ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 7

7.1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, C – произвольная константа. Доказать, что следующие предельные (при $n \to \infty$) соотношения эквивалентны:

$$X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} C \iff X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} C.$$

7.2. Пусть $X, X_1, \ldots$ – последовательность случайных величин, имеющих соответственно функции распределения $F, F_1, \ldots$. Предположим, что $X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$ при $n \to \infty$ и функция F непрерывна на $\mathbb{R}$. Доказать, что тогда $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$, $n \to \infty$.

7.3. Построить последовательность независимых интегрируемых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ таких, что для них справедлив закон больших чисел, но не выполняется усиленный закон больших чисел, т.е. (при $n \to \infty$)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad \text{но} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k \nrightarrow 0 \ \text{ п.н..}$$

Было бы полезно доказать еще следующее утверждение (лемма Слуцкого).

Пусть $X, X_1, \ldots$ и $Y, Y_1, \ldots$ – последовательности случайных величин таких, что $X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$ и $Y_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to \infty$. Тогда $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$, $n \to \infty$. Показать, что если $X_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X$ и $Y_n \xrightarrow{\mathsf{law}} Y$, то необязательно $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathsf{law}} X + Y$ $(n \to \infty)$.