ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 3

1 а). При каких значениях действительных параметрах a, b, c следующая функция

$$F(x) = \begin{cases} a + b \operatorname{arctg} x, & x < 0, \\ 4b + c \sin(\pi x) & 0 \le x \le 1, \\ 1 - \exp\{-x\}, & x > 1, \end{cases}$$

является функцией распределения вероятностной меры P на прямой? Найти $\mathsf{P}((0,1])$, $\mathsf{P}([0,1))$ и $\mathsf{P}((-1,2))$.

1 б). При каких действительных a, b и c функция $p(x) = \max\{-|x-a|+b, c\}$ является плотностью вероятностной меры P на прямой? Найти $\mathsf{P}([a+\frac{1}{2}, a+1))$.

Комментарий. Задача 1 требует вспомнить, какие свойства характеризуют функцию распределения и плотность вероятностной меры.

2. Рассмотрим схему n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть $\Omega = \{\omega = (k_1, \dots, k_n)$, где k_i равны нулю или единице, $i = 1, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathsf{P}(\{\omega\}) = p^{\sum_{i=1}^n k_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n k_i}$. Определим события $A_i = \{\omega : k_i = 1\}$ (“успех” в i-ом испытании), $i = 1, \dots, n$. Доказать, что $A_1, \dots, A_n$ независимы.

Комментарий. Важно не забыть рассмотреть всевозможные наборы $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, для которых $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$.

3. Точка (a, b) случайно бросается в квадрат $[0, h] \times [0, h]$, где $h > 0$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет действительные корни.

Комментарий. Ответ существенно зависит от величины h.