

ПРОГРАММА

экзамена по специальности

01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

по физико-математическим наукам.

I. Вероятностные меры

1. Системы подмножеств (алгебры, сигма-алгебры). Борелевские сигма-алгебры. Примеры измеримых пространств: \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^∞ .
2. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова. Основные свойства вероятностной меры.
3. Теорема Каратеодори о продолжении меры. Функция распределения вероятностной меры в \mathbb{R}^n , взаимно-однозначное соответствие между функциями распределения и вероятностными мерами.
4. Случайные величины и векторы, их основные характеристики. Виды сходимостей: сходимость почти наверное, сходимость по вероятности, сходимость по распределению.
5. Независимость событий и сигма-алгебр. Независимость случайных величин, критерий независимости в терминах функций распределений.
6. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега-Стилтьеса в \mathbb{R}^1 . Математическое ожидание случайной величины. Замена переменных в интеграле Лебега.
7. Теорема Радона-Никодима. Условные вероятности, условные математические ожидания и условные распределения.
8. Произведения мер. Теорема Фубини.
9. Пространство L_p случайных величин и его характеристики. Сходимость в пространстве L_p . Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

II. Случайные величины и распределения в \mathbb{R}^n

1. Распределения случайных величин и случайных векторов.
2. Характеристические функции, их свойства. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Слабая сходимость и теорема непрерывности.
3. Многомерное нормальное распределение. Основные свойства гауссовских случайных векторов.
4. Безгранично делимые распределения: определение, свойства, примеры. Представление Леви-Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.

III. Предельные теоремы

1. Закон "нуля или единицы". Теоремы Бореля и Колмогорова.
2. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин (случай одинаково и не одинаково распределенных случайных величин).
3. Закон повторного логарифма для сумм независимых случайных величин.
4. Теорема Пуассона, оценка скорости сходимости в теореме Пуассона (случай одинаковых или не одинаково распределенных индикаторов).
5. Центральная предельная теорема (в форме Ляпунова и в форме Линдберга-Феллера).

6. Теорема Берри-Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме.
7. Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин.

IV. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах

1. Распределения в функциональных пространствах. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях.
2. Гауссовские процессы. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданной ковариационной функцией.
3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс и его свойства. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
4. Теорема Колмогорова-Ченцова о модификациях случайных процессов.
5. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Теорема Карунена. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его ковариационной функции. Теорема Бохнера-Хинчина.
6. Слабая сходимость, относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер. Теорема Прохорова.
7. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции. Линейные преобразования стационарных в широком смысле процессов. Линейное прогнозирование, разложение Вольда.
8. Стационарность в узком смысле и эргодичность случайных последовательностей. Теорема Биркгофа-Хинчина.

V. Некоторые виды зависимости

1. Цепи Маркова (с дискретным временем), классификация состояний, условия эргодичности.
2. Цепи Маркова с непрерывным временем, дифференциальные уравнения Колмогорова для переходных вероятностей и распределения цепи. Эргодическая теорема.
3. Марковские процессы, различные определения. Марковские полугруппы. Уравнения Колмогорова.
4. Мартингалы и полумартингалы, теоремы об остановленном мартингале. Тождество Вальда.
5. Теоремы о сходимости мартингалов.
6. Процессы рождения и гибели: определение, условия эргодичности, предельные распределения, примеры.
7. Ветвящиеся процессы (с дискретным временем и одним типом частиц): определение, условия вырождения, предельные теоремы для числа частиц.

VI. Стохастические уравнения и диффузионные процессы

1. Стохастический интеграл Ито. Формула замены переменных Ито.
2. Стохастические дифференциальные уравнения, понятие сильного и слабого решения. Теорема о достаточном условии существования и единственности сильного решения СДУ.

VII. Элементы математической статистики

1. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко-Кантелли. Критерий Колмогорова.
2. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий достаточности Неймана-Фишера. Минимальные достаточные статистики.
3. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова и ее использование для построения наилучших статистических оценок.
4. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства распределений. Теорема о полных достаточных статистиках в экспоненциальных семействах.
5. Неравенство Крамера-Рао (одномерный и многомерный варианты). Информация Фишера.
6. Методы получения статистических оценок. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия в условиях регулярности.
7. Наиболее мощный критерий для проверки двух простых гипотез. Лемма Неймана-Пирсона. Равномерно наиболее мощные критерии.
8. Проверка простой гипотезы в полиномиальной схеме Бернулли. Теорема Пирсона о предельном распределении статистики хи-квадрат. Критерий хи-квадрат.
9. Задача регрессии. Линейная регрессионная модель. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия в случае нормального распределения. Доверительные интервалы для параметров линейной регрессии в случае нормального распределения.

Основная литература

- [1] Ширяев А.Н. *Вероятность*. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.
- [2] Боровков А.А. *Теория вероятностей*. 4-е изд. М.: УРСС, 2003.
- [3] Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов*. М.: Физматлит, 2005.
- [4] Вентцель А.Д. *Курс теории случайных процессов*. М.: Физматлит, 1996.
- [5] Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. 10-е изд. М.: УРСС, 2011.
- [6] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. *Введение в математическую статистику*. М.: ЛКИ, 2010.

Дополнительная литература

- [7] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. М.: Мир, 1984.
- [8] Боровков А.А. *Математическая статистика*. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008.
- [9] Петров В.В. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*. М.: Физматлит, 1987.
- [10] Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы*. М.: Наука, 1971.
- [11] Энциклопедия "Вероятность и математическая статистика" / Под ред. Ю.В.Прохорова. М.: Российская энциклопедия, 1999.