Лекция 1. Вероятностное пространство

Введение (Б.Паскаль, П.Ферма, Х.Гюйгенс, Я.Бернулли, К.Гаусс, П-С.Лаплас, С.Пуассон, П.Л.Чебышев, А.Н.Колмогоров и другие корифеи). Случайные эксперименты. Пространство Ω элементарных исходов. Примеры конечного, счетного Ω и пространства Ω, имеющего мощность континуума. Системы подмножеств некоторого множества. Определение алгебры, σ-алгебры, π- и λ-систем. Теорема о $\pi - \lambda$ системах (формулировка). Построение наименьшей σ-алгебры, содержащей заданную систему подмножеств некоторого множества. Примеры (в частности, борелевские множества топологического пространства). Объяснение того, что одна и та же σ-алгебра может порождаться разными системами множеств. Определение меры. Элементарное утверждение, заключающееся в том, что либо мера тождественно равна бесконечности на всех множествах σ-алгебры, либо мера пустого множества равна нулю. Вероятность. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Статистическая интерпретация вероятности. Геометрическая и механическая аналогии. Дискретное вероятностное пространство (с конечным или счетным числом исходов). Пример распределения Пуассона на $(\mathbb{Z}_+, 2^{\mathbb{Z}_+})$. Общий способ задания меры в дискретных пространствах. Классическое определение вероятности.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

1.1. Случайные эксперименты. Пространство элементарных исходов. Примеры. Системы подмножеств некоторого множества (алгебра, σ-алгебра, π- и λ-системы). Примеры. Определение меры и вероятности. Вероятностное пространство. Статистическая интерпретация вероятности.

1.2. Дискретные вероятностные пространства (с конечным или счетным числом исходов). Общий способ задания меры. Примеры. Классическое определение вероятности. Примеры.

Лекция 2. Свойства вероятности. Условная вероятность. Независимость

Напоминание того, как вводится вероятность на дискретных пространствах. Схема Бернулли. Элементарные свойства вероятности ($\mathsf{P}(A \setminus B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)$, если $B \subset A$, субаддитивность и др.). Вероятностная мера на алгебре подмножеств. Теорема, связывающая свойства конечной аддитивности, непрерывности и счетной аддитивности неотрицательной конечной функции, заданной на алгебре подмножеств некоторого множества. Теорема Каратеодори (формулировка). Условная вероятность. Пример. Формула полной вероятности. Пример (закон следования Лапласа). Формула Байеса. Пример. Независимость событий (в совокупности и попарная). Независимость систем множеств. Независимость σ-алгебр, порожденных независимыми π-системами. Лемма о независимости σ-алгебр $\{\varnothing, A_i, \overline{A}_i, \Omega\}$, $i = 1, \ldots, n$, когда независимы события $A_1, \ldots, A_n$. Формула Эйлера из теории чисел (эта формула будет доказана на лекции 3).

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

2.1. Элементарные свойства вероятности. Вероятностная мера на алгебре подмножеств. Теорема, связывающая свойства конечной аддитивности, непрерывности и счетной аддитивности неотрицательной функции, заданной на алгебре подмножеств некоторого множества.

2.2. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры применения.

2.3. Независимость событий (в совокупности и попарная). Независимость систем подмножеств Ω. Независимость σ-алгебр, порожденных независимыми π-системами. Лемма о независимости σ-алгебр $\{\varnothing, A_i, \overline{A}_i, \Omega\}$, $i = 1, \ldots, n$, когда независимы события $A_1, \ldots, A_n$. Формула Эйлера из теории чисел.

Лекция 3. Меры на прямой и в евклидовом пространстве

Доказательство формулы Эйлера (обещанное на лекции 2). Функция распределения вероятностной (или конечной) меры на прямой, четыре свойства этой функции. Построение вероятностной меры на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ по функции, обладающей свойствами функции распределения. Понятие плотности распределения вероятности (пока использующее кусочно-непрерывные функции, для которых интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана). Основные распределения: равномерное на отрезке, экспоненциальное, гауссовское (нормальное), Коши. Определение $\sigma-$конечной меры. Произведение вероятностных пространств. Мера Лебега на прямой и в евклидовом пространстве. Геометрические вероятности. Парадокс Бертрана.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

3.1. Функция распределения меры на прямой, свойства этой функции. Построение меры на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ по функции, обладающей свойствами функции распределения. Понятие плотности распределения вероятности.

3.2. Основные распределения: равномерное на отрезке, экспоненциальное, гауссовское (нормальное), Коши. Определение $\sigma-$конечной меры. Произведение вероятностных пространств. Мера Лебега на прямой и в евклидовом пространстве. Геометрические вероятности. Парадокс Бертрана.

Лекция 4. Случайные величины и их свойства

Доказательство леммы Бореля-Кантелли. Измеримые отображения. Доказательство того, что для $\mathcal{F}|\mathcal{B}$-измеримости отображения X достаточно потребовать, чтобы $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$, если $\sigma\{\mathcal{M}\} = \mathcal{B}$. Следствия для действительной случайной величины. Расширенные случайные величины. Композиция измеримых отображений. Борелевские функции. Объяснение того, что непрерывная функция (отображающая метрическое пространство в метрическое) является борелевской. Лемма, показывающая, что сумма, разность и произведение случайных величин (а также частное, если знаменатель отличен от нуля) являются случайными величинами. Теорема о том, что $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\liminf_{n\in\mathbb{N}} X_n$ есть (вообще говоря, расширенные) случайные величины, а если (на Ω) существует $\lim_{n\in\mathbb{N}} X_n$, то он представляет собой случайную величину. Семейство независимых случайных величин. Теорема Ломницкого-Улама (без доказательства). Распределение случайной величины (случайного элемента).

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

4.1. Доказательство леммы Бореля-Кантелли.

4.2. Измеримые отображения. Доказательство того, что для $\mathcal{F}|\mathcal{B}$-измеримости отображения X достаточно потребовать, чтобы $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$, если $\sigma\{\mathcal{M}\} = \mathcal{B}$. Свойства измеримых отображений. Распределение случайной величины (случайного элемента).

Лекция 5. Математическое ожидание (интеграл Лебега)

Доказательство (классической) теоремы Пуассона. Модель пуассоновского случайного поля в евклидовом пространстве. Три этапа построения интеграла Лебега по вероятностной мере (математического ожидания случайной величины). Механическая интерпретация математического ожидания. Лемма об аппроксимации неотрицательной случайной величины последовательностью неотрицательных неубывающих простых функций. Лемма о том, что интеграл от неотрицательной случайной величины равен пределу интегралов любой последовательности простых неотрицательных функций, которые, не убывая, сходятся к данной величине. Свойства интеграла для простых функций. Свойства интеграла в общем случае. Пространство $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, состоящее из интегрируемых случайных величин. Пространство $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ классов эквивалентных интегрируемых случайных величин. Пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Теорема о монотонной сходимости. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Формула перехода от интеграла (измеримой) функции от случайной величины по мере P к интегралу по распределению этой случайной величины. Неравенство Маркова. Дисперсия. Неравенство Чебышева.

Комментарий. Свойства интеграла Лебега и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега напоминались без доказательств, поскольку (по мнению студентов) этот материал был детально изложен в курсе анализа.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

5.1. Доказательство (классической) теоремы Пуассона. Модель пуассоновского случайного поля в евклидовом пространстве.

5.2. Три этапа построения интеграла Лебега по вероятностной мере (математического ожидания случайной величины). Свойства интеграла. Пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Теорема о монотонной сходимости. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

5.3. Формула перехода от интеграла (измеримой) функции от случайной величины по мере P к интегралу по распределению этой случайной величины. Неравенство Маркова. Дисперсия. Неравенство Чебышева.

Лекция 6. Закон больших чисел

Ковариация и ее свойства (в частности, свойства дисперсии). Ковариация независимых величин. Пример зависимых величин, имеющих ковариацию, равную нулю. Гильбертово пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Неравенство Коши - Буняковского - Шварца. Коэффициент корреляции. Закон больших чисел Бернулли и его обобщения. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса об аппроксимации многочленами функции, непрерывной на отрезке. Виды сходимости случайных величин, соотношения между ними.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

6.1. Ковариация и ее свойства (в частности, свойства дисперсии). Гильбертово пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Неравенство Коши - Буняковского - Шварца. Коэффициент корреляции.

6.2. Закон больших чисел Бернулли и его обобщения. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса об аппроксимации многочленами функции, непрерывной на отрезке.

Лекция 7. Сходимость случайных величин. Усиленный закон больших чисел

Виды сходимости случайных величин, соотношения между ними (продолжение). Усиленный закон больших чисел для ортогональных величин, дисперсии которых ограничены константой. Теорема Эрдеша-Реньи. Следствие для последовательности попарно независимых величин. Доказательство двойного неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X| \geq n) \leq \mathsf{E}|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X| \geq n),$$

где X – произвольная случайная величина. Усиленный закон больших чисел Этемади (для попарно независимых одинаково распределенных величин).

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

7.1. Виды сходимости случайных величин, соотношения между ними. Усиленный закон больших чисел для ортогональных величин, дисперсии которых ограничены константой.

7.2. Теорема Эрдеша-Реньи. Критерий интегрируемости случайной величины X (в терминах сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X| \geq n)$).

Лекция 8. Случайные векторы

Усиленный закон больших чисел Этемади (завершение доказательства). Усиленный закон больших чисел Колмогорова для независимых одинаково распределенных величин. Формулировка усиленного закона больших чисел Колмогорова для независимых случайных величин с конечной дисперсией. Произведение мер. Теорема Фубини. Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона-Никодима (формулировка). Случайные векторы со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция распределения и плотность распределения (по мере Лебега) случайного вектора.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

8.1. Усиленный закон больших чисел Этемади. Усиленный закон больших чисел Колмогорова для независимых одинаково распределенных величин. Формулировка усиленного закона больших чисел Колмогорова для независимых случайных величин с конечной дисперсией.

8.2. Произведение вероятностных мер. Теорема Фубини.

Лекция 9. Слабая сходимость вероятностных мер

Переход от интеграла Лебега по мере μ к интегралу по мере ν, где μ абсолютно непрерывна относительно ν. Плотность распределений компонент вектора, имеющего плотность. Плотность распределения вектора с независимыми компонентами, у которых существуют плотности. Независимость компонент вектора, плотность распределения которого равна произведению плотностей (распределений) компонент. Вычисление $\mathsf{E}h(X)$ (если существует), где случайный вектор $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ имеет плотность $p_X(\cdot)$ и борелевская функция $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Свертка вероятностных распределений. Сглаживание распределений. Свертка плотностей. Слабая сходимость мер, заданных на метрическом пространстве S, снабженном борелевской σ-алгеброй. Сходимость случайных величин (со значениями в S) по распределению. Теорема А.Д.Александрова (необходимые и достаточные условия слабой сходимости вероятностных мер). Определение характеристической функции вероятностной меры, заданной на $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Характеристическая функция случайной величины. Вычисление характеристической функции пуассоновской случайной величины.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

9.1. Теорема Радона-Никодима (формулировка). Переход от интеграла Лебега по мере μ к интегралу по мере ν, где μ абсолютно непрерывна относительно ν. Плотность распределений компонент вектора, имеющего плотность. Плотность вектора, компоненты которого независимы и имеют плотности. Вычисление $\mathsf{E}h(X)$ (если существует), где случайный вектор $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ имеет плотность $p_X(\cdot)$ и борелевская функция $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Свертка вероятностных распределений.

9.2. Слабая сходимость мер, заданных на метрическом пространстве S, снабженном борелевской σ-алгеброй. Сходимость случайных величин (со значениями в S) по распределению. Теорема А.Д.Александрова (необходимые и достаточные условия слабой сходимости вероятностных мер).

Лекция 10. Характеристические функции

Завершение доказательства теоремы Александрова. Критерий слабой сходимости вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ в терминах их функций распределения. Элементарные свойства комплексных чисел. Интеграл Лебега для комплекснозначных функций. Доказательство неравенства $|\mathsf{E}Z| \leq \mathsf{E}|Z|$, где $Z = X + iY$, а X, Y – действительные случайные величины. Характеристическая функция вероятностной меры, заданной на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Вычисление характеристической функции стандартного нормального закона. Свойства характеристических функций ($\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leq 1$ для $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot)$ – равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, а также является неотрицательно определенной). Формулировка теоремы Бохнера - Хинчина. Дана формула обращения (восстановление функции распределения вероятностной меры по ее характеристической функции). Сформулирована теорема Леви (устанавливающая связь между слабой сходимостью вероятностных мер и сходимостью их характеристических функций). Формула обращения (а также ее следствия) и теорема Леви будут доказаны на лекции 11.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

10.1. Интеграл Лебега для комплекснозначных функций. Доказательство неравенства $|\mathsf{E}Z| \leq \mathsf{E}|Z|$, где $Z = X + iY$, а X, Y – действительные случайные величины. Характеристическая функция вероятностной меры, заданной на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Вычисление характеристической функции стандартного нормального закона.

10.2. Свойства характеристических функций ($\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leq 1$ для $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot)$ – равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, а также является неотрицательно определенной). Формулировка теоремы Бохнера - Хинчина.

Примечание. Вопрос 9.2 (как следствие теоремы Александрова) будет включать критерий слабой сходимости вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ в терминах их функций распределения.

Лекция 11. Свойства характеристических функций

Доказательство общей формулы обращения. Доказательство существования плотности у вероятностной меры, имеющей интегрируемую характеристическую функцию. Нахождение этой плотности с помощью обратного преобразования Фурье. Теорема единственности (взаимно однозначное соответствие между характеристическими функциями вероятностных мер и мерами). Вывод следующих свойств характеристической функции $\varphi(\cdot)$ случайной величины X: 1) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, $t \in \mathbb{R}$; 2) распределение P_X симметрично тогда и только тогда, когда характеристическая функция этого распределения действительна; 3) формула для характеристической функции линейно преобразованной случайной величины. Доказательство того, что характеристическая функция суммы (конечного числа) независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

11.1. Формула обращения. Плотность вероятностной меры, имеющей интегрируемую характеристическую функцию. Теорема единственности (взаимно однозначное соответствие между характеристическими функциями вероятностных мер и мерами).

11.2. Вывод следующих свойств характеристической функции $\varphi(\cdot)$ случайной величины X: 1) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, $t \in \mathbb{R}$; 2) распределение X симметрично тогда и только тогда, когда $\varphi(\cdot)$ действительна; 3) формула для характеристической функции $aX + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Характеристическая функция суммы конечного числа независимых случайных величин.

Лекция 11. Центральная предельная теорема

Лемма, содержащая неравенство $Q(x : |x| > 1/a) \le \frac{C}{a}\int_0^a (1 - Re\,\varphi(t))dt$, где $a > 0$, $\varphi(\cdot)$ – характеристическая функция вероятностной меры Q, а C – положительная константа. Критерий слабой сходимости вероятностных мер Q_n к вероятностной мере Q (из каждой последовательности Q_{n_k} можно извлечь подпоследовательность, которая слабо сходится к мере Q). Доказательство теоремы Леви, описывающей слабую сходимость вероятностных мер на языке характеристических функций. Пример, демонстрирующий существенность предположения (в теореме Леви) непрерывности в нуле предела характеристических функций. Проверка того, что $|\int_a^b z(t)dt| \le \int_a^b |z(t)|dt$, где $z(t), t \in [a, b]$, – непрерывная комплекснозначная функция ($a < b$). Лемма, дающая верхнюю оценку для

$$|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \ldots - (i\alpha)^n/n!|, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Верхняя оценка величины $|\varphi_X(t) - 1 - it\mathsf{E}X - \ldots - (it)^n\mathsf{E}X^n/n!|$, где $t \in \mathbb{R}$ и $\varphi_X(\cdot)$ – характеристическая функция случайной величины X, для которой $\mathsf{E}|X|^n < \infty$ при некотором $n \in \mathbb{Z}_+$. Схема серий независимых случайных величин (центрированных и с конечными вторыми моментами). Пренебрежимая малость слагаемых. Доказательство теоремы Линдеберга. Формулировка теоремы Феллера.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

12.1. Доказательство теоремы Леви, описывающей слабую сходимость вероятностных мер на языке характеристических функций.

12.2. Схема серий независимых случайных величин (центрированных и с конечными вторыми моментами). Пренебрежимая малость слагаемых. Доказательство теоремы Линдеберга. Формулировка теоремы Феллера.

Лекция 13. Многомерное нормальное распределение

Центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией (как следствие теоремы Линдеберга). Медленно меняющиеся функции. Необходимые и достаточные условия центральной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных случайных величин (формулировка). Теорема Хелли. Пример последовательности функций распределения $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к функции распределения F на множестве $C(F)$ (точек непрерывности F). Лемма о характеризации слабой сходимости вероятностных мер на прямой в терминах сходимости их функций распределения на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}$. Доказательство теоремы Прохорова для вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Характеристическая функция вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, характеристическая функция случайного вектора со значениями в $\mathbb{R}^n$. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение $N(a, C)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, C – симметричная и неотрицательно определенная матрица порядка n. Случай $C > 0$ (положительная определенность), задание нормального распределения с помощью плотности.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

13.1. Центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией (как следствие теоремы Линдеберга). Медленно меняющиеся функции. Необходимые и достаточные условия центральной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных случайных величин (формулировка).

13.2. Теорема Хелли. Лемма о характеризации слабой сходимости вероятностных мер на прямой в терминах сходимости их функций распределения на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}$. Доказательство теоремы Прохорова для вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

13.3. Характеристическая функция вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, характеристическая функция случайного вектора со значениями в $\mathbb{R}^n$. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение $N(a, C)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, C – симметричная и неотрицательно определенная матрица порядка n.

Лекция 14. Условное математическое ожидание.

Завершение изучения нормального распределения $N(a, C)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, когда матрица C вырождена. Формулировка аналогов теоремы Леви и теоремы единственности для характеристических функций случайных векторов. Критерий независимости компонент вектора: совместная характеристическая функция распадается в произведение характеристических функций компонент. Следствие для гауссовского вектора (независимость компонент равносильна тому, что ковариационная матрица диагональна). Лемма о (смешанных) производных характеристической функции вектора при наличии должного момента у всех его компонент, а также соответствующее обратное утверждение для вторых производных характеристической функции в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Доказательство того, что если $X \sim N(a, C)$, то a – вектор средних, а C – ковариационная матрица. Пример негауссовского вектора с гауссовскими компонентами. Условное математическое ожидание интегрируемой случайной величины относительно σ-алгебры. Пример нахождения $\mathsf{E}(X|\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – есть σ-алгебра, порожденная разбиением вероятностного пространства. Свойства условного математического ожидания. Определение $\mathsf{E}(X|Z)$, где X – интегрируемая величина, Z – случайный вектор. Доказательство того, что $\mathsf{E}(X|Z) = \psi(Z)$, где ψ – борелевская функция.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

14.1. Критерий независимости компонент вектора в терминах характеристических функций этих компонент. Следствие для гауссовского вектора. Лемма о (смешанных) производных характеристической функции вектора при наличии должного момента у всех его компонент, а также соответствующее обратное утверждение для вторых производных характеристической функции в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Доказательство того, что если $X \sim N(a, C)$, то a – вектор средних, а C – ковариационная матрица.

14.2. Условное математическое ожидание интегрируемой случайной величины относительно σ-алгебры. Пример нахождения $\mathsf{E}(X|\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – есть σ-алгебра, порожденная разбиением вероятностного пространства. Свойства условного математического ожидания. Определение $\mathsf{E}(X|Z)$, где X – интегрируемая величина, Z – случайный вектор. Доказательство того, что $\mathsf{E}(X|Z) = \psi(Z)$, где ψ – борелевская функция.

Лекция 14. Свойства условного математического ожидания

Доказательство основных (девяти) свойств условного математического ожидания: пусть $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра событий, содержащихся в $\mathcal{F}$.

1) $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A})) = \mathsf{E}X$;
2) $\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) = X$, если $X \in \mathcal{A}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, в частности, $\mathsf{E}(C|\mathcal{A}) = C$, где C – константа;
3) $\mathsf{E}(aX + bY|\mathcal{A}) = a\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) + b\mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$;
4) $X \le Y \implies \mathsf{E}(X|\mathcal{A}) \le \mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$;
5) $|\mathsf{E}(X|\mathcal{A})| \le \mathsf{E}(|X||\mathcal{A})$;
6) $\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) = \mathsf{E}X$, если X и $\mathcal{A}$ независимы (т.е. независимы $\sigma\{X\}$ и $\mathcal{A}$);
7) пусть σ-алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ таковы, что $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$, тогда

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1) = \mathsf{E}(X|\mathcal{A}_1);$$

8) пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ таковы, что $X_n \to X$ (п.н) при $n \to \infty$, $|X_n| \le Y$ (где $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$), $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\mathsf{E}(X_n|\mathcal{A}) \to \mathsf{E}(X|\mathcal{A}), \quad n \to \infty;$$

9) пусть $XY, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, причем случайная величина X измерима относительно $\mathcal{A}$, тогда

$$\mathsf{E}(XY|\mathcal{A}) = X\mathsf{E}(Y|\mathcal{A}).$$

Примечание. Все рассматриваемые равенства и неравенства, связывающие случайные величины, выполняются почти наверное.

Конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых одинаково распределенных экспоненциальных величин. Примеры использования условного математического ожидания. *Пример 1.* Два человека приходят независимо друг от друга на автобусную остановку. Время прихода каждого из них описывается случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[T, T+\Delta]$. Автобусы подходят к остановке в моменты времени $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин таких, что $\xi_n \sim Exp(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Требуется найти вероятность того, что оба человека уедут на одном и том же подошедшем к остановке автобусе. *Пример 2* представляет собой решение обязательной задачи 14.3 к лекции 14. Формулировки нескольких классических предельных теорем: закон повторного логарифма Хартмана-Винтнера, интегральный критерий Колмогорова-Петровского-Эрдеша-Феллера, полукруговой закон Вигнера для случайных матриц.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

15.1. Доказательство основных (девяти) свойств условного математического ожидания.

15.2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины такие, что $X_k \sim Exp(\lambda_k)$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Определим $Z_n := \min_{1 \le k \le n} X_k$, $J_n := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = Z_n\}$. С помощью аппарата условных математических ожиданий доказать, что Z_n и J_n – независимые величины, а также найти их распределения.

Замечание. Доказательство свойств условного математического ожидания изъято из вопроса 14.2 и теперь составляет вопрос 15.1. На лекции 15 дано доказательство того, что $\mathsf{E}(X|Z) = \psi(Z)$, где ψ – борелевская функция. Последний результат остается в вопросе 14.2.