**Вариант 1.**

1. Построить пример случайной величины $X$, для которой существует $\varphi'_X(0)$, но не существует $\mathsf{E}X$ (с доказательством).

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины такие, что $X_k \sim Exp(\lambda_k)$, $\lambda_k > 0$. Определим $Z_n = \min_{1 \le k \le n} X_k$, $J_n = \min\{k : X_k = Z_n\}$. Доказать, что $Z_n$ и $J_n$ независимы и найти их распределения.

3. Определить, какие из перечисленных функций могут быть характеристическими, а какие нет (ответ обосновать):

а) $\exp\{-|t|^{2/3}\}$

б) $(1-|t|)^3$ при $|t| \le 1$; 0 при $|t| > 1$

в) $1 - \exp\{-1/t^2\}$ при $t \ne 0$; 1 при $t = 0$

г) $|\cos t|^{2/5}$

4. Вес яблока имеет математическое ожидание 150 г и среднее квадратическое отклонение 50 г. Найти вероятность того, что в 50 кг окажется не менее 320 яблок.

5. Распределение случайного вектора $(\xi, \eta)$ имеет плотность $p(x,y) = A(x-y)^2$, $x, y \in [0,1]$. Найти функцию регрессии $\eta$ по $\xi$.

6. Случайный вектор $(X, Y)$ имеет двумерное нормальное распределение, $X, Y \sim N(0,1)$, коэффициент корреляции $1/2$. Найти $\mathsf{P}(XY < 0)$.

**Вариант 2**

1. Доказать, что вектор $X = (X_1, \ldots X_n)$ имеет гауссовское распределение тогда и только тогда, когда для любых действительных $c_1, \ldots, c_n$ распределение случайной величины $c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n$ нормально.

2. Доказать неравенство Иенсена для условного математического ожидания.

3. Определить, какие из перечисленных функций могут быть характеристическими, а какие нет (ответ обосновать):

а) $\exp\{-\sin^2 t\}$

б) $1 - |t|^{2/3}$ при $|t| \le 1$; 0 при $|t| > 1$

в) $1/(1 + t^4)$

г) $\cos(|t|^{3/2})$

4. Время изготовления детали равномерно распределено на отрезке от 5 до 7 минут. Изготовление скольких деталей за 12 часов можно гарантировать с вероятностью 97,5%?

5. Для независимых случайных величин $\xi \sim Pois(2)$, $\eta \sim Pois(3)$ найти $\mathsf{E}(\xi\eta | \xi + \eta = n)$, $n \ge 0$.

6. Случайный вектор $(X, Y)$ имеет двумерное нормальное распределение, $X, Y \sim N(0, 1)$, коэффициент корреляции $-1/3$. Найти функцию регрессии $\cos Y$ по $X$.

## Вариант 3

1. Доказать теорему Пойа.

2. Пусть $X_1, \dots X_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, а $Y$ — случайная величина, для которой $\mathsf{E}Y^2 < \infty$. Доказать, что $(1/n)\sum_{k=1}^n \mathsf{E}(Y|X_k) \to \mathsf{E}Y$ п.н. при $n \to \infty$.

3. Определить, какие из перечисленных функций могут быть характеристическими, а какие нет (ответ обосновать):

а) $e^{-|t|}/(1+t^2)$

б) $1/(2-\cos t)$

в) $1-|t|^3$ при $|t| \le 1$; $0$ при $|t| > 1$

г) $\exp\{-|t|^{5/2}\}$

4. Число страховых случаев в день имеет распределение Пуассона, в среднем за год происходит 289 случаев. Найти вероятность того, что за год их произойдет от 250 до 300.

5. Пусть $\xi \sim Exp(2)$. Найти $\mathsf{E}(\xi|\operatorname{tg}\xi = x)$.

6. Пусть $X = 3\xi + 4\eta$, $Y = 2\xi - 5\eta$, где $\xi$ и $\eta$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти $\mathsf{E}(Y - \mathsf{E}(Y|X))^2$.

**Вариант 4.**

1. Построить пример случайной величины $X$, для которой существует $\varphi'_X(0)$, но не существует $\mathsf{E}X$ (с доказательством).

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины такие, что $X_k \sim Exp(\lambda_k)$, $\lambda_k > 0$. Определим $Z_n = \min_{1 \le k \le n} X_k$, $J_n = \min\{k : X_k = Z_n\}$. Доказать, что $Z_n$ и $J_n$ независимы и найти их распределения.

3. Определить, какие из перечисленных функций могут быть характеристическими, а какие нет (ответ обосновать):

а) $\exp\{-|t|^{1/3}\}$

б) $2/(3 - \cos t)$

в) $\exp\{-\sin^4 t\}$

г) $1 - t^6$ при $|t| \le 1$; $0$ при $|t| > 1$

4. Кадровое агентство трудоустроило 400 специалистов. В каких границах с вероятностью 90% находилось общее число соискателей на работу, если каждый соискатель устраивается на работу с вероятностью $1/5$?

5. Распределение случайного вектора $(\xi, \eta)$ имеет плотность $p(x, y) = A(x + y)^2$, $x, y \in [0, 1]$. Найти функцию регрессии $\eta$ по $\xi$.

6. Случайный вектор $(X, Y)$ имеет двумерное нормальное распределение, $X, Y \sim N(0, 1)$, коэффициент корреляции $-1/2$. Найти $\mathsf{P}(XY < 0)$.

**Вариант 5**

1. Доказать, что вектор $X = (X_1, \dots X_n)$ имеет гауссовское распределение тогда и только тогда, когда для любых действительных $c_1, \dots, c_n$ распределение случайной величины $c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$ нормально.

2. Доказать неравенство Иенсена для условного математического ожидания.

3. Определить, какие из перечисленных функций могут быть характеристическими, а какие нет (ответ обосновать):

а) $\exp\{-3\sin^2 t\}$

б) $(1-|t|)^2$ при $|t| \le 1$; 0 при $|t| > 1$

в) $1/(1+t^6)$

г) $|\cos t|^{2/7}$

4. Время изготовления детали равномерно распределено на отрезке от 6 до 10 минут. Изготовление скольких деталей за 20 часов можно гарантировать с вероятностью 99%?

5. Для независимых случайных величин $\xi \sim Pois(1)$, $\eta \sim Pois(4)$ найти $\mathsf{E}(\xi\eta | \xi + \eta = n)$, $n \ge 0$.

6. Случайный вектор $(X, Y)$ имеет двумерное нормальное распределение, $X, Y \sim N(0,1)$, коэффициент корреляции $1/3$. Найти функцию регрессии $\sin Y$ по $X$.

**Вариант 6**

1. Доказать теорему Пойа.

2. Пусть $X_1, \dots X_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, а $Y$ — случайная величина, для которой $\mathsf{E}Y^2 < \infty$. Доказать, что $(1/n)\sum_{k=1}^n \mathsf{E}(Y|X_k) \to \mathsf{E}Y$ п.н. при $n \to \infty$.

3. Определить, какие из перечисленных функций могут быть характеристическими, а какие нет (ответ обосновать):

а) $(\cos t)/(1+t^2)$

б) $1-|t|^{3/4}$ при $|t| \le 1$; 0 при $|t| > 1$

в) $\cos(|t|^{7/2})$

г) $1-\exp\{-1/t^4\}$ при $t \ne 0$; 1 при $t=0$

4. Срок службы изделия имеет показательное распределение с математическим ожиданием 2000 часов. Найти вероятность того, что средний срок службы по 100 изделиям составит от 1800 до 2100 часов.

5. Пусть $\xi \sim Exp(3)$. Найти $\mathsf{E}(\xi |\operatorname{ctg}\xi = x)$.

6. Пусть $X = 3\xi - 4\eta$, $Y = 5\xi + 2\eta$, где $\xi$ и $\eta$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти $\mathsf{E}(Y - \mathsf{E}(Y|X))^2$.