## ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 1

1. Доказать лемму о баллотировке.

*Комментарий.* Важно показать, что выбор вероятностного пространства (в виде функций, описывающих исходы) позволяет легко применить принцип отражения.

2. Для того чтобы узнать, сколько рыб в озере, отлавливают $M$, метят их и выпускают обратно в озеро. При каком числе рыб в озере будет наибольшей вероятность встретить среди вновь пойманных $n$ рыб $k$ меченых?

3. Привести пример алгебры подмножеств некоторого множества, которая не является $\sigma$-алгеброй.

## ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 2

1. Доказать по индукции формулу

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathsf{P}(A_i A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathsf{P}(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathsf{P}(A_1 \ldots A_n).$$

Применить ее к задаче о случайном размещении $n$ писем по $n$ подписанным конвертам. Найти предел (при $n \to \infty$) вероятности того, что хотя бы одно письмо попало в нужный конверт.

2. Студент выучил из $N$ экзаменационных билетов $n$. В очереди к столу с разложенными билетами перед ним стоит $k$ человек. Какова вероятность того, что данный, т.е. $(k+1)$-й, студент возьмет известный ему билет?

*Комментарий.* Эта задача (иллюстрирующая формулу полной вероятности) основана на гипергеометрическом распределении, которое уже возникало на первом занятии при решении задачи о рыбах.

3. Вероятность для изделия некоторого производства удовлетворять стандарту равна $0,96$. Предлагается система контроля качества изделий, дающая положительный результат для изделий, удовлетворяющих стандарту, с вероятностью $0,98$, а для бракованных – с вероятностью $0,05$. Какова вероятность того, что изделие, успешно прошедшее контроль, удовлетворяет стандарту?

*Комментарий.* Решение этой задачи предполагает использование формулы Байеса.

Полезно было бы также решить задачу (на формулу полной вероятности) о двух сосудах с белыми и черными шарами. А именно, известно, сколько белых и черных шаров в каждом сосуде. Из первого сосуда вынимается шар (или несколько шаров) и перекладывается (без показывания) во второй сосуд. Какова вероятность после этого вынуть из второго сосуда черный шар?

## ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 3

1 а). При каких значениях действительных параметрах $a, b, c$ следующая функция

$$F(x) = \begin{cases} a + b \operatorname{arctg} x, & x < 0, \\ 4b + c \sin(\pi x) & 0 \le x \le 1, \\ 1 - \exp\{-x\}, & x > 1, \end{cases}$$

является функцией распределения вероятностной меры $\mathsf{P}$ на прямой? Найти $\mathsf{P}((0,1])$, $\mathsf{P}([0,1))$ и $\mathsf{P}((-1,2))$.

1 б). При каких действительных $a, b$ и $c$ функция $p(x) = \max\{-|x-a|+b, c\}$ является плотностью вероятностной меры $\mathsf{P}$ на прямой? Найти $\mathsf{P}([a+\frac{1}{2}, a+1))$.

*Комментарий.* Задача 1 требует вспомнить, какие свойства характеризуют функцию распределения и плотность вероятностной меры.

2. Рассмотрим схему $n$ независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p$. Пусть $\Omega = \{\omega = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_i$ равны нулю или единице, $i = 1, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathsf{P}(\{\omega\}) = p^{\sum_{i=1}^n k_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n k_i}$. Определим события $A_i = \{\omega : k_i = 1\}$ (“успех” в $i$-ом испытании), $i = 1, \dots, n$. Доказать, что $A_1, \dots, A_n$ независимы.

*Комментарий.* Важно не забыть рассмотреть всевозможные наборы $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, для которых $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.

3. Точка $(a, b)$ случайно бросается в квадрат $[0,h] \times [0,h]$, где $h > 0$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет действительные корни.

*Комментарий.* Ответ существенно зависит от величины $h$.

## ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 4

1 Описать все случайные величины, которые измеримы относительно $\sigma$-алгебры, порожденной разбиением $\Omega$ на конечное или счетное число событий.

2. Пусть $X$ – (действительная) случайная величина, принимающая значения в конечном или счетном множестве $M \subset \mathbb{R}$. Описать все функции $f : M \to \mathbb{R}$, для которых $X$ и $f(X)$ независимы.

3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины. $X_k \sim Pois(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Найти распределение величины $Y = X_1 + \ldots + X_n$.

*Комментарий.* В задаче 3 необходимо объяснить, почему независимы $X_1 + \ldots + X_{n-1}$ и $X_n$.

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 5

1. Сколько изюминок в среднем должна содержать булочка для того, чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку была не менее $0,99$?

2. Найти математическое ожидание и дисперсию биномиальной величины, пуассоновской, равномерной, экспоненциальной и нормальной.

3. Пусть $X$ – случайная величина, у которой $\mathsf{E}X = a$ и $var\, X = \sigma^2$. Доказать (неравенства Кантелли), что для любого $t > 0$

$$\mathsf{P}(X - a > t) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2},$$

$$\mathsf{P}(X - a < -t) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 6

1. Построить примеры, показывающие, что между сходимостью случайных величин почти наверное, по вероятности, по распределению и в пространстве $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ нет других нетривиальных соотношений, кроме следующих импликаций: сходимость почти наверное $\Longrightarrow$ сходимость по вероятности $\Longrightarrow$ сходимость по распределению, сходимость в пространстве $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) \Longrightarrow$ сходимость по вероятности.

2. Доказать, что если модуль коэффициента корреляции случайных величин $X$ и $Y$ равен 1, то найдутся константы $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, такие, что $Y = aX + b$ почти наверное.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин таких, что $\mathsf{P}(X_n = 2^n) = \mathsf{P}(X_n = -2^n) = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$. Выяснить, удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел. Построить пример независимых случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots$, которые удовлетворяют усиленному закону больших чисел и при этом имеют конечные дисперсии такие, что $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{var}\, Y_n = \infty$.

Полезно было бы еще доказать, что для случайных величин $X, X_1, X_2, \ldots$

$$X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X \iff \mathsf{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 7

7.1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, $C$ – произвольная константа. Доказать, что следующие предельные (при $n \to \infty$) соотношения эквивалентны:

$$X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} C \iff X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} C.$$

7.2. Пусть $X, X_1, \ldots$ – последовательность случайных величин, имеющих соответственно функции распределения $F, F_1, \ldots$. Предположим, что $X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$ при $n \to \infty$ и функция $F$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Доказать, что тогда $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$, $n \to \infty$.

7.3. Построить последовательность независимых интегрируемых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ таких, что для них справедлив закон больших чисел, но не выполняется усиленный закон больших чисел, т.е. (при $n \to \infty$)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad \text{но} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k \nrightarrow 0 \ \text{ п.н..}$$

Было бы полезно доказать еще следующее утверждение (лемма Слуцкого).

Пусть $X, X_1, \ldots$ и $Y, Y_1, \ldots$ – последовательности случайных величин таких, что $X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$ и $Y_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to \infty$. Тогда $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$, $n \to \infty$. Показать, что если $X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$ и $Y_n \xrightarrow{\mathsf{law}} Y$, то необязательно $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X + Y$ $(n \to \infty)$.

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 8

8.1. Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Найти плотности следующих величин:
а) $S_n := X_1 + \ldots + X_n$,
б) $\chi_n^2 := X_1^2 + \ldots + X_n^2$,
в) $\tau_n := \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2}}$.

8.2. Пусть $X$ и $Y$ – независимые случайные величины такие, что $\mathsf{P}(X = -1) = 1/4$ и $\mathsf{P}(X = 2) = 3/4$, а $Y$ равномерно распределена на отрезке $[0, 4]$. Объяснить, почему $X + Y$ имеет плотность распределения и найти ее.

8.3. Пусть $X$ и $Y$ – независимые случайные величины, причем $X \sim U[-1, 1]$ и $Y \sim Exp(2)$. Найти $\mathsf{E}e^{-2X+Y}$.

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 9

9.1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины. Найти плотность случайной величины $X_1 + \ldots + X_n$, если

а) $X_k \sim Exp(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$;

б) $X_k \sim N(a_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \ldots, n$.

9.2. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные величины, имеющие соответственно функции распределения $F_X(\cdot), F_{X_1}(\cdot), F_{X_2}(\cdot), \ldots$. Доказать, что $X_n \stackrel{law}{\to} X$ тогда и только тогда, когда $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ во всех точках непрерывности функции $F_X(\cdot)$, $n \to \infty$.

9.3. Пусть $X \sim N(a, \sigma^2)$, где $\sigma > 0$. Доказать, что $(X - a)/\sigma \sim N(0, 1)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $X \sim N(a, \sigma^2)$.

Было бы также полезно найти плотность распределения суммы независимых случайных величин $X_1$ и $X_2$, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[-a, a]$.

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 10

10.1. Являются ли характеристическими функции $(\cos t)^2$ и $\cos(t^2)$?

10.2. Распределение случайной величины $X$ называется решетчатым с шагом $h > 0$, если для некоторого $a \in \mathbb{R}$ все значения $X$ (с вероятностью единица) принадлежат множеству $\cup_{k\in\mathbb{Z}}\{a + kh\}$. Доказать, что распределение $X$ решетчато тогда и только тогда, когда $|\varphi_X(t_0)| = 1$ для некоторого $t_0 \neq 0$.

10.3. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины такие, что $\mathsf{P}(X_k = k^\alpha) = \mathsf{P}(X_k = -k^\alpha) = 1/2$, где параметр $\alpha \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Найти все $\alpha$, для которых последовательность $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет закону больших чисел (с нормировкой $n$). Будет ли это множество значений параметра совпадать с множеством всех $\alpha$, для которых справедлив усиленный закон больших чисел?

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 11

11.1. Рассмотрим разбиение прямой на промежутки $I_k = (c_{k-1}, c_k]$, где $k = 1, 2, 3, 4$ и $-\infty = c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4 = \infty$ (формально полагаем $(c_3, c_4] := (c_3, \infty)$). Пусть функция $\varphi(t) = a_k t + b_k$ для $t \in I_k$, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Описать все $a_k, b_k$, где $k = 1, 2, 3, 4$, и $c_1, c_2, c_3$, для которых функция $\varphi$ является характеристической функцией некоторой вероятностной меры.

11.2. Доказать (теорема Пойа), что четная неотрицательная функция $\varphi$ является характеристической функцией некоторой вероятностной меры, если она непрерывна и выпукла на $[0, \infty)$, $\varphi(0) = 1$ и $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

11.3. Для $-\infty < a < b < \infty$ найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{a\sqrt{\lambda}+\lambda \le k \le b\sqrt{\lambda}+\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 12

12.1. Построить пример серий независимых случайных величин (центрированных и с конечным вторым моментом), показывающий, что условие Линдеберга не является необходимым для справедливости центральной предельной теоремы.

12.2. Пусть $\varphi_X(\cdot)$ – характеристическая функция случайной величины $X$. Доказать, что если $\varphi^{(2k)}(0)$ существует для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $\mathsf{E}X^{2k} < \infty$. Построить пример случайной величины $X$, для которой существует $\varphi'_X(0)$, но $\mathsf{E}X$ не существует.

12.3. Доказать, что функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & t \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

не является характеристической. Будет ли функция $\varphi(t) = \exp\{f(t) - 1\}$, $t \in \mathbb{R}$, характеристической, если $f(\cdot)$ – характеристическая функция (некоторой случайной величины)?

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 13

13.1. Доказать, что вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ имеет гауссовское распределение тогда и только тогда, когда для любых действительных $c_1, \ldots, c_n$ распределение случайной величины $c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n$ нормально.

13.2. Построить пример негауссовского случайного вектора $(X_1, X_2)$, компоненты которого имеют стандартное нормальное распределение.

13.3. Пусть $X \sim N(a, C)$, где $a \in \mathbb{R}^n$ и $C$ – симметричная неотрицательно определенная матрица $n$-го порядка. Найти распределение вектора $Y = AX + b$, где $b \in \mathbb{R}^m$ и $A$ – матрица $m \times n$.

# ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 14

14.1. Пусть $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а $\sigma$-алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Показать, что $\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) = Pr_{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})}X$, где $Pr_H$ обозначает ортогональное проектирование на подпространство $H$ в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

14.2. Пусть $X$ и $Y$ – независимые случайные векторы со значениями соответственно в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$. Доказать, что

$$\mathsf{E}(g(X,Y)|Y=y) = \mathsf{E}g(X,y),$$

если борелевская функция $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ и $\mathsf{E}|g(X,Y)| < \infty$.

14.3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины такие, что $X_k \sim Exp(\lambda_k)$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Определим

$$Z_n := \min_{1 \le k \le n} X_k, \qquad J_n := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = Z_n\}.$$

Доказать, что $Z_n$ и $J_n$ – независимые величины, а также найти их распределения.

## ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 15

15.1. Пусть случайные величины $X, X_1, X_2, \ldots$ таковы, что $X_n \to X$ п.н. при $n \to \infty$. Верно ли, что для каждой случайной величины $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ справедливо соотношение $\mathsf{E}(Z|X_n) \to \mathsf{E}(Z|X)$ п.н. при $n \to \infty$?

15.2. Пусть дана произвольная $\sigma$-алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, а случайная величина $X$ и выпуклая функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таковы, что $\mathsf{E}|\psi(X)| < \infty$. Доказать справедливость следующего утверждения (неравенство Йенсена):

$$\psi(\mathsf{E}(X|\mathcal{A})) \leq \mathsf{E}(\psi(X)|\mathcal{A}).$$

Вывести отсюда оценку $var(\mathsf{E}(X|\mathcal{A})) \leq varX$, если $\mathsf{E}X^2 < \infty$.

15.3. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, а $Y$ – случайная величина, для которой $\mathsf{E}Y^2 < \infty$. Доказать, что

$$\frac{1}{n}(\mathsf{E}(Y|X_1) + \ldots + \mathsf{E}(Y|X_n)) \to \mathsf{E}Y \;\text{ п.н. при }\; n \to \infty.$$