Вариант 1.

1. Доказать эквивалентность слабой сходимости вероятностных мер сходимости функций распределения в точках непрерывности.

2. Привести примеры, что в общем случае из сходимости по вероятности не следуют сходимости в L_p и почти наверное, а из сходимости по распределению не следует сходимость по вероятности. Доказать, что последнее верно в случае сходимости к константе.

3. Фирма делает клиентам скидку (в процентах), равную сумме двух последних цифр номера паспорта. Найти математическое ожидание и дисперсию величины скидки.

4. Распределение случайного вектора (ξ, η) имеет плотность $p(x, y) = A(x + y)^2$, $x, y \in [0, 1]$. Найти A, совместную функцию распределения, частные плотности, коэффициент корреляции.

5. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, где $\xi \sim Exp(2)$, $\eta \sim Exp(5)$.

6. Найти $\mathsf{E}\cos(2X + Y)$, где X и Y независимы, $X \sim U[-1, 1]$, $Y \sim N(1, 1)$.

Вариант 2

1. Привести пример последовательности независимых случайных величин, для которых выполняется ЗБЧ, но не УЗБЧ (с доказательством).

2. Доказать, что в случае сходимости по распределению, если предельная функция распределения непрерывна, то сходимость к ней равномерная на всей оси.

3. В каждой упаковке товара содержится наклейка одного из 4 типов равновероятно. Найти математическое ожидание и дисперсию числа упаковок, сколько понадобится купить, чтобы собрать наклейки всех типов.

4. Функция распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид $F(x, y) = (1-\theta)xy+\theta(xy)^2$, $x, y \in [0, 1]$. Найти частные плотности, возможные значения θ, коэффициент корреляции.

5. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, где $\xi \sim U[-1, 1]$, $\eta \sim Exp(3)$.

6. Найти $\mathsf{E}\sin(2\xi)$, где $\xi \sim Pois(1)$.

Вариант 3

1. Найти математическое ожидание и дисперсию распределения Пуассона. Доказать, что сумма двух независимых пуассоновских случайных величин тоже пуассоновская.

2. Доказать эквивалентность $X_n \xrightarrow{P} X$ и $\mathsf{E}\,\mathrm{arctg}\,|X_n - X| \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Курс акции в течение дня торгов может подняться на один пункт с вероятностью 0,6, опуститься на один пункт с вероятностью 0,3 и остаться неизменным с вероятностью 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию изменения курса акции за 5 дней торгов.

4. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике $A = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Найти частные плотности и коэффициент корреляции.

5. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, где $\xi \sim Bin(2, 1/2)$, $\eta \sim Exp(3)$.

6. Найти характеристическую функцию распределения Лапласа с плотностью $p(x) = (\lambda/2) \exp\{-\lambda|x|\}$, $\lambda > 0$.

Вариант 4.

1. Доказать эквивалентность слабой сходимости вероятностных мер сходимости функций распределения в точках непрерывности.

2. Привести примеры, что в общем случае из сходимости по вероятности не следуют сходимости в L_p и почти наверное, а из сходимости по распределению не следует сходимость по вероятности. Доказать, что последнее верно в случае сходимости к константе.

3. У стрелка имеется 4 патрона. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Стрелок стреляет до первого попадания или пока не кончатся патроны. Найти математическое ожидание и дисперсию числа выстрелов.

4. Распределение случайного вектора (ξ, η) имеет плотность $p(x, y) = A(x - y)^2$, $x, y \in [0, 1]$. Найти A, совместную функцию распределения, частные плотности, коэффициент корреляции.

5. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, где $\xi \sim Exp(3)$, $\eta \sim Exp(7)$.

6. Найти $\mathsf{E}\cos(X + 2Y)$, где X и Y независимы, $X \sim U[-1, 1]$, $Y \sim N(1, 1)$.

Вариант 5

1. Привести пример последовательности независимых случайных величин, для которых выполняется ЗБЧ, но не УЗБЧ (с доказательством).

2. Доказать, что в случае сходимости по распределению, если предельная функция распределения непрерывна, то сходимость к ней равномерная на всей оси.

3. В каждой упаковке товара содержится наклейка одного из 5 типов равновероятно. Найти математическое ожидание и дисперсию числа упаковок, сколько понадобится купить, чтобы собрать наклейки всех типов.

4. Функция распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид $F(x, y) = (1+\theta)xy - \theta(xy)^2$, $x, y \in [0, 1]$. Найти частные плотности, возможные значения θ, коэффициент корреляции.

5. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, где $\xi \sim U[1, 2]$, $\eta \sim Exp(2)$.

6. Найти $\mathsf{E}\sin(3\xi)$, где $\xi \sim Pois(1)$.

Вариант 6

1. Найти математическое ожидание и дисперсию распределения Пуассона. Доказать, что сумма двух независимых пуассоновских случайных величин тоже пуассоновская.

2. Доказать эквивалентность $X_n \xrightarrow{P} X$ и $\mathsf{E}\,\mathrm{arctg}\,|X_n - X| \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Курс акции в течение дня торгов может подняться на один пункт с вероятностью 0,7, опуститься на один пункт с вероятностью 0,2 и остаться неизменным с вероятностью 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию изменения курса акции за 5 дней торгов.

4. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике $B = \{(x, y) : 0 \le y \le x \le 1\}$. Найти частные плотности и коэффициент корреляции.

5. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, где $\xi \sim Bin(2, 1/3)$, $\eta \sim Exp(2)$.

6. Найти характеристическую функцию треугольного распределения с плотностью $p(x) = (1/a)(1 - |x|/a)$, $|x| \le a$, $a > 0$.