

Программа курса
«Теория вероятностей и математическая статистика»
для 4-го курса отделения механики
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова
на 2021/2022 учебный год
Лектор – к.ф-м.н. А.Е. Кондратенко

1. Классическое определение вероятности, ограничения классической модели. Операции над событиями и их свойства. Основные комбинаторные формулы. Геометрическая вероятность, ограничение геометрической модели. Дискретное вероятностное пространство, ограничение дискретной модели. Классическая модель, как частный случай геометрической и дискретной моделей. Дискретная модель, как частный случай геометрической.
2. Аксиоматическое вероятностное пространство Колмогорова. Минимальная и максимальная сигма-алгебры. Пример «промежуточной» σ -алгебры. σ -алгебра, порожденная системой множеств. Борелевская σ -алгебра. Основные борелевские множества, их выражения через лучи вида $(-\infty; x]$.
3. Аксиоматическое вероятностное пространство Колмогорова. Вероятность невозможного события, сумма вероятностей события и его отрицания. Вероятность суммы событий. Аксиома непрерывности, следствия. Равносильность аксиом конечной аддитивности и непрерывности аксиоме σ -аддитивности. Пример аддитивной, но не σ -аддитивной вероятностной меры.
4. Независимые события. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Схема Бернулли. Точные локальная и глобальная формулы. Наиболее вероятное число успехов. Необходимость предельных теорем. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, теорема Пуассона. Полиномиальная схема, формулировка локальной предельной теоремы.
6. Случайные величины. Пример отображения, не являющегося случайной величиной. σ -алгебра, порожденная случайной величиной. σ -алгебра, порожденная постоянной случайной величиной. Замкнутость случайных величин относительно арифметических операций. Борелевские функции, борелевская функция от случайной величины.
7. Дискретные случайные величины. Постоянная, индикатор, равномерная, Бернулли, биномиальная, Пуассоновская, геометрическая, гипергеометрическая, отрицательная биномиальная случайные величины, их смысл.
8. Функция распределения случайной величины. Область определения функции распределения. Свойства функции распределения. Достаточность этих свойств для того, чтобы функция, им удовлетворяющая, являлась функцией распределения некой случайной величины. Функция распределения дискретной случайной величины.
9. Абсолютно непрерывная случайная величина. Физический смысл случайной величины. Вероятности принятия случайной величиной значений из основных борелевских множеств в терминах функции распределения и в абсолютно непрерывном случае в терминах плотности. Вероятность принятия случайной величиной значений из произвольного борелевского множества в дискретном, абсолютно непрерывном и общем случаях. Абсолютная непрерывности бросания

- точки на $[0;1]$. Равномерная на $[a;b]$, экспоненциальная (показательная), Коши, нормальная (Гауссовская), стандартная нормальная случайные величины, их смысл.
10. Сингулярная случайная величина, корректность определения. Формулировка теоремы Лебега о представлении функции распределения. Пример случайной величины, не являющейся ни дискретной, ни абсолютно непрерывной, ни сингулярной. Независимые случайные величины. Независимость борелевских функций от независимых случайных величин. Независимость постоянной случайной величины с любой случайной величиной.
 11. Математическое ожидание конечной дискретной, дискретной абсолютно непрерывной случайных величин. Физический смысл математического ожидания. Математическое ожидание случайной величины в терминах интегралов Лебега и Стильеса. Свойства математического ожидания. Нахождение математического ожидания методом представления исходной случайной величины в виде суммы «более простых» случайных величин.
 12. Математическое ожидание основных дискретных случайных величин.
 13. Математическое ожидание основных абсолютно непрерывных случайных величин.
 14. Дисперсия случайной величины. Свойства дисперсии. Моменты случайной величины. Нахождение математического ожидания борелевской функции от случайной величины. Связь существования и несуществования моментов различных порядков. Влияние существования моментов на скорость сходимости к нулю вероятностей «хвостов» распределений. Существование моментов всех положительных порядков у ограниченной случайной величины.
 15. Дисперсия основных дискретных случайных величин.
 16. Дисперсия основных абсолютно непрерывных случайных величин.
 17. Неравенства Маркова, Чебышева, закон больших чисел в формах Чебышева, Чебышева для одинаково распределенных случайных величин, Бернулли, формулировка усиленного закона больших чисел в форме Колмогорова.
 18. Свойство отсутствие последействия у экспоненциальной случайной величины, его смысл с точки зрения теории надежности. Функций надежности, интенсивность отказов. Взаимно однозначное соответствие между функциями надежности и интенсивностями отказов.
 19. Распределение максимума, минимума случайных величин, распределение (k) -й случайной величины.
 20. Свертка случайных величин. Формула свертки для целочисленного, абсолютно непрерывного и общего случая. Коммутативность, ассоциативность и существования нейтрального элемента. Абсолютная непрерывность свертки, обладающей абсолютной непрерывным слагаемых.
 21. Свертки пуассоновских, непрерывных, экспоненциальных, нормальных случайных величин
 22. Многомерные случайные величины. Многомерная функция распределения, наследование одномерных свойств. Вероятность принятия многомерной случайной величиной значений из параллелепипеда в терминах функции распределения. Многомерное характеристическое свойство функции распределения.
 23. Многомерные дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины. Выражение плотности через функцию распределения. Независимость в терминах функций распределения и плотностей. Нахождение одномерных распределений и распределений, размерности меньше исходной. Невозможности восстановленная

- многомерного распределения по одномерным. Нахождения функции распределения борелевской функции от случайной величины.
24. Ковариации и коэффициент корреляции случайных величин, их свойства и геометрический смысл.
 25. Характеристическая функция случайной величины, свойства. Формула обращения и предельные теоремы (без доказательства).
 26. Нормированные и центрированные случайные величины. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
 27. Сходимость случайных величин по вероятности, по распределению, почти наверное, в среднем. Связи между сходимостями.
 28. Задачи статистики. Выборочная вероятность, выборочная функция распределения, их сходимости по вероятности и почти наверное к теоретическим вероятностям и функции распределения.
 29. Оценки. Оценки математического ожидания и дисперсии (при известном и неизвестном математическом ожидании). Несмещенность. Отличие оценки дисперсии при известном и неизвестном математическом ожидании. Состоятельность. Формулировка теоремы Слуцкого. Состоятельность выборочных моментных характеристик и функций от них (центральные моменты, асимметрия, эксцесс).
 30. Метод моментов. Примеры.
 31. Квантиль, медиана, квартили, интерквартильный размах, дециль, процентиль. Аналогия медианы и размаха математическому ожиданию и дисперсии. Неприменимость метода моментов при их отсутствии. Выборочные квантили, выборочная медиана. Формулировка теоремы об асимптотической нормальности выборочной квантили. Пример с оценкой параметра сдвига у распределения Коши.
 32. Распределения χ^2 , Стьюдента и Фишера.
 33. Доверительные интервалы. Точные доверительные интервалы в нормальном случае: математического ожидания при известной и неизвестной дисперсии, дисперсии при известном и неизвестном математическом ожидании, прогноз наблюдений, асимптотический доверительный интервал для параметра p в схеме Бернулли.
 34. Метод максимального правдоподобия, примеры.
 35. Эффективность оценок. Информация Фишера. Формулировка теоремы Рао-Фреше-Крамера. Примеры.
 36. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия.
 37. Статистических гипотезы, основная и альтернативная гипотезы, статистика критерия, критическая область, ошибки первого и второго рода, уровень значимости и мощность критерия. Критерий отношения правдоподобия.
 38. Проверка гипотез в нормальном случае о значении математического ожидания (при известной и неизвестной дисперсии), о значении дисперсии (при известном и неизвестном математическом ожидании), о значении параметра p в схеме Бернулли.
 39. Проверка гипотез в нормальном случае о равенстве математических ожиданий двух выборок (при известных дисперсиях и при неизвестных равных дисперсиях), о равенстве дисперсий (при неизвестных математических ожиданиях), о равенстве параметров p_1 и p_2 в двух схемах Бернулли.
 40. Критерий согласия Пирсона.