ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 15

15.1. Пусть случайные величины $X, X_1, X_2, \dots$ таковы, что $X_n \to X$ п.н. при $n \to \infty$. Верно ли, что для каждой случайной величины $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ справедливо соотношение $\mathsf{E}(Z|X_n) \to \mathsf{E}(Z|X)$ п.н. при $n \to \infty$?

15.2. Пусть дана произвольная σ-алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, а случайная величина X и выпуклая функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таковы, что $\mathsf{E}|\psi(X)| < \infty$. Доказать справедливость следующего утверждения (неравенство Йенсена):

$$\psi(\mathsf{E}(X|\mathcal{A})) \le \mathsf{E}(\psi(X)|\mathcal{A}).$$

Вывести отсюда оценку $var(\mathsf{E}(X|\mathcal{A})) \le var X$, если $\mathsf{E}X^2 < \infty$.

15.3. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых случайных величин, а Y – случайная величина, для которой $\mathsf{E}Y^2 < \infty$. Доказать, что

$$\frac{1}{n}(\mathsf{E}(Y|X_1) + \dots + \mathsf{E}(Y|X_n)) \to \mathsf{E}Y \ \text{ п.н. при } \ n \to \infty.$$