

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 6

1. Построить примеры, показывающие, что между сходимостью случайных величин почти наверное, по вероятности, по распределению и в пространстве $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ нет других нетривиальных соотношений, кроме следующих импликаций: сходимость почти наверное \implies сходимость по вероятности \implies сходимость по распределению, сходимость в пространстве $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \implies$ сходимость по вероятности.

2. Доказать, что если модуль коэффициента корреляции случайных величин X и Y равен 1, то найдутся константы $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, такие, что $Y = aX + b$ почти наверное.

3. Пусть X_1, X_2, \dots – последовательность независимых случайных величин таких, что $\mathbf{P}(X_n = 2^n) = \mathbf{P}(X_n = -2^n) = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$. Выяснить, удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел. Построить пример независимых случайных величин Y_1, Y_2, \dots , которые удовлетворяют усиленному закону больших чисел и при этом имеют конечные дисперсии такие, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{var} Y_n = \infty$.

Полезно было бы еще доказать, что для случайных величин X, X_1, X_2, \dots

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \iff \mathbf{E} \left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$