Кафедра теории вероятностей

Курс "Теория вероятностей" (весенний семестр 2018 года)
Лектор – профессор А.В.Булинский

ПРОГРАММА

1. Основные этапы развития теории вероятностей. Модели случайных экспериментов. Пространство элементарных исходов. Примеры. Операции над множествами. Системы подмножеств непустого множества (алгебры, σ-алгебры, π- и λ-системы). Примеры. Борелевская σ-алгебра. Теорема о π- λ-системах.

2. Мера. Понятия длины, площади и объема в геометрии. Вероятностное пространство, введенное А.Н.Колмогоровым. Мера Дирака. Частотная интерпретация вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности.

3. Некоторые дискретные распределения (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, пуассоновское). Геометрические вероятности. Игла Бюффона. Парадокс Бертрана.

4. Элементарные свойства вероятности. Задача о письмах и конвертах. Свойство непрерывности вероятности (на алгебре). Теорема о характеризации свойства σ-аддитивности конечной неотрицательной функции, определенной на алгебре. Идея доказательства теоремы Каратеодори.

5. Функция распределения вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и свойства этой функции. Понятие (кусочно-непрерывной) плотности. Распределения вероятностей: равномерное на отрезке $[a, b]$, экспоненциальное, Коши, Парето, Гаусса (нормальное).

6. Построение вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции, обладающей четырьмя свойствами функции распределения (вероятностной меры). Пополнение вероятностного пространства.

7. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Задача об экзаменационных билетах. Формула Байеса. Пример, относящийся к медицинскому обследованию.

8. Независимость попарная и в совокупности. Пример Бернштейна. Лемма о независимости дополнений независимых событий. Формула Эйлера в теории чисел.

9. Независимость систем событий. Независимость σ-алгебр, порожденных независимыми π-системами. Лемма о группировке. Лемма Бореля - Кантелли.

10. Мера Лебега на борелевских множествах прямой. Произведение измеримых пространств. Мера Лебега на борелевских множествах $\mathbb{R}^n$.

11. Измеримые отображения. Случайные величины (векторы) и их распределения. Борелевские функции. Лемма о композиции измеримых отображений. Теорема, показывающая, что случайный вектор можно определить как вектор, имеющий компонентами случайные величины. Расширенные случайные величины.

12. Операции со случайными величинами X и Y ($X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$ и X/Y, когда $Y(\omega) \neq 0$ для $\omega \in \Omega$). Теорема, утверждающая, что если $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность случайных величин, то $\sup_n X_n$, $\inf_n X_n$, $\limsup_n X_n$, $\liminf_n X_n$ и $\lim_n X_n$ (когда предел существует на Ω) являются, вообще говоря, расширенными случайными величинами.

13. Распределение случайного элемента; σ-алгебра, порожденная случайными элементами. Независимость случайных элементов. Независимость измеримых функций, берущихся от непересекающихся наборов независимых случайных элементов.

14. Теорема Ломницкого - Улама (формулировка). Независимость случайных величин в терминах совместных функций распределения. Независимость дискретных случайных величин.

15. Классическая теорема Пуассона. Модель пуассоновского случайного поля. Задача о булочках с изюмом.

16. Оценка скорости сходимости в неклассической теореме Пуассона.

17. Конструкция интеграла Лебега. Три этапа построения (для простых функций, неотрицательных и знакопеременных).

18. Свойства интеграла Лебега.

19. Пространство $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

20. Неравенство Маркова.

21. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (теорема о монотонной сходимости и ее следствия, лемма Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости). Переход к интегрированию по новому пространству. Интеграл Лебега по конечной и σ-конечной мере.

22. Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона – Никодима (формулировка). Замена меры в интеграле.

23. Классы эквивалентных величин. Пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Математическое ожидание произведения независимых интегрируемых величин.

24. Моменты. Дисперсия, ковариация, их свойства.

25. Неравенство Коши - Буняковского - Шварца. Неравенство Гельдера (формулировка). Неравенство Ляпунова. Неравенство Чебышева.

26. Сходимость по вероятности, почти наверное, по распределению, в пространстве L^p. Взаимосвязи этих типов сходимости.

27. Закон больших чисел в форме Бернулли.

28. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса.

29. Слабая сходимость вероятностных мер, заданных на борелевской σ-алгебре метрического пространства. Теорема Александрова (формулировка).

30. Сходимость случайных величин по распределению. Критерий сходимости в терминах функций распределения.

31. Слабая относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер. Теорема Прохорова (формулировка).

32. Характеристические функции случайных величин и случайных векторов со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$, а также вероятностных мер, определенных на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

33. Теорема Фубини (без доказательства).

34. Элементарные свойства характеристических функций.

35. Теорема единственности (формула обращения). Критерий независимости компонент случайного вектора в терминах характеристических функций (вектора и его компонент).

36. Лемма об оценке вероятности события $\{|X| \geq 1/a\}$, где X – случайная величина, a – положительное число. Теорема непрерывности.

37. Характеристическая функция нормального распределения.

38. Лемма о поведении характеристической функции в окрестности нуля.

39. Центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных невырожденных величин, имеющих конечную дисперсию. Функции, медленно меняющиеся на бесконечности. Критерий справедливости центральной предельной теоремы для последовательности нормированных сумм независимых одинаково распределенных величин (формулировка).

40. Центральная предельная теорема в условиях Линдеберга. Теорема Феллера (формулировка).

41. Необходимые и достаточные условия центральной предельной теоремы в схеме серий независимых случайных величин (формулировка).

42. Плотность многомерного нормального (гауссовского) распределения $N(a, C)$, где вектор $a \in \mathbb{R}^n$, матрица $C = (c_{k,j})_{k,j=1}^n$ симметрична и положительно определена. Нахождение характеристической функции такого распределения вероятностей.

43. Задание с помощью характеристической функции нормального (гауссовского) распределения $N(a, C)$, где вектор $a \in \mathbb{R}^n$, матрица $C = (c_{k,j})_{k,j=1}^n$ симметрична и неотрицательно определена. Смысл параметров a и C.

44. Критерий независимости компонент гауссовского вектора. Доказательство того, что вектор, составленный из части компонент гауссовского вектора, является гауссовским. Пример негауссовского вектора, имеющего гауссовские компоненты.

45. Многомерная центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных векторов, имеющих конечный второй момент квадрата нормы.

46. Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Скалярное произведение, норма. Доказательство полноты $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Лемма о непрерывности скалярного произведения по паре аргументов.

47. Ортогональные векторы. Подпространство гильбертова пространства H. Расстояние $d(x, L)$ от вектора x до подпространства $L \subset H$. Теорема о единственном векторе $y \in L$ таком, что $d(x, L) = \|x - y\|$. Оператор P_L проектирования в H на подпространство L. Ортогональное дополнение $L^{\perp}$. Разложение $H = L + L^{\perp}$.

48. Определение условного математического ожидание $\mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$ с помощью теоремы Радона - Никодима (формулировка для двух σ-конечных мер), где Y – неотрицательная случайная величина, σ-алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Определение $\mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$ для знакопеременной случайной величины Y. Существование $\mathsf{E}(Y|\mathcal{A})$, когда $\mathsf{E}|Y| < \infty$. Доказательство того, что $\mathsf{E}(Y|\mathcal{A}) = P_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})}Y$, если $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Элементарные свойства условного математического ожидания.

49. Теорема о случайной величине, измеримой относительно σ-алгебры $\sigma\{X\}$, где $\sigma\{X\}$ порождается случайной величиной X (или случайным вектором со значениями в пространстве $\mathbb{R}^d$). Определение $\mathsf{E}(Y|X)$ и $\mathsf{E}(Y|X = x)$.

50. Однородные цепи Маркова $X_0, X_1, \ldots$ с дискретным временем и конечным пространством состояний. Начальное распределение, матрица переходных вероятностей. Нахождение распределения X_n в произвольный момент n.

51. Построение однородной марковской цепи с заданными начальным распределением и матрицей переходных вероятностей по последовательности независимых величин $U_0, U_1, \ldots$, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

52. Стационарное распределение. Обратимые цепи. Доказательство того, что обратимое распределение является стационарным. Пример случайного блуждания по конечному графу.

ЛИТЕРАТУРА

А.Н.Ширяев. Вероятность-1. 4-е изд., МЦНМО, 2007.

В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1,2. М.: Мир, 1984.

J.Jacod, P.Protter. Probability Essentials. Springer, 2007.