Лекция 14. Свойства условного математического ожидания

Доказательство основных (девяти) свойств условного математического ожидания: пусть $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра событий, содержащихся в $\mathcal{F}$.

1) $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A})) = \mathsf{E}X$;
2) $\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) = X$, если $X \in \mathcal{A}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, в частности, $\mathsf{E}(C|\mathcal{A}) = C$, где C – константа;
3) $\mathsf{E}(aX + bY|\mathcal{A}) = a\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) + b\mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$;
4) $X \le Y \implies \mathsf{E}(X|\mathcal{A}) \le \mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$;
5) $|\mathsf{E}(X|\mathcal{A})| \le \mathsf{E}(|X||\mathcal{A})$;
6) $\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) = \mathsf{E}X$, если X и $\mathcal{A}$ независимы (т.е. независимы $\sigma\{X\}$ и $\mathcal{A}$);
7) пусть σ-алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ таковы, что $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$, тогда

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1) = \mathsf{E}(X|\mathcal{A}_1);$$

8) пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ таковы, что $X_n \to X$ (п.н) при $n \to \infty$, $|X_n| \le Y$ (где $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$), $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\mathsf{E}(X_n|\mathcal{A}) \to \mathsf{E}(X|\mathcal{A}), \quad n \to \infty;$$

9) пусть $XY, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, причем случайная величина X измерима относительно $\mathcal{A}$, тогда

$$\mathsf{E}(XY|\mathcal{A}) = X\mathsf{E}(Y|\mathcal{A}).$$

Примечание. Все рассматриваемые равенства и неравенства, связывающие случайные величины, выполняются почти наверное.

Конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых одинаково распределенных экспоненциальных величин. Примеры использования условного математического ожидания. *Пример 1.* Два человека приходят независимо друг от друга на автобусную остановку. Время прихода каждого из них описывается случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[T, T+\Delta]$. Автобусы подходят к остановке в моменты времени $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин таких, что $\xi_n \sim Exp(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Требуется найти вероятность того, что оба человека уедут на одном и том же подошедшем к остановке автобусе. *Пример 2* представляет собой решение обязательной задачи 14.3 к лекции 14. Формулировки нескольких классических предельных теорем: закон повторного логарифма Хартмана-Винтнера, интегральный критерий Колмогорова-Петровского-Эрдеша-Феллера, полукруговой закон Вигнера для случайных матриц.

ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ ВОЙДУТ В ЭКЗАМЕНАЦИОННУЮ ПРОГРАММУ

15.1. Доказательство основных (девяти) свойств условного математического ожидания.

15.2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины такие, что $X_k \sim Exp(\lambda_k)$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Определим $Z_n := \min_{1 \le k \le n} X_k$, $J_n := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = Z_n\}$. С помощью аппарата условных математических ожиданий доказать, что Z_n и J_n – независимые величины, а также найти их распределения.

Замечание. Доказательство свойств условного математического ожидания изъято из вопроса 14.2 и теперь составляет вопрос 15.1. На лекции 15 дано доказательство того, что $\mathsf{E}(X|Z) = \psi(Z)$, где ψ – борелевская функция. Последний результат остается в вопросе 14.2.