Лекция 5. Математическое ожидание (интеграл Лебега)

Доказательство (классической) теоремы Пуассона. Модель пуассоновского случайного поля в евклидовом пространстве. Три этапа построения интеграла Лебега по вероятностной мере (математического ожидания случайной величины). Механическая интерпретация математического ожидания. Лемма об аппроксимации неотрицательной случайной величины последовательностью неотрицательных неубывающих простых функций. Лемма о том, что интеграл от неотрицательной случайной величины равен пределу интегралов любой последовательности простых неотрицательных функций, которые, не убывая, сходятся к данной величине. Свойства интеграла для простых функций. Свойства интеграла в общем случае. Пространство $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, состоящее из интегрируемых случайных величин. Пространство $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ классов эквивалентных интегрируемых случайных величин. Пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Теорема о монотонной сходимости. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Формула перехода от интеграла (измеримой) функции от случайной величины по мере P к интегралу по распределению этой случайной величины. Неравенство Маркова. Дисперсия. Неравенство Чебышева.

Комментарий. Свойства интеграла Лебега и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега напоминались без доказательств, поскольку (по мнению студентов) этот материал был детально изложен в курсе анализа.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

5.1. Доказательство (классической) теоремы Пуассона. Модель пуассоновского случайного поля в евклидовом пространстве.

5.2. Три этапа построения интеграла Лебега по вероятностной мере (математического ожидания случайной величины). Свойства интеграла. Пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Теорема о монотонной сходимости. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

5.3. Формула перехода от интеграла (измеримой) функции от случайной величины по мере P к интегралу по распределению этой случайной величины. Неравенство Маркова. Дисперсия. Неравенство Чебышева.