ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ 14

14.1. Пусть $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а σ-алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Показать, что $\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) = Pr_{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})}X$, где Pr_H обозначает ортогональное проектирование на подпространство H в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

14.2. Пусть X и Y – независимые случайные векторы со значениями соответственно в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$. Доказать, что

$$\mathsf{E}(g(X,Y)|Y = y) = \mathsf{E}g(X, y),$$

если борелевская функция $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ и $\mathsf{E}|g(X,Y)| < \infty$.

14.3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины такие, что $X_k \sim Exp(\lambda_k)$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Определим

$$Z_n := \min_{1\le k\le n} X_k, \quad J_n := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = Z_n\}.$$

Доказать, что Z_n и J_n – независимые величины, а также найти их распределения.