размере $\sigma_2(t)V_2(t)$ и короткую в активе 2 в размере $\sigma_1(t)V_1(t)$.
- Тогда денежный поток в момент времени $t + dt$ будет равен
$$\begin{aligned}&\sigma_2(t)V_2(t)\left(dV_1(t) - c_1(t)V_1(t)\,dt\right) - \sigma_1(t)V_1(t)\left(dV_2(t) - c_2(t)V_2(t)\,dt\right)\\ &= \sigma_2(t)V_1(t)V_2(t)\left(\mu_1(t) - c_1(t)\right)\,dt - \sigma_1(t)V_1(t)V_2(t)\left(\mu_2(t) - c_2(t)\right)\,dt\end{aligned}$$
- Эта величина известна в момент времени t, а контракт может быть расторгнут в момент времени $t + dt$ по нулевой цене. Следовательно,

стороны согласятся заключить такой контракт, только если указанный денежный поток фактически равен нулю (условие отсутствия арбитража).

19 Пример: два обеспеченных актива

- Отсюда

$$\sigma_2(t)\left(\mu_1(t) - c_1(t)\right) = \sigma_1(t)\left(\mu_2(t) - c_2(t)\right)$$

- Используя это, мы можем переписать (5) как

$$dV_i(t) = c_i(t)V_i(t)\,dt + \sigma_i(t)V_i(t)\,d\tilde{W}(t), \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + \frac{\mu_1(t) - c_1(t)}{\sigma_1(t)}dt = dW(t) + \frac{\mu_2(t) - c_2(t)}{\sigma_2(t)}dt$$

- Теперь, глядя на (6), мы видим, что существует мера Q, эквивалентная естественной мере, для которой актив i растет со ставкой $c_i(t)$.

- Процесс ценообразования по мере Q для каждого актива задается формулой

$$V_i(t) = \mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}\left(e^{-\int_t^T c_i(s)\,ds}V_i(T)\right), \quad i = 1, 2 \tag{7}$$

- Многие соглашения CSA допускают передачу денег в разных валютах
- Мы должны рассмотреть бескупонные облигации (ZCB – zero-coupon bond) обеспеченные как в национальной (внутренней), так и в некоторой другой (иностранной) валюте
- Экономика состоит из активов, номинированных в национальной и иностранной валютах, и обменного курса иностранной валюты $X(t)$, который представляет собой некоторое количество национальной валюты ($\mathcal{D}$) на единицу иностранной ($\mathcal{F}$)
- Ставка обеспечения в национальной валюте составляет $c_d(t)$, а в иностранной – $c_f(t)$
- Внутренняя бескупонная облигация, обеспеченная в национальной валюте, обозначается через $P_{d,d}(t,T)$. Эта облигация генерирует следующий денежный поток в момент времени $t+dt$,

$$dG_{d,d}(t,T) = dP_{d,d}(t,T) - c_d(t)P_{d,d}(t,T)\,dt \tag{8}$$

21 Облигации в иностранной валюте с обеспечением в национальной

- Рассмотри теперь иностранную бескупонную облигацию ZCB, которая обеспечена процентной ставкой в национальной валюте. Обозначим её цену в иностранной валюте как $P_{f,d}(t,T)$. Денежные потоки:

1. Покупка актива. Величина $P_{f,d}(t,T)$ оплачивается (в иностранной валюте $\mathcal{F}$) стороной A стороне B.
2. Обеспечение в момент t. Поскольку стоимость в иностранной валюте равна $P_{f,d}(t,T)$, то обеспечение в размере $P_{f,d}(t,T)X(t)$ вносится в национальной валюте $\mathcal{D}$ стороной B стороне A
3. Возврат обеспечения. В момент времени $t+dt$ сторона A возвращает обеспечение $P_{f,d}(t,T)X(t)\mathcal{D}$ стороне B
4. Проценты. В момент $t+dt$, сторона A также выплачивает стороне B $c_d(t)P_{f,d}(t,T)X(t)\,dt$ в валюте $\mathcal{D}$
5. Новое обеспечение. Новая стоимость составляет $P_{f,d}(t+dt,T)$. Сторона B выплачивает $P_{f,d}(t+dt,T)X(t+dt)$ обеспечения стороне в валюте $\mathcal{D}$

Денежный поток в валюте $\mathcal{D}$ в момент времени $t+dt$ составляет

$$dG_{f,d}(t,T) = d\left(P_{f,d}(t,T)X(t)\right) - c_d(t)P_{f,d}(t,T)X(t)\,dt \tag{9}$$

- Уравнений (8), (9) не достаточно для определения коэффициента сноса X
- Из (9) мы можем лишь вывести коэффициент сноса комбинированной величины $XP_{f,d}$, а коэффициент сноса $P_{f,d}$ в общем случае *не* c_f (а также и не c_d, коли на то пошло)
- Для определения коэффициента сноса $X(\cdot)$, мы должны понять какой денежный поток (в национальной валюте) мы можем сгенерировать при удержании единицы иностранной валюты
- Предположим, что у нас есть $1\mathcal{F}$. Если бы это была одна акция, то мы могли бы войти в сделку РЕПО (т.е. занять денег отдав в обеспечение акцию) и заплатить ставку РЕПО за эту акцию
- На рынке иностранной валюты, имея $1\mathcal{F}$, мы можем отдать её другому дилеру и получить её стоимость в национальной валюте, $X(t)\mathcal{D}$. В следующий момент времени $t + dt$ мы можем получить назад $1\mathcal{F}$, заплатив $X(t) + r_{d,f}(t)X(t)dt$, где $r_{d,f}(t)$ – *процентная ставка займа в национальной валюте, обеспеченного* $\mathcal{F}$. Поскольку мы можем продать $1\mathcal{F}$ за $X(t + dt)\mathcal{D}$ в момент времени $t + dt$, то денежный поток в

момент $t + dt$ будет следующим

$$dG_X(t) = dX(t) - r_{d,f}(t)X(t)\,dt$$

Коэффициент сноса обменного курса

- Это «мгновенный» (так же известный как tom/next) FX swap
- Важно, что ставка $r_{d,f}(t)$ не связана со ставками приема в обеспечения в двух разных валютах

23 Модель кросс-курсов при обеспечении в национальной валюте

1. Рынок мгновенных FX свопов позволяет нам сгенерировать денежный поток $dX(t) - r_{d,f}(t)X(t)\,dt$
2. Рынок в $P_{d,d}$ генерирует денежный поток $dP_{d,d}(t,T) - c_d(t)P_{d,d}(t,T)\,dt$
3. Рынок в $P_{f,d}$ генерирует денежный поток $d\left(P_{f,d}(t,T)X(t)\right) - c_d(t)P_{f,d}(t,T)X(t)\,d$

- Предположим следующую динамику по естественной мере (μ, dW – векторы, а Σ – матрица)

$$\begin{pmatrix} dX/X \\ dP_{d,d}/P_{d,d} \\ d\left(P_{f,d}X\right)/\left(P_{f,d}X\right) \end{pmatrix} = \mu\,dt + \Sigma\,dW,$$

- Как следует из нашего основного результата, мы можем найти некоторую меру («национальную риск-нейтральную») Q^d, при которой динамика имеет вид

$$\begin{pmatrix} dX/X \\ dP_{d,d}/P_{d,d} \\ d\left(P_{f,d}X\right)/\left(P_{f,d}X\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{d,f} \\ c_d \\ c_d \end{pmatrix} dt + \Sigma\,dW^d \qquad (10)$$

При

$$\begin{pmatrix} dX/X \\ dP_{d,d}/P_{d,d} \\ d\left(P_{f,d}X\right)/\left(P_{f,d}X\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{d,f} \\ c_d \\ c_d \end{pmatrix} dt + \Sigma\, dW^d,$$

имеем

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{E}_t^d\left(e^{-\int_t^T r_{d,f}(s)\,ds} X(T)\right), \\ P_{d,d}(t,T) &= \mathrm{E}_t^d\left(e^{-\int_t^T c_d(s)\,ds}\right), \\ P_{f,d}(t,T) &= \frac{1}{X(t)} \mathrm{E}_t^d\left(e^{-\int_t^T c_d(s)\,ds} X(T)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

25 Модель кросс-курсов при обеспечении в иностранной валюте

- Прежняя модель, но с обеспечением в иностранной валюте
- Облигации в иностранной валюте $P_{f,f}$ и облигации в национальной валюте, обеспеченный иностранной валютой $P_{d,f}$
- Повторяя приведенные выше рассуждения, мы можем найти меру $\mathbb{Q}^f$ при которой

$$\begin{pmatrix} d(1/X)/(1/X) \\ dP_{f,f}/P_{f,.f} \\ d\left(P_{d,f}/X\right)/\left(P_{d,f}/X\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_{d,f} \\ c_f \\ c_f \end{pmatrix} dt + \tilde{\Sigma}\, dW^f \qquad (12)$$

- В частности,

$$P_{d,f}(t,T) = X(t)\mathrm{E}_t^f\left(e^{-\int_t^T c_f(s)\,ds}\frac{1}{X(T)}\right). \qquad (13)$$

- Не все процессы в (10) и (12) могут быть заданы независимо. В действительности, при добавлении динамики $P_{f,f}$ к (10), модель полностью определена, поскольку в таком случае динамика $P_{d,f}$ может быть выведена

- По контракту на FX форвард происходит выплата $X(T)-K$ в момент времени T (в валюте $\mathcal{D}$). Ценовой процесс *в национальной валюте* обеспеченного форвардного контракта имеет вид
$$\mathrm{E}_t^d\left(e^{-\int_t^T c_d(s)\,ds}(X(T)-K)\right) = X(t)P_{f,d}(t,T) - KP_{d,d}(t,T)$$
- *Ставка по FX форварду* K, обеспечивающая нулевую стоимость задается $X_d(t,T) = \frac{X(t)P_{f,d}(t,T)}{P_{d,d}(t,T)}$.
- Можно рассматривать FX форвард также как контракт, согласно которому выплачивается $1-K/X(T)$ в валюте $\mathcal{F}$
- Тогда, при условии *обеспечения в иностранной валюте*, стоимость контракта имеет вид
$$\mathrm{E}_t^f\left(e^{-\int_t^T c_f(s)\,ds}(1-K/X(T))\right) = P_{f,f}(t,T) - KP_{d,f}(t,T)/X(t)$$
и ставка обеспечения по форварду c_f задается $X_f(t,T) = \frac{X(t)P_{f,f}(t,T)}{P_{d,f}(t,T)}$
- В общей модели нет никаких причин для того, чтобы $X_f(t,T)$ было равно $X_d(t,T)$, и ставка по форварду будет зависеть от используемого обеспечения. Однако, оказывается, что в текущей рыночной практике FX форварды котируются без учета договоренностей об обеспечении

27 Выбор обеспечения

- Рассмотри актив в национальной валюте с ценой $V(t)$, который может быть обеспечен как в национальной валюте (со ставкой c_d), так и в иностранной (со ставкой c_f).
- Общий случай для договора CSA между дилерами
- Из предыдущего анализа следует, что национальный ZCB обеспеченный в иностранной валюте растёт (в национальной валюте) по ставке $c_f + r_{d,f}$
- Можно строго показать, что аналогичный результат верен для всех рассматриваемых активов
- В случае возможности выбора обеспечения, необходимо максимизировать получаемую по нему процентную ставку, поэтому выбор ставки обеспечения равносилен

$$\max(c_d(t), c_f(t) + r_{d,f}(t)) = c_d(t) + \max(c_f(t) + r_{d,f}(t) - c_d(t), 0)$$

- Самое простое расширение стандартной модели многих валют которое учитывает разные валюты обеспечения задается условием что *разница между ставками обесечения* (*collateral basis*)

$$q_{d,f}(t) \triangleq c_f(t) + r_{d,f}(t) - c_d(t)$$

является нестохастическим (intrinsic model)

28 Выбор обеспечения

- В этом случае выбор обеспечения не добавляет вариативности, хотя дисконтированная кривая выбранной ставки обеспечения будет иной
- Опыт показывает, что по крайней мере некоторые дилеры каким-то образом оценивают возможность будущей замены обеспечения
- Модель с выбором обеспечения имеет вид:

$$V(t) = \mathrm{E}_t^d \left(e^{-\int_t^T c_d(s)\,ds} e^{-\int_t^T \max(q_{d,f}(s),0)\,ds} V(T) \right)$$

- Как минимум 4 фактора: по одному для каждого c_d, c_f, X, $q_{d,f}$. «Стандартная» модель получается при $q_{d,f} \equiv 0$.
- Необходима оценка опционов даже для простейших продуктов!

29 Проблемы модели выбора обеспечения

- Большое количество ненаблюдаемых параметров (волатильности, корреляции $q_{d,f}$)
- Неопределенный горизонт – выбор обеспечения может уйти с развитием индустрии (клиринг, стандартный CSA)
- Предполагает возможность мгновенной замены обеспечения из одной валюты в другую
- Более реалистичные предположения (?)
  - Валюта может быть выбрана только для *изменения* в количестве обеспечения, а не для всего количества
  - Только та валюта которая раньше была внесена может быть потребована обратно
- Это приводит к зависимой от траектории нелинейной динамической задачи оптимизации
- В целом, определение цены свопов значительно усложняется! См. подробнее в [Pit10], [Pit12], [Pit13a], [Pit13b]

30 Программа Barclays для выпускников и стажировки

- Главная страница

  http://joinus.barclays.com/emea/graduate-programmes/

- Количественная аналитика

  http://joinus.barclays.com/emea/investment-bank/quantitative-analytics/

- Открыты для предложений!

Список литературы

[AP16] Leif B.G. Andersen and Vladimir V. Piterbarg. *Interest Rate Modeling, Second Edition, in Four Volumes*. Atlantic Financial Press, 2016.

[Pit10] Vladimir V. Piterbarg. Funding beyond discounting: Collateral agreements and derivatives pricing. *Risk*, 2:97–102, 2010.

[Pit12] Vladimir V. Piterbarg. Cooking with collateral. *Risk*, 8:58–63, 2012.

[Pit13a] Vladimir V. Piterbarg. Optimal posting of sticky collateral. *SSRN eLibrary*, 2013.

[Pit13b] Vladimir V. Piterbarg. Stuck with collateral. *Risk*, 11:60–65, 2013.